Bárbara Perry Pereira Alves Gouveia é Professora
iliar do Departamento de Engenharia Mecânica do
ituto Superior Técnico. Desenvolve as suas actividades
ensino e investigação na área da Tecnologia Mecânica
de 1995. No ensino tem leccionado e sido responsável
diversas disciplinas na área da Tecnologia Mecânica em
erentes licenciaturas e mestrados do Instituto Superior
nico. A sua actividade principal de investigação e de-
volvimento é realizada no domínio da Tecnologia da
ormação Plástica. É autora de vários artigos científicos
licados em revistas e conferências internacionais no
nínio do fabrico e da simulação numérica de processos
deformação plástica. A sua actividade de investigação
globa ainda a participação em diversos projectos com
ndústria.

Jorge Manuel da Conceição Rodrigues é Professor
sociado do Instituto Superior Técnico. Desenvolve a sua
ividade na área da Tecnologia Mecânica desde 1980
ndo a sua actividade principal de investigação e de-
nvolvimento realizada no domínio da Tecnologia da
ormação Plástica. É autor de mais de 100 publicações
revistas e conferências internacionais da especialida-
e de um livro no domínio da simulação numérica de
cessos de deformação plástica baseada na utilização
métodos sem malha em co-autoria com Paulo Martins.

Paulo António Firme Martins é Professor Catedrático
Instituto Superior Técnico, Presidente do Conselho
ntífico do Instituto Superior Técnico, membro associa-
da Academia Internacional de Tecnologias de Produção
P) e membro do comité editorial de várias revistas
ntíficas internacionais. Desenvolve a sua actividade na
a da Tecnologia Mecânica desde 1986 sendo a sua ac-
dade principal de investigação e desenvolvimento rea-
da no domínio da Tecnologia da Deformação Plástica.
utor de vários livros e capítulos de livros e de 200
blicações internacionais das quais mais de 100 estão
tadas em revistas internacionais da especialidade.

BÁRBARA GOUVEIA JORGE RODRIGUES PAULO MARTINS

Tecnologia Mecânica

Tecnologia da Deformação Plástica

Vol. III · Exercícios resolvidos

ESCOLAR EDITORA

RESPEITE OS DIREITOS DE AUTOR
NÃO FOTOCOPIE LIVROS

Tecnologia Mecânica
Tecnologia de Deformação Plástica
Vol. III • Exercícios resolvidos

Autores Bárbara Gouveia, Jorge Rodrigues, Paulo Martins

Copyright © by Escolar Editora, 2011
Rua do Vale Formoso, 37 — 1959-006 Lisboa
Telefone 211 066 500 **Fax** 211 066 530
E-mail editora@escolareditora.com
Internet http://www.escolareditora.com

Proibida a reprodução total ou parcial deste livro sem a autorização expressa do editor.
Todos os direitos estão reservados por Escolar Editora.

Coordenação Editorial João Costa

ISBN 978-972-5592-321-4
Depósito Legal n.º 325 441/11

Impressão e Acabamento
Gráfica Manuel Barbosa & Filhos

À Mª Inês, à Mª Madalena, ao Jorge e aos meus Pais,
Bárbara P. P. A. Gouveia

Aos meus Pais,
Jorge M. C. Rodrigues

À Paula, à Verónica, à Leonor e aos meus Pais,
Paulo A. F. Martins

ÍNDICE

1. FUNDAMENTOS DE ELASTICIDADE E PLASTICIDADE

Problema 1.1 1
Problema 1.2 3
Problema 1.3 5
Problema 1.4 8
Problema 1.5 10
Problema 1.6 15
Problema 1.7 18
Problema 1.8 21
Problema 1.9 23
Problema 1.10 24
Problema 1.11 25
Problema 1.12 27
Problema 1.13 28
Problema 1.14 29
Problema 1.15 31
Problema 1.16 35
Problema 1.17 38

2. PLASTICIDADE

Problema 2.1 41
Problema 2.2 50
Problema 2.3 52
Problema 2.4 54
Problema 2.5 57
Problema 2.6 58
Problema 2.7 63
Problema 2.8 66
Problema 2.9 71
Problema 2.10 74
Problema 2.11 77
Problema 2.12 79
Problema 2.13 81
Problema 2.14 85
Problema 2.15 88

Problema 2.16 93
Problema 2.17 94

3. MÉTODO DA ENERGIA UNIFORME

Problema 3.1 99
Problema 3.2 102
Problema 3.3 107
Problema 3.4 110
Problema 3.5 114
Problema 3.6 117
Problema 3.7 120
Problema 3.8 124
Problema 3.9 127

4. MÉTODO DA FATIA ELEMENTAR

Problema 4.1 131
Problema 4.2 137
Problema 4.3 141
Problema 4.4 146
Problema 4.5 152
Problema 4.6 156

5. MÉTODO DAS LINHAS DE ESCORREGAMENTO

Problema 5.1 165
Problema 5.2 172
Problema 5.3 181
Problema 5.4 187
Problema 5.5 194
Problema 5.6 197
Problema 5.7 201
Problema 5.8 207

6. MÉTODO DO LIMITE SUPERIOR

Problema 6.1 213
Problema 6.2 221
Problema 6.3 230
Problema 6.4 233

Problema 6.5 240
Problema 6.6 244
Problema 6.7 248
Problema 6.8 255
Problema 6.9 262

7. FORJAMENTO

Problema 7.1 269
Problema 7.2 272
Problema 7.3 276
Problema 7.4 283
Problema 7.5 287
Problema 7.6 295
Problema 7.7 301

8. EXTRUSÃO

Problema 8.1 305
Problema 8.2 312
Problema 8.3 318
Problema 8.4 323
Problema 8.5 332
Problema 8.6 346
Problema 8.7 357

9. LAMINAGEM

Problema 9.1 369
Problema 9.2 376
Problema 9.3 385

10. CORTE POR ARROMBAMENTO

Problema 10.1 393
Problema 10.2 397
Problema 10.3 403
Problema 10.4 409
Problema 10.5 420
Problema 10.6 437
Problema 10.7 442

11. ESTAMPAGEM

Problema 11.1 451
Problema 11.2 455
Problema 11.3 463
Problema 11.4 473
Problema 11.5 485
Problema 11.6 497

12. FLEXÃO EM DOMÍNIO PLÁSTICO

Problema 12.1 505
Problema 12.2 511
Problema 12.3 519
Problema 12.4 526
Problema 12.5 533
Problema 12.6 546

PREFÁCIO

É com enorme prazer que escrevo o prefácio do presente livro dedicado a problemas em tecnologias da deformação plástica. Este livro surge como sequência natural de outros dois livros publicados pelos mesmos autores que granjeiam de enorme prestígio nacional e internacional neste domínio.

A tecnologia da deformação plástica desempenha, actualmente, um papel crucial no seio das indústrias de produção com especial realce para o sector automóvel, aeroespacial e de embalagens. Os autores abordam neste livro um conjunto de problemas de índole básica e tecnológica que permitem dar expressão prática aos aspectos teóricos apresentados nos dois volumes precedentes. Assim, reúnem-se pela primeira vez no mesmo livro problemas sobre fundamentos da elasticidade e plasticidade, métodos de plasticidade e praticamente todas as tecnologias de deformação plástica. Este esforço merece, obviamente, por parte da comunidade académica, um enorme reconhecimento. A forma como os problemas são apresentados revela que a utilidade do livro não se confina apenas aos alunos dos cursos de licenciatura e mestrado e programas doutorais mas é também de extrema importância para engenheiros e técnicos confrontados com problemas de tecnologia mecânica, mecânica dos materiais e projecto de equipamentos e ferramentas.

Gostaria de dar os meus sinceros parabéns aos autores e manifestar o meu enorme agradecimento por mais este contributo para a literatura técnica portuguesa.

Aveiro, 7 de Março de 2010

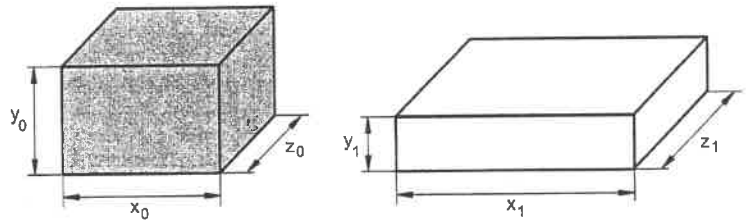
José Grácio
Prof. Catedrático
Coordenador Científico do Centro de Tecnologia Mecânica e Automação
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de Aveiro

1. FUNDAMENTOS DE ELASTICIDADE E PLASTICIDADE

Este capítulo apresenta um conjunto de problemas sobre os aspectos fenomenológicos básicos de elasticidade e plasticidade com o objectivo de estabelecer a ligação entre a elasticidade, a plasticidade e a física dos processos de fabrico.

Problema 1.1

Considere a deformação plástica do bloco paralelepipédico que se encontra representado na figura e estabeleça a condição de incompressibilidade $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ característica da deformação plástica dos materiais metálicos.



Resolução

Como a deformação plástica dos materiais metálicos é incompressível o volume do bloco paralelepipédico deverá permanecer constante durante a compressão. Admitindo que a compressão é homogénea e que as direcções x, y, z são direcções principais, obtém-se o seguinte quociente entre o volume inicial $V_0 = h_0 b_0 l_0$ e o volume final $V_1 = h_1 b_1 l_1$ do bloco paralelepipédico,

$$\frac{V_1}{V_0} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1 y_1 z_1}{x_0 y_0 z_0} = 1 \qquad (1.1.1)$$

Aplicando logaritmos à expressão anterior obtém-se a condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos,

$$\ln\left(\frac{x_1 y_1 z_1}{x_0 y_0 z_0}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right) + \ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \qquad (1.1.2)$$

A igualdade (1.1.2) é apenas válida para extensões verdadeiras na medida em que a soma das três extensões nominais principais não é nula,

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\ln(1+e_x)+\ln(1+e_y)+\ln(1+e_z)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+e_x)(1+e_y)(1+e_z)=1$$
$$e_x+e_y+e_z\neq 0 \tag{1.1.3}$$

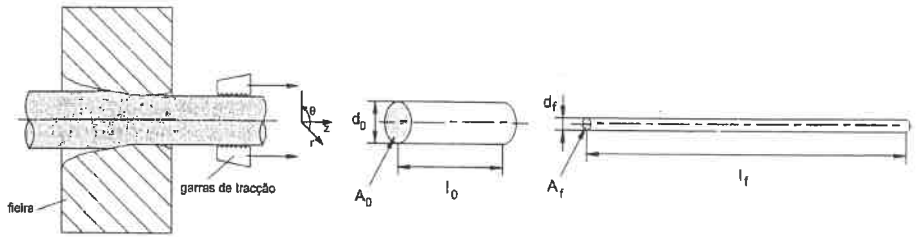
Problema 1.2

O arame utilizado no fabrico de um clipe de papel com 1 mm diâmetro é produzido por trefilagem a partir de um arame com 10 mm de diâmetro. Calcule as extensões verdadeiras e nominais que o material do arame sofre nas direcções longitudinal, radial e tangencial durante a trefilagem.

Resolução

Atendendo à conservação de volume em deformação plástica, é possível escrever o quociente entre os comprimentos do arame antes l_0 e depois de trefilado l_f em função do quociente entre a área inicial A_0 e a área final A_f da secção transversal do arame,

$$l_0A_0=l_fA_f \quad \Leftrightarrow \quad \frac{l_f}{l_0}=\frac{A_0}{A_f}=\frac{\pi\frac{d_0^2}{4}}{\pi\frac{d_f^2}{4}}=\frac{d_0^2}{d_f^2}=\frac{10^2}{1^2}=100 \tag{1.2.1}$$



As extensões nominais que são alcançadas na trefilagem do arame do clipe são calculadas a partir dos seguintes quocientes geométricos,

$$e_r=\frac{d_f-d_0}{d_0}=\frac{d_f}{d_0}-1=\frac{1}{10}-1=-0.9$$
$$e_z=\frac{l_f-l_0}{l_0}=\frac{l_f}{l_0}-1=100-1=99 \tag{1.2.2}$$
$$e_\theta=\frac{\pi d_f-\pi d_0}{\pi d_0}=\frac{d_f-d_0}{d_0}=e_r=-0.9$$

e as extensões verdadeiras são as seguintes,

$$\varepsilon_r = \ln\left(\frac{d}{d_0}\right) = \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -2.3$$
$$\varepsilon_z = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln 100 = 4.6 \qquad (1.2.3)$$
$$\varepsilon_\theta = \ln\left(\frac{\pi d}{\pi d_0}\right) = \ln\left(\frac{d}{d_0}\right) = \varepsilon_r = -2.3$$

A condição de incompressibilidade está assegurada em (1.2.3) tal como se pode verificar através da soma das extensões verdadeiras nos três eixos (primeiro invariante do tensor das extensões),

$$L_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = -2.3 - 2.3 + 4.6 = 0 \qquad (1.2.4)$$

Como foi referido no problema 1.1 a soma das três extensões nominais $e_{ii} \neq 0$,

$$e_r + e_\theta + e_z = -0.9 - 0.9 + 99 \neq 0 \qquad (1.2.5)$$

Problema 1.3

A secção transversal de um varão metálico é reduzida por intermédio de uma sequência de 3 operações de extrusão directa. Cada uma das operações de extrusão permite efectuar uma redução de secção igual a 10%.

a) Determine o valor da extensão efectiva no final do processo.

b) Estabeleça uma relação entre o comprimento inicial e final do varão.

c) Determine o valor da extensão nominal no final do processo.

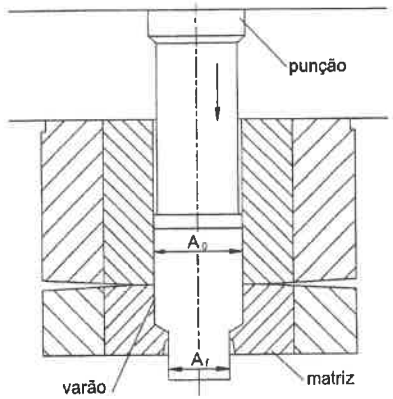
d) Utilize a alínea a) para verificar que as extensões verdadeiras são aditivas.

Resolução

a) A extensão efectiva (verdadeira) numa operação de extrusão directa análoga à que se encontra representada na figura calcula-se através de,

$$\varepsilon_z = \ln\frac{l_f}{l_0} = \ln\frac{A_0}{A_f} = \ln\frac{d_0^2}{d_f^2} \qquad \varepsilon_\theta = \varepsilon_r = \ln\frac{d_f}{d_0} = -\frac{\varepsilon_z}{2}$$
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_z - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_z \qquad (1.3.1)$$

em que A_0 e A_f são as áreas das secções transversais do varão antes e após deformação plástica.



Como a redução de secção r em cada operação de extrusão directa é igual a 10% então o quociente A_f/A_0 em cada uma destas operações vale,

$$r = \frac{A_0 - A_f}{A_0} = 0.1 \Leftrightarrow \frac{A_f}{A_0} = 0.9 \tag{1.3.2}$$

Atendendo ao facto que as três operações de extrusão se realizam em sequência, o quociente entre as áreas final e inicial da secção transversal do varão determina-se através de (em que, a área final de uma operação é a área inicial da operação seguinte),

$$\left(\frac{A_f}{A_0}\right)_{global} = \left(\frac{A_f}{A_{f2}}\right)_{3^a op} \times \left(\frac{A_{f2}}{A_{f1}}\right)_{2^a op} \times \left(\frac{A_{f1}}{A_0}\right)_{1^a op} = 0.9 \times 0.9 \times 0.9 = 0.729 \tag{1.3.3}$$

e, portanto, a extensão efectiva no final do processo é igual a,

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_z = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right)_{global} = \ln\left(\frac{1}{0.729}\right) = 0.316 \tag{1.3.4}$$

b) Para obter a relação entre o comprimento final e inicial do varão escreve-se a conservação de volume característica da deformação plástica dos materiais metálicos,

$$A_0 l_0 = A_f l_f \Leftrightarrow \frac{l_f}{l_0} = \frac{A_0}{A_f} \tag{1.3.5}$$

e substitui-se o quociente entre as áreas inicial e final da secção transversal pelo valor obtido em (1.3.3),

$$l_f = \left(\frac{1}{0.729}\right) l_0 = 1.37 \times l_0 \tag{1.3.6}$$

c) A extensão nominal e no final da operação de extrusão calcula-se a partir da relação entre os valores verdadeiros e nominais de extensão,

$$e = \exp^{\bar{\varepsilon}} - 1 = \exp^{0.316} - 1 = 0.37 \tag{1.3.7}$$

d) A extensão no final da operação de extrusão foi calculada em (1.3.4) da forma a seguir indicada,

$$\bar{\varepsilon} = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right)_{global} = 0.316 \tag{1.3.8}$$

Tendo em consideração o valor anterior e aplicando logaritmos sobre a expressão (1.3.3), escrita em função do inverso dos rácios, obtém-se,

$$\bar{\varepsilon} = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right)_{global} = \ln\left(\frac{A_{f2}}{A_f}\right)_{3^a op} + \ln\left(\frac{A_{f1}}{A_{f2}}\right)_{2^a op} + \ln\left(\frac{A_0}{A_{f1}}\right)_{1^a op} = 3 \times \ln\left(\frac{1}{0.9}\right) = 0.316 \tag{1.3.9}$$

O resultado obtido permite verificar que as extensões verdadeiras são aditivas. Esta propriedade das extensões verdadeiras não se aplica às extensões nominais que não são aditivas.

Problema 1.4

Um provete cilíndrico com um comprimento inicial de referência igual a 50 mm e com 13 mm de diâmetro é submetido a uma força de tracção uniaxial igual a 50 kN. Admitindo que a deformação plástica resultante da aplicação de força é uniforme e que o comprimento de referência do provete em carga é igual a 64 mm, determine:

a) A tensão e a extensão nominais.

b) A tensão e a extensão verdadeiras.

c) O diâmetro do provete em carga.

Resolução

a) No instante em que o provete está submetido a uma força de tracção uniaxial $F = 50000$ N, a tensão nominal S [1] e a extensão nominal e valem, respectivamente,

$$S = \frac{F}{A_0} = \frac{F}{\pi \frac{d_0^2}{4}} = \frac{50000}{\pi \frac{13^2}{4}} = 376.7 \text{ MPa}$$
$$e = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{i_0} = \frac{64 - 50}{50} = 0.28 = 28\% \qquad (1.4.1)$$

b) Para se proceder ao cálculo da tensão verdadeira em carga σ é necessário conhecer o valor da área da secção transversal do provete no instante em que o comprimento de referência for igual a 64 mm. Atendendo à conservação de volume ($l_0 A_0 = lA$) da deformação plástica dos materiais metálicos, a área da secção resistente neste instante é igual a,

$$A = \frac{l_0 A_0}{l} = \frac{50 \times \pi \frac{13^2}{4}}{64} = 103.7 \text{ mm}^2 \qquad (1.4.2)$$

e, portanto, os valores verdadeiros de tensão σ e extensão ε são os seguintes,

[1] Neste livro adopta-se a seguinte notação; S é a tensão nominal e σ é a tensão verdadeira, embora na generalidade dos capítulos do livro as quantidades nominais sejam preteridas em função das quantidades verdadeiras.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{l_0 A_0}{l}} = \frac{50000}{103.7} = 482.2 \text{ MPa}$$
$$\varepsilon = \int_{i_0}^{l} \frac{dl}{l} = ln \frac{l}{l_0} = ln \frac{64}{50} = 0.247 \qquad (1.4.3)$$

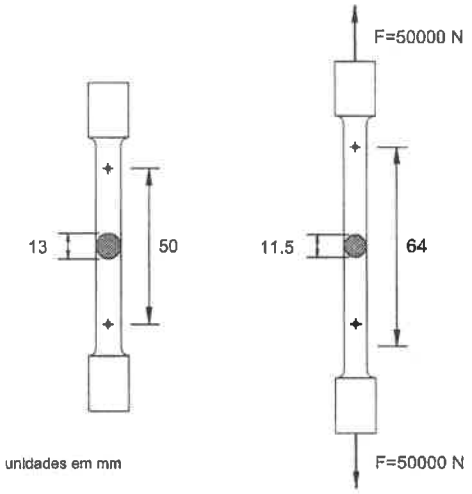
Estes valores podiam, alternativamente, ter sido obtidos por intermédio das relações entre os valores verdadeiros e nominais de tensão e extensão,

$$\sigma = S(1+e) = 376.7 \times (1 + 0.28) = 482.2 \text{ MPa}$$
$$\varepsilon = \ln(1+e) = \ln(1 + 0.28) = 0.247 \qquad (1.4.4)$$

c) O diâmetro do provete em carga obtém-se a partir da conservação de volume. Como na alínea anterior a área da secção resistente do provete $A = 103.7$ mm^2, então,

$$A = \pi \frac{d^2}{4} \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 11.5 \text{ mm} \qquad (1.4.5)$$

A figura seguinte procede à representação da geometria do provete no instante inicial e no instante em que se encontra submetido a uma força de tracção $F = 50$ kN.



Problema 1.5

Durante o ensaio de tracção uniaxial de um provete cilíndrico de uma liga de magnésio com um diâmetro $d_0 = 12$ mm e um comprimento de referência $l_0 = 30$ mm foram registados os seguintes valores de força e deslocamento,

Força F (kN)	Deslocamento Δl (mm)
0	0
5	0.0296
10	0.0592
15	0.0888
20	0.15
25	0.51
26.5	0.90
27 (força máxima)	1.50
26.5	2.10
25 (fractura)	2.61

No instante de fractura o comprimento de referência é igual a 32.61 mm e o seu diâmetro é igual a 11.74 mm.

a) Proceda à representação gráfica da evolução da força com o deslocamento e da evolução da tensão nominal com a extensão nominal.

b) Determine a tensão limite convencional de elasticidade a 0.2%, $S_{0.2}$.

c) Determine a tensão (nominal) de rotura.

d) Determine o módulo de elasticidade da liga de magnésio.

e) Determine a extensão nominal após fractura.

f) Determine o coeficiente de estricção (ou de redução de área).

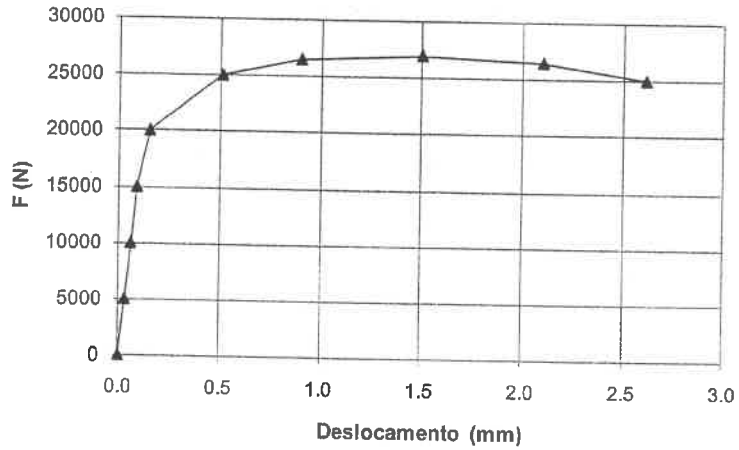
g) Indique a tensão nominal na fractura.

h) Determine a tensão verdadeira na fractura.

i) Determine o módulo de resiliência.

Resolução

a) A representação gráfica da evolução da força com o deslocamento é a seguinte.



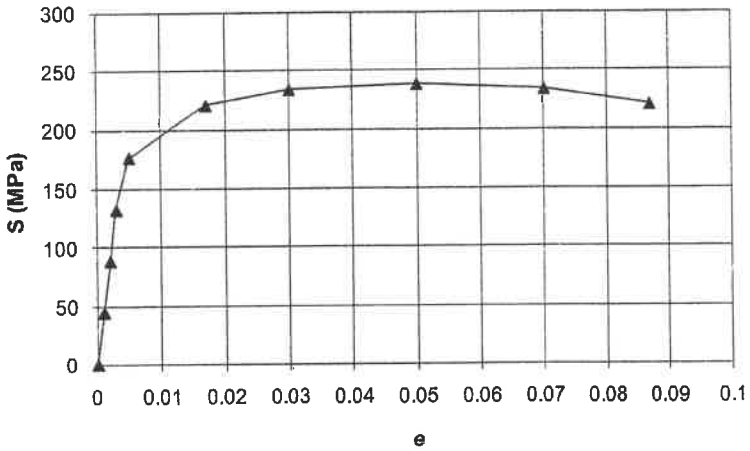
O cálculo dos valores nominais de tensão S e extensão e efectua-se com base na geometria inicial do provete e nos valores de força F e deslocamento Δl que foram sendo registados durante o ensaio (ver tabela seguinte),

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta l}{30} \qquad S = \frac{F}{A_0} = \frac{4F}{\pi d_0^2} = \frac{4F}{\pi \times 12^2} \tag{1.5.1}$$

e	S (MPa)
0.000	0.00
0.001	44.21
0.002	88.42
0.003	132.63
0.005	176.84
0.017	221.05
0.030	234.31
0.050	238.73
0.070	234.31
0.087	221.05

0.087	221.05

A representação gráfica dos valores incluídos na tabela anterior (curva tensão nominal - extensão nominal da liga de magnésio) é a seguinte,



b) O valor da tensão limite convencional de elasticidade a 0.2% ($S_{0.2}$) determina-se através da intersecção da curva tensão nominal - extensão nominal com a recta paralela à zona elástica que passa pela abcissa $e = 0.002$. A determinação da inclinação da zona linear elástica pode ser efectuada considerando a linha recta que contém os quatro primeiros registos experimentais do ensaio de tracção uniaxial,

$$S = 44807 \times e \quad \text{MPa} \tag{1.5.2}$$

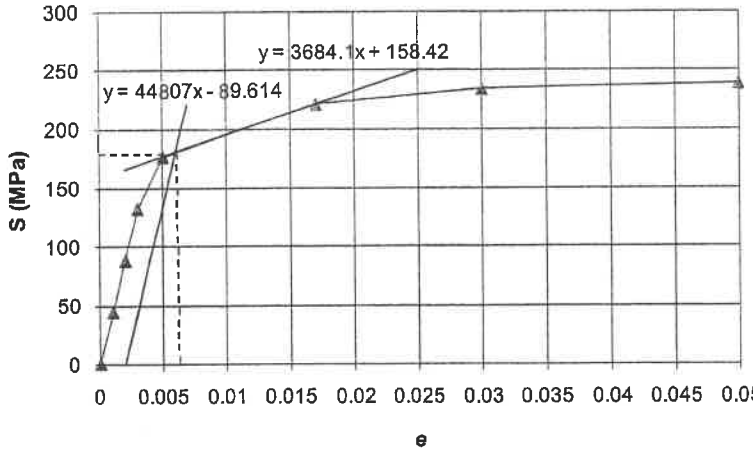
A recta paralela à zona elástica que passa pela abcissa $e = 0.002$ é,

$$S = 44807 \times (e - 0.002) = 44807 \times e - 89.614 \quad \text{MPa} \tag{1.5.3}$$

e, de acordo com a figura seguinte, esta recta intersecta curva tensão nominal - extensão nominal entre o quinto e o sexto registos experimentais do ensaio de tracção uniaxial, pelos quais passa a recta,

$$S = 3684.1 \times e + 158.42 \quad \text{MPa} \tag{1.5.4}$$

A intersecção das rectas (1.5.3) e (1.5.4) permite obter o valor da tensão limite convencional de elasticidade $S_{0.2} = 180.6$ MPa.



c) A tensão nominal de rotura corresponde à tensão no instante em que se regista a força máxima do ensaio de tracção uniaxial. O seu valor pode ser obtido combinando a informação da tabela que é fornecida no enunciado do problema com a tabela da alínea a),

$$S_r = 238.73 \text{ MPa} \tag{1.5.5}$$

d) O módulo de elasticidade é o declive da recta (1.5.2),

$$E = S/e = 44807 \text{ MPa} = 44.8 \text{ GPa} \tag{1.5.6}$$

e) A extensão nominal após fractura e_f calcula-se a partir do valor do comprimento de referência após fractura l_f e do valor do comprimento de referência no inicio do ensaio l_0,

$$e_f = \frac{l_f - l_0}{l_0} = \frac{32.61 - 30}{30} = 0.087 = 8.7\% \qquad (1.5.7)$$

f) O coeficiente de estricção (ou coeficiente de redução de área) calcula-se através dos valores das áreas das secções transversais do provete no início do ensaio A_0 e no instante de fractura A_f,

$$q = \frac{A_0 - A_f}{A_0} = \frac{{d_0}^2 - {d_f}^2}{{d_0}^2} = \frac{12^2 - 11.74^2}{12^2} = 4.3\% \qquad (1.5.8)$$

g) A tensão nominal no instante de fractura (ou colapso) foi calculada na alínea a),

$$S = 221.05 \text{ MPa} \qquad (1.5.9)$$

h) A tensão verdadeira na fractura determina-se através do quociente entre a força e área da secção transversal do provete no instante de fractura,

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{25000}{\pi\left(\frac{11.74}{2}\right)^2} = 230.9 \text{ MPa} \qquad (1.5.10)$$

Para obter a tensão verdadeira na fractura não se pode recorrer à relação existente entre os valores verdadeiros e nominais de tensão $\sigma = S(1+e)$ na medida em que a fractura ocorre após estricção e, portanto, quando a deformação plástica já não é uniforme.

i) O módulo de resiliência corresponde à energia de deformação elástica por unidade de volume que é necessária para solicitar o material desde o inicio do ensaio até à tensão limite convencional de elasticidade $S_{0.2}$ e calcula-se da forma a seguir indicada,

$$U_R = \frac{(S_{0.2})^2}{2E} = \frac{(180.6)^2}{2 \times 44807.1} = 0.36 \text{ MJ/m}^3 \qquad (1.5.11)$$

Problema 1.6

O ensaio de tracção uniaxial de uma liga de alumínio permitiu obter os seguintes valores de tensão e extensão nominal,

S (MPa)	e
298	0.010
348	0.040

Estes valores foram obtidos em regime plástico e a tensão de rotura da liga de alumínio é igual a 420 MPa.

a) Proceda à determinação da equação tensão-extensão de Ludwik-Holloman $\sigma = k\varepsilon^n$ e à sua representação gráfica.

b) Calcule o valor da tensão verdadeira correspondente a uma extensão nominal igual a 0.06.

c) Calcule o valor da tensão nominal correspondente a uma extensão nominal igual a 0.06.

Resolução

a) Como os registos experimentais do ensaio de tracção uniaxial foram obtidos antes do início da estricção, a deformação plástica é uniforme e podem ser utilizadas as seguintes relações para obter os valores verdadeiros de tensão e extensão (σ, ε) a partir dos respectivos valores nominais (S, e),

$$\begin{aligned} \sigma &= S(1+e) \\ \varepsilon &= \ln(1+e) \end{aligned} \qquad (1.6.1)$$

Substituindo os valores do enunciado do problema nas equações anteriores (1.6.1) obtêm-se os seguintes valores de tensão e extensão verdadeiras,

e	S (MPa)	ε	σ (MPa)
0.010	298	0.0099	300.98
0.040	348	0.039	361.92

A determinação da equação tensão-extensão de Ludwik-Holloman para a liga de alumínio obtém-se por aplicação de logaritmos,

$$\sigma = k\varepsilon^n \Leftrightarrow \ln\sigma = \ln k + n\cdot\ln\varepsilon \tag{1.6.2}$$

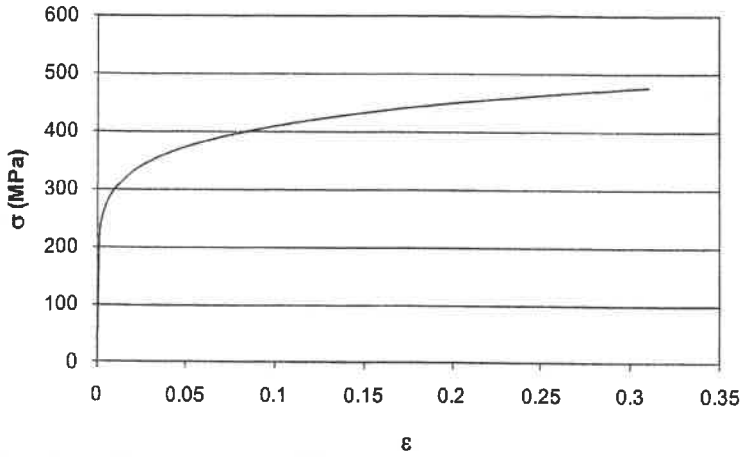
e substituição dos valores da tabela anterior,

$$\begin{cases} \ln 300.98 = \ln k + n\times\ln 0.0099 \\ \ln 361.92 = \ln k + n\times\ln 0.039 \end{cases} \tag{1.6.3}$$

$$\begin{cases} k = 559.3 \text{ MPa} \\ n = 0.1344 \end{cases}$$

O resultado final é o seguinte (ver também a representação gráfica),

$$\sigma = 559.3\,\varepsilon^{0,1344} \text{ MPa} \tag{1.6.4}$$



b) O valor da extensão verdadeira correspondente a uma extensão nominal $e = 0.06$ determina-se a partir da equação (1.6.1),

$$\varepsilon = \ln(1+0.06) = 0.058 \tag{1.6.5}$$

A tensão verdadeira obtém-se por substituição deste valor na equação de Ludwik-Holloman (1.6.4),

$$\sigma = 559.3\times(0.058)^{0.1344} = 381.7 \text{ MPa} \tag{1.6.6}$$

c) O valor da tensão nominal correspondente a uma extensão nominal $e = 0.06$ calcula-se por intermédio da relação entre as tensões verdadeira e nominal (1.6.1),

$$S = \frac{\sigma}{(1+e)} = \frac{381.7}{(1+0.06)} = 360 \text{ MPa} \tag{1.6.7}$$

Problema 1.7

O ensaio de tracção uniaxial de um material metálico permitiu obter os seguintes valores de tensão e extensão verdadeiras,

σ (MPa)	ε
200	0.05
300	0.15

a) Determine a equação tensão-extensão de Ludwik-Holloman $\sigma = K\varepsilon^n$ e proceda à sua representação gráfica.

b) Calcule o valor da tensão correspondente a uma extensão $\varepsilon = 0.3$.

c) Determine a equação tensão-extensão de Voce $\sigma = \sigma_{sat}\left[1-\exp\left(-A\varepsilon\right)\right]$ e proceda à sua representação gráfica.

d) Utilize a equação tensão-extensão de Voce para calcular o valor da tensão correspondente a uma extensão $\varepsilon = 0.3$.

Resolução

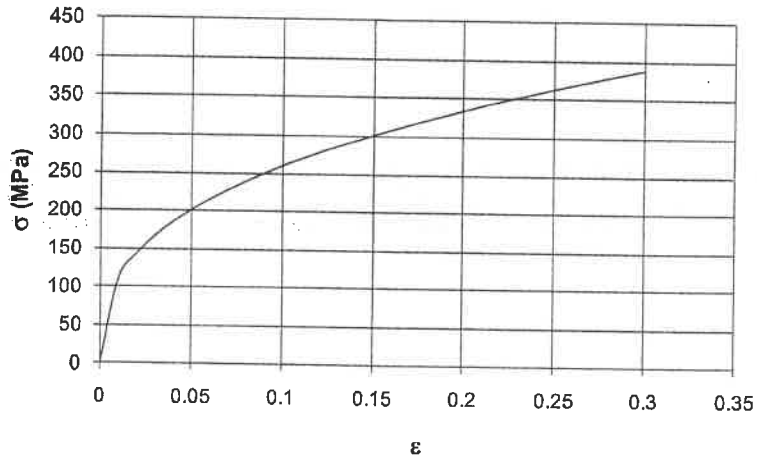
a) A determinação da equação tensão-extensão de Ludwik-Holloman obtém-se por intermédio de um procedimento análogo ao que foi efectuado no problema 1.6,

$$\sigma = k\varepsilon^n \Leftrightarrow \ln\sigma = \ln k + n\cdot\ln\varepsilon$$

$$\begin{cases}\ln 200 = \ln k + n\times\ln 0.05\\ \ln 300 = \ln k + n\times\ln 0.15\end{cases}\quad\begin{cases}k = 604.3\ \text{MPa}\\ n = 0.369\end{cases} \qquad (1.7.1)$$

$$\sigma = 604.3\,\varepsilon^{0.369}\ \text{MPa}$$

A representação gráfica da equação tensão-extensão de Ludwik-Holloman encontra-se disponível na figura seguinte,



b) A determinação da tensão correspondente à extensão $\varepsilon = 0.3$ efectua-se por intermédio da equação (1.7.1), obtendo-se,

$$\sigma = 604.3\,(0.3)^{0.369} = 387.5\ \text{MPa} \qquad (1.7.2)$$

c) Para determinar a equação tensão-extensão de Voce consideram-se os dois pontos que são fornecidos no enunciado do problema,

$$\begin{cases}\sigma_1 = \sigma_{sat}\left[1-\exp\left(-A\varepsilon_1\right)\right]\\ \sigma_2 = \sigma_{sat}\left[1-\exp\left(-A\varepsilon_2\right)\right]\end{cases}\Rightarrow\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_{sat}\left[1-\exp\left(-A\varepsilon_1\right)\right]}{\sigma_{sat}\left[1-\exp\left(-A\varepsilon_2\right)\right]} \qquad (1.7.3)$$

Substituindo valores na equação anterior, obtém-se,

$$\frac{300}{200} = \frac{1-\exp\left(-A\times 0.15\right)}{1-\exp\left(-A\times 0.05\right)} \Leftrightarrow\ A = 20.1\ \text{MPa} \qquad (1.7.4)$$

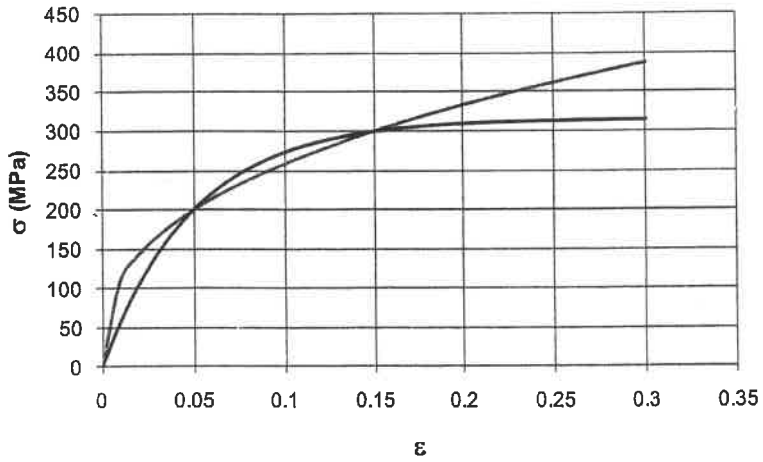
e,

$$300 = \sigma_{sat}\left[1-\exp\left(-20.1\times 0.15\right)\right] \Leftrightarrow\ \sigma_{sat} = 315.5\ \text{MPa} \qquad (1.7.5)$$

Nestas condições, a equação tensão-extensão de Voce escreve-se da forma a seguir indicada,

$$\sigma = 315.5\,[1-\exp(-20.1\times\varepsilon)]\ \text{MPa} \qquad (1.7.6)$$

A figura seguinte procede a uma comparação entre as curvas tensão-extensão que resultam das equações de Ludwik-Holloman (cinzento) e Voce (preto). Chama-se à atenção para o facto das curvas passarem pelos dois pontos experimentais do enunciado do problema.



d) A estimativa da tensão correspondente à extensão $\varepsilon = 0.3$ de acordo com a equação de Voce é a seguinte,

$$\sigma = 315.5\,[1-\exp(-20.1\times 0.30)] = 314.74\ \text{MPa} \qquad (1.7.7)$$

Problema 1.8

Um material frágil com comportamento elasto-perfeitamente plástico possui um módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, uma tensão limite de elasticidade $\sigma_e = 1200$ MPa e uma extensão verdadeira na fractura (tracção uniaxial) $\varepsilon_f = 0.01$.

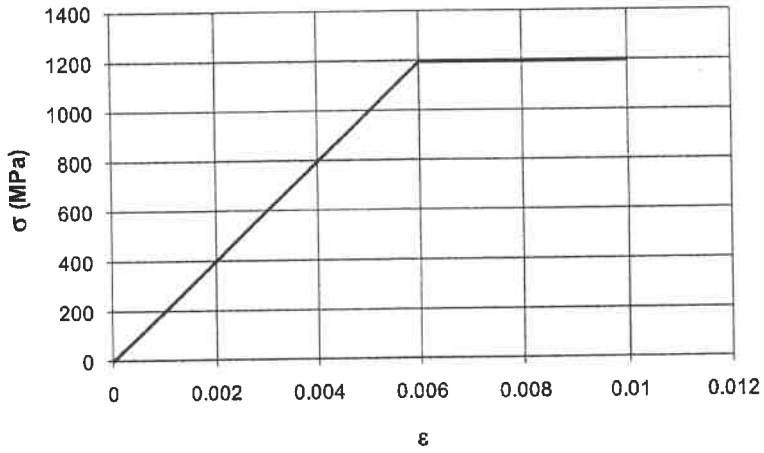
a) Determine o valor do módulo de resiliência.

b) Determine o valor do módulo de tenacidade.

Resolução

a) O módulo de resiliência U_R representa a energia de deformação elástica por unidade de volume e corresponde ao valor da área que se encontra situada por baixo da curva tensão-extensão em regime elástico,

$$U_R = \frac{\sigma_e\varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma_e^2}{2E} = \frac{(1200)^2}{2\times 200\times 10^3} = 3.6\ \text{MPa} \qquad (1.8.1)$$



b) O módulo de tenacidade U_T representa a energia por unidade de volume que um material pode suportar até à fractura e corresponde ao valor da área situada por baixo da curva tensão-extensão até à fractura. Nestas condições, o módulo de tenacidade pode calcular-se através da soma das áreas situadas por baixo da curva tensão-extensão no

domínio elástico e no domínio plástico até à fractura, em que a primeira parcela corresponde ao módulo de resiliência. Tendo em consideração a figura anterior obtém-se,

$$U_T = U_R + 1200 \times (0.01 - 0.006) = 8.4 \text{ MPa} \qquad (1.8.2)$$

Problema 1.9

O ensaio de tracção uniaxial de uma liga metálica permitiu obter a equação tensão-extensão (quantidades verdadeiras) $\sigma = 600(0.2 + \varepsilon)^{0.35}$ MPa.

a) Calcule o valor da velocidade de deformação nominal $\dot{e}$ sabendo que o ensaio de tracção foi realizado com uma velocidade constante $v = 5$ mm/min e que o comprimento de referência inicial do provete $l_0 = 30$ mm.

b) Calcule o valor da extensão verdadeira ε_r no ponto de instabilidade.

c) Calcule o módulo de tenacidade U_T do material admitindo que o provete de tracção rompe no ponto de instabilidade.

Resolução

a) A velocidade de deformação nominal calcula-se através de,

$$v = \frac{5}{60} = 0.083 \text{ mm/s} \qquad \dot{e} = \frac{v}{l_0} = \frac{0.083}{30} = 2.78 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1} \qquad (1.9.1)$$

b) A extensão verdadeira no ponto de instabilidade calcula-se através do método de Considére,

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma \qquad (1.9.2)$$

que permite obter o valor a seguir indicado no caso de uma lei de comportamento do tipo $\sigma = K(\varepsilon + \varepsilon_0)^n$,

$$Kn(\varepsilon_r + \varepsilon_0)^{n-1} = K(\varepsilon_r + \varepsilon_0)^n \Leftrightarrow \varepsilon_r = n - \varepsilon_0 = 0.35 - 0.2 = 0.15 \qquad (1.9.3)$$

c) O módulo de tenacidade U_T corresponde à área situada sob a curva tensão-extensão. Recorrendo às relações entre os valores verdadeiro e nominal de tensão e extensão obtém-se,

$$U_T = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma \, d\varepsilon = \int_0^{0.162} 600 \times (0.2 + \varepsilon)^{0.35} \, d\varepsilon = 57.12 \text{ MPa} \qquad (1.9.4)$$

Problema 1.10

Calcule as tensões de rotura verdadeira e nominal de um material metálico que apresenta uma relação entre tensão e extensão (quantidades verdadeiras) que pode ser expressa por intermédio da equação $\sigma = 700\,\varepsilon^{0.35}$ MPa.

Resolução

A tensão de rotura corresponde ao ponto de instabilidade plástica em tracção uniaxial calcula-se a partir do método de Considére,

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma \tag{1.10.1}$$

Substituindo a curva tensão verdadeira-extensão verdadeira do material na equação anterior obtém-se a extensão verdadeira no ponto de instabilidade,

$$n\,k\,\varepsilon_r^{n-1} = k\,\varepsilon_r^{n} \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_r = n = 0.35 \tag{1.10.2}$$

A tensão de rotura verdadeira obtém-se através de,

$$\sigma_r = 700(0.35)^{0.35} = 484.75 \text{ MPa} \tag{1.10.3}$$

Atendendo à relação entre os valores verdadeiros e nominais de tensão e extensão durante a deformação plástica uniforme (até ao início de estricção),

$$S = \frac{\sigma}{(1+e)} \text{ em que } e = e^{\varepsilon} - 1 \tag{1.10.4}$$

a tensão de rotura nominal vale,

$$S_r = \frac{\sigma_r}{e^{\varepsilon}} = \frac{484.75}{0.35} = 342 \text{ MPa} \tag{1.10.5}$$

Problema 1.11

Explique a razão pela qual o ensaio de tracção uniaxial apresenta instabilidade plástica enquanto que o ensaio de compressão uniaxial não apresenta.

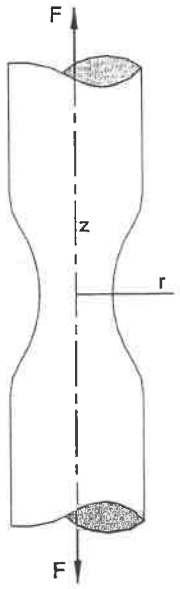
Resolução

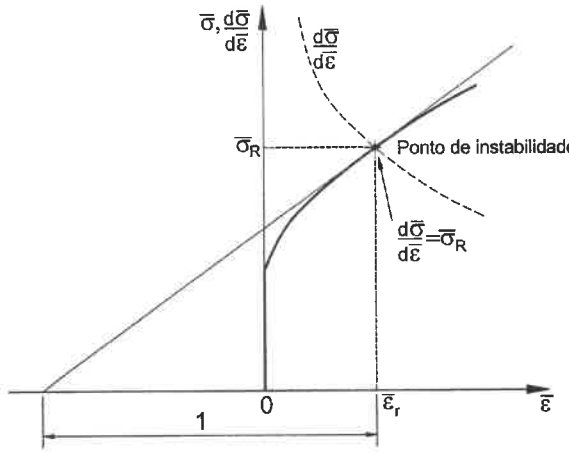
A condição de instabilidade plástica tem início quando o encruamento produzido por um incremento de deformação for compensado, ou melhor, anulado pelo 'amaciamento geométrico' resultante da redução uniforme da secção transversal do provete.

No caso do ensaio de tracção uniaxial a condição de instabilidade plástica ocorre no final da região de deformação plástica uniforme onde se verificam as seguintes igualdades,

$$\overline{\sigma} = \sigma_z \qquad \overline{\varepsilon} = \varepsilon_z = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \tag{1.11.1}$$

$$F = A\,\sigma_z = A_0\,\overline{\sigma}\exp^{-\overline{\varepsilon}}$$





e, corresponde, ao instante do ensaio de tracção em que se alcança a carga máxima,

$$dF = A_0\left(d\bar{\sigma}\exp^{-\bar{\varepsilon}} - \bar{\sigma}\exp^{-\bar{\varepsilon}}d\bar{\varepsilon}\right) = 0 \tag{1.11.2}$$

Reescrevendo a expressão anterior da forma a seguir indicada,

$$\frac{dF}{d\bar{\varepsilon}} = A_0\exp^{-\bar{\varepsilon}}\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} - \bar{\sigma}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \bar{\sigma} \tag{1.11.3}$$

pode concluir-se que a existência de instabilidade plástica em tracção uniaxial está associada à possibilidade da taxa de encruamento do material $d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon}$ igualar o valor da tensão do ensaio $\bar{\sigma}$ (ver figura anterior).

Procedendo de forma análoga para o ensaio de compressão uniaxial,

$$\begin{gathered}\bar{\sigma} = -\sigma_z \quad \bar{\varepsilon} = -\varepsilon_z = -\ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \\ F = A\sigma_z = -A_0\,\bar{\sigma}\exp^{\bar{\varepsilon}}\end{gathered} \tag{1.11.4}$$

e admitindo a possibilidade de se poder vir a registar um instante de força máxima, obtém-se,

$$\begin{gathered}dF = -A_0\left(d\bar{\sigma}\exp^{\bar{\varepsilon}} + \bar{\sigma}\exp^{\bar{\varepsilon}}d\bar{\varepsilon}\right) = 0 \\ \frac{dF}{d\bar{\varepsilon}} = -A_0\exp^{\bar{\varepsilon}}\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} + \bar{\sigma}\right) = 0\end{gathered} \tag{1.11.5}$$

Este resultado permite concluir que devido ao facto de (geralmente) $d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon} > 0$ e $\bar{\sigma} > 0$ não existem condições para se iniciar a instabilidade plástica no ensaio de compressão uniaxial de um material metálico com encruamento.

Problema 1.12

Um provete cilíndrico com 100 mm de diâmetro e 40 mm de altura é comprimido entre pratos de maior extensão que a peça, sem atrito, numa máquina universal de ensaios com uma velocidade constante $v = 0.1$ m/s.

Calcule as velocidades de deformação verdadeira e nominal para o instante de tempo em que o provete tem uma altura igual a 10 mm.

Resolução

A velocidade de deformação nominal $\dot{e}$ calcula-se através de,

$$\dot{e} = \frac{de}{dt} = \frac{\frac{dh}{h_0}}{dt} = \frac{1}{h_0}\frac{dh}{dt} = \frac{v}{h_0} = \frac{0.1\times10^3}{40} = 2.5\,s^{-1} \tag{1.12.1}$$

A velocidade de deformação verdadeira $\dot{\varepsilon}$ calcula-se através de,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\frac{dh}{h}}{dt} = \frac{1}{h}\frac{dh}{dt} = \frac{v}{h} = \frac{0.1\times10^3}{10} = 10\,s^{-1} \tag{1.12.2}$$

O resultado obtido em (1.12.2) poderia ter sido alternativamente determinado por intermédio da relação existente entre os valores verdadeiros e nominais de extensão,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v}{h} = \frac{h_0}{h}\frac{de}{dt} = \frac{1}{1+e}\frac{de}{dt} = \frac{\dot{e}}{1+e} \tag{1.12.3}$$

Como a extensão nominal vale,

$$e = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{h-h_0}{h_0} = \frac{10-40}{40} = -0.75 = -75\% \tag{1.12.4}$$

então, a velocidade de deformação verdadeira $\dot{\varepsilon}$ vale,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{e}}{1+e} = \frac{2.5}{1-0.75} = 10\,s^{-1} \tag{1.12.5}$$

Problema 1.13

O ensaio de compressão de uma liga de zinco permitiu obter um coeficiente de sensibilidade à velocidade de deformação $m=0.07$. Determine o quociente entre as tensões que resultam de duas deformações plásticas realizadas com velocidades de deformação muito diferentes, $\dot{\varepsilon}_1 = 10^{-3}\ s^{-1}$ e $\dot{\varepsilon}_2 = 10^{3}\ s^{-1}$.

Resolução

Sabendo que uma lei de comportamento tensão-velocidade de deformação pode ser escrita por intermédio de uma equação do tipo,

$$\sigma = C(\dot{\varepsilon})^m \qquad (1.13.1)$$

o quociente entre as tensões σ_1 e σ_2 que resultam de duas operações de deformação plásticas realizadas com velocidades de deformação $\dot{\varepsilon}_1$ e $\dot{\varepsilon}_2$ muito diferentes, é igual a,

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{C\left(1\times10^{3}\right)^{0.07}}{C\left(1\times10^{-3}\right)^{0.07}} = 2.63 \qquad (1.13.2)$$

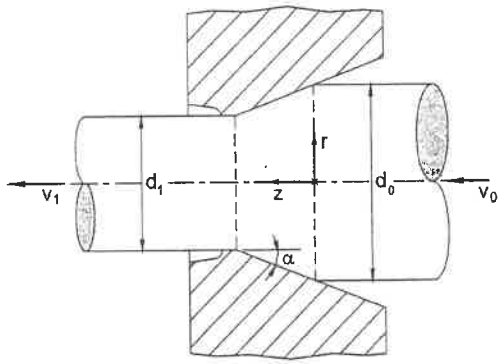
É importante salientar que no caso, por exemplo, das operações de deformação plástica a frio o coeficiente de sensibilidade à velocidade de deformação $m\cong0.03$ e os valores extremos característicos de velocidade de deformação variam numa gama mais apertada $\dot{\varepsilon} = 1-10^{2}\ s^{-1}$. Nestas condições o quociente entre as tensões σ_1 e σ_2 viria igual a,

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{C\left(1\times10^{2}\right)^{0.03}}{C(1\times1)^{0.03}} = 1.15 \qquad (1.13.3)$$

Este resultado permite compreender que a influência da sensibilidade à velocidade de deformação nas operações de deformação plástica a frio é pouco relevante em face de outros fenómenos como, por exemplo, o encruamento.

Problema 1.14

Determine a velocidade de deformação efectiva média no interior da região em deformação plástica em operações de extrusão ou trefilagem cilíndricas.



Resolução

Admitindo que as extensões $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ no interior da região em deformação plástica são principais (ver problema 1.2),

$$d\varepsilon_r = -\frac{dr}{r} \qquad d\varepsilon_\theta = -\frac{dr}{r} \qquad d\varepsilon_z = -(d\varepsilon_r + d\varepsilon_\theta) = \frac{2dr}{r} \qquad (1.14.1)$$

o incremento de extensão efectiva $d\bar{\varepsilon}$ calcula-se da forma a seguir indicada,

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(d\varepsilon_r - d\varepsilon_\theta)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_\theta)^2 + (d\varepsilon_r - d\varepsilon_z)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2dr}{r} \qquad (1.14.2)$$

Atendendo à conservação de volume no interior da região em deformação plástica,

$$\pi r_0^2 v_0 = \pi r^2 \frac{dz}{dt} \text{ em que } r_0 = \frac{d_0}{2} \qquad (1.14.3)$$

e à relação geométrica,

$$z=(r_0-r)\cot\alpha \qquad (1.14.4)$$

obtém-se o valor instantâneo da velocidade de deformação efectiva $\dot{\bar{\varepsilon}}$ na região em deformação plástica (apresenta-se o valor em módulo),

$$\dot{\bar{\varepsilon}}=\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}=\frac{2dr}{r\,dt}=\frac{2\tan\alpha}{r}\times\frac{dz}{dt}=2\tan\alpha\left(\frac{r_0^2}{r^3}\right)v_0 \qquad (1.14.5)$$

A velocidade de deformação efectiva média $\dot{\bar{\varepsilon}}_{media}$ no interior da região em deformação plástica é dada por,

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{media}=\frac{1}{z}\int_0^z\dot{\bar{\varepsilon}}\,dz=\frac{\tan\alpha}{(r_0-r_1)}2\,r_0^2\,v_0\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^3}=\frac{(r_0+r_1)\tan\alpha}{r_1^2}v_0 \qquad (1.14.6)$$

em que r_0 e r_1 são, respectivamente, o raio de entrada e de saída da matriz, α é o ângulo de inclinação da matriz e v_0 é a velocidade de entrada do material na matriz.

Problema 1.15

Durante o ensaio de torção de um provete de um material metálico com um diâmetro $d_0 = 25$ mm e um comprimento de referência $l_0 = 450$ mm foram registados os seguintes valores do momento de torção M_t em função do número de ¼ de voltas,

M_t (N.m)	Nº de 1/4 voltas
0	0
639.4	1
700.56	2
755.048	3
789.52	4
813.984	5
845.12	7
861.8	9
886.82	12
900.72	15
920.18	18
947.98	24
976.336	32
1001.912	38
1023.04	39

Admita que o módulo de elasticidade do material $E = 100$ GPa e que a deformação plástica tem início quando o momento e o ângulo de torção valem respectivamente 556 N.m e 10°.

a) Proceda à representação dos gráficos de variação do momento com o ângulo de torção e da tensão de corte com a distorção.

b) Determine a tensão limite de elasticidade em corte puro.

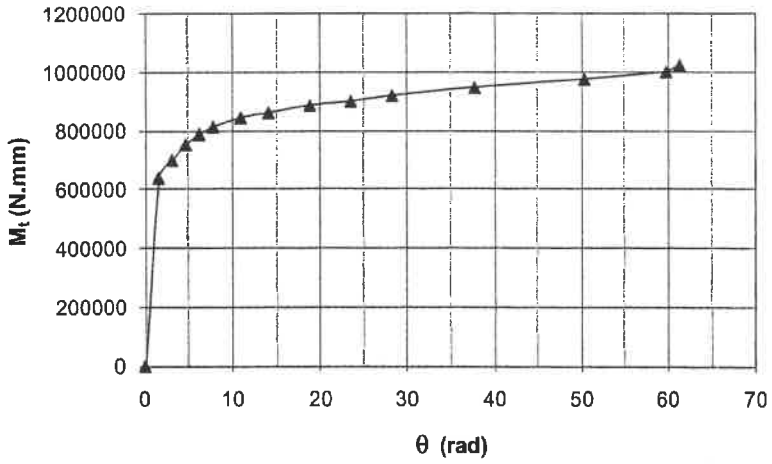
c) Determine a tensão de rotura em corte puro.

d) Determine o módulo de elasticidade transversal G.

e) Determine o coeficiente de Poisson ν

Resolução

a) A representação gráfica da evolução do momento de torção com o ângulo de torção obtém-se através dos valores experimentais que foram registados durante o ensaio tendo em consideração que ¼ de volta corresponde a $\pi/2$ radianos.



Sabendo que a distorção no ensaio de torção se calcula a partir do ângulo de torção θ , do diâmetro exterior d e do comprimento do provete l ,

$$\gamma_{\theta z} = \tan\phi = \frac{\theta d}{2l} \tag{1.15.1}$$

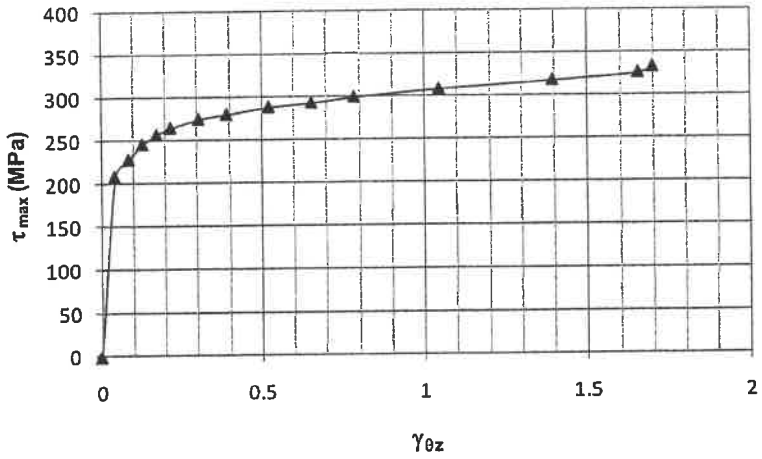
e que a relação entre a tensão de corte máxima τ_{max} que ocorre na periferia do varão e o momento de torção M_{te} é escrita da forma a seguir indicada,

$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot d}{2 I_p} \qquad I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$
$$\tau_{max} = \frac{16\, M_t}{\pi\, d^3} \tag{1.15.2}$$

em que I_p é o momento polar de inércia da secção, obtêm-se os seguintes valores para a distorção e para a tensão de corte máxima na periferia do varão,

$\gamma_{\theta z}$	τ_{max} (N/mm^2)
0.000	0.00
0.044	208.41
0.087	228.35
0.131	246.11
0.175	257.34
0.218	265.32
0.305	275.47
0.393	280.90
0.524	289.06
0.654	293.59
0.785	299.93
1.047	308.99
1.396	318.24
1.658	326.57
1.702	333.46

A figura seguinte apresenta a variação da tensão de corte máxima τ_{max} na periferia do varão com a distorção $\gamma_{\theta z}$,



b) Sabendo que a deformação plástica tem início quando o momento de torção aplicado é $M_t = 556$ N.m então, de acordo com a relação (1.15.2), a tensão limite de elasticidade do material em corte puro vale,

$$k = \frac{16M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \times 556000}{\pi \times 25^3} = 181.2 \text{ MPa} \qquad (1.15.3)$$

c) A tensão de rotura em corte puro (ou módulo de rotura) é a tensão de corte para a qual o momento de torção é máximo $M_{t\,max}$,

$$\tau_r = \frac{12M_{t\,max}}{\pi d^3} = \frac{12 \times 1023040}{\pi \times 25^3} = 250.1 \text{ MPa} \qquad (1.15.4)$$

d) O módulo de elasticidade transversal G calcula-se através da proporcionalidade existente entre a tensão de corte e a distorção no domínio elástico,

$$G = \frac{M_{te}\, l}{I_p\, \theta} = \frac{32\, M_{te}\, l}{\pi d^4 \theta} = \frac{32 \times 556000 \times 450}{\pi \times 25^4 \times \frac{10\,\pi}{180}} = 37.39 \text{ GPa} \qquad (1.15.5)$$

e) O coeficiente de Poisson ν calcula-se a partir da relação entre o módulo de elasticidade transversal G e o módulo de elasticidade longitudinal E,

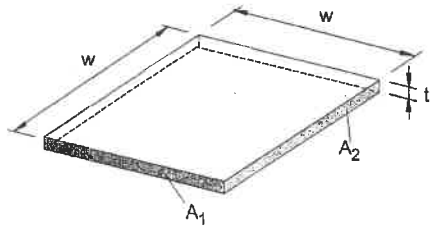
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (1.15.6)$$

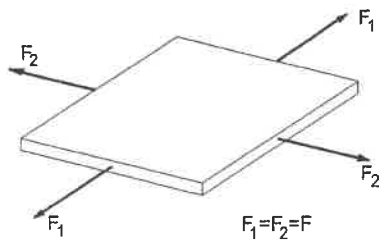
obtendo-se,

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{100}{2 \times 37.39} - 1 = 0.3373 \qquad (1.15.7)$$

Problema 1.16

Determine o valor da extensão efectiva no ponto de instabilidade para um ensaio biaxial simétrico de tracção de uma chapa fina com dimensões w iguais segundo o comprimento e a largura (geometria quadrada). Admita que as forças aplicadas F são iguais em ambas as direcções e que a lei de comportamento tensão-extensão verdadeira do material é do tipo $\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n$.





Resolução

A instabilidade plástica ocorre quando se alcança a força máxima do ensaio,

$$dF = 0 \qquad (1.16.1)$$

No caso do ensaio biaxial simétrico de tracção da chapa fina que se encontra representada na figura $F_1 = F_2 = F$,

$$F = F_1 = F_2 = \sigma_1 . A_1 = \sigma_2 . A_2 \qquad (1.16.2)$$

a condição de instabilidade plástica (1.16.1) escreve-se da forma a seguir indicada,

$$dF = d\sigma_1 . A_1 + \sigma_1 . dA_1 = 0 \qquad (1.16.3)$$

e, portanto, a instabilidade plástica inicia-se quando,

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = -\frac{dA_1}{A_1} = d\varepsilon_1 \Leftrightarrow \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = d\varepsilon_1 \qquad (1.16.4)$$

Como a lei de comportamento mecânico do material é expressa em função dos valores efectivos de extensão $\bar{\varepsilon}$ e tensão $\bar{\sigma}$ é necessário calcular esses valores para o estado biaxial simétrico de tracção de uma chapa fina. Considerando a tensão efectiva do critério de plasticidade de von Mises e $\sigma_1 = \sigma_2$ e $\sigma_3 = 0$, obtém-se,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1)^2+(\sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sigma_1 = \sigma_2\end{aligned} \tag{1.16.5}$$

Atendendo à conservação de volume dos materiais metálicos $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 0$ e à simetria do carregamento no ensaio biaxial simétrico de tracção de uma chapa fina pode-se escrever a seguinte relação entre as componentes principais da extensão,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_3 = -2\varepsilon_1 = -2\varepsilon_2 \tag{1.16.6}$$

A expressão anterior (1.16.6) poderia, alternativamente, ter sido obtida por intermédio das equações constitutivas de Levy-Mises,

$$\begin{aligned}d\varepsilon_1 &= \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right] = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\frac{1}{2}\sigma_1\right] \\ d\varepsilon_2 &= \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right] = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\frac{1}{2}\sigma_1\right] = d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 &= \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_3-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right] = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[-\sigma_1\right] = -2d\varepsilon_1 = -2d\varepsilon_2\end{aligned} \tag{1.16.7}$$

Em face de (1.16.6) ou (1.16.7) o incremento de extensão efectivo $d\bar{\varepsilon}$ é igual a,

$$\begin{aligned}d\bar{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(d\varepsilon_1-d\varepsilon_2)^2+(d\varepsilon_2-d\varepsilon_3)^2+(d\varepsilon_1-d\varepsilon_3)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(3d\varepsilon_1)^2+(3d\varepsilon_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 2d\varepsilon_1 = 2d\varepsilon_2\end{aligned} \tag{1.16.8}$$

Os valores efectivos de tensão (1.16.5) e extensão (1.16.8) permitem escrever as seguintes relações,

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \quad \text{e} \quad d\bar{\varepsilon} = 2d\varepsilon_1 \tag{1.16.9}$$

Substituindo as igualdades (1.16.9) na condição de instabilidade plástica (1.16.4) obtém-se a seguinte relação,

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = d\varepsilon_1 \;\Leftrightarrow\; \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{\sigma}}{2} \tag{1.16.10}$$

e, substituindo a lei de comportamento do material $\bar{\sigma} = k\bar{\varepsilon}^n$ na equação anterior, obtém-se o valor da extensão efectiva no ponto de instabilidade para o ensaio biaxial simétrico de tracção da chapa fina,

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = nk\bar{\varepsilon}^{n-1} \;\Leftrightarrow\; nk\bar{\varepsilon}^{n-1} = \frac{k\bar{\varepsilon}^n}{2} \;\Leftrightarrow\; \bar{\varepsilon} = 2n \tag{1.16.11}$$

O valor obtido é o dobro do expoente de encruamento n da lei de comportamento mecânico do material. Este valor é igualmente o dobro do calculado no ensaio de tensão uniaxial ($\varepsilon = \bar{\varepsilon} = n$) pelo que se conclui que, muito embora se trate do mesmo material, a instabilidade plástica é função do estado de tensão imposto.

O resultado obtido permite também concluir que no ensaio biaxial simétrico de tracção o início da estricção ocorre mais tarde e com um nível de deformação superior ao que se verifica no ensaio de tracção uniaxial.

Problema 1.17

Estabeleça a condição de início da instabilidade plástica para uma esfera de parede fina sujeita a pressão interna.

Resolução

Numa esfera de parede fina sujeita a pressão interna a tensão normal e as tensões de corte que actuam na espessura da parede podem ser desprezadas. A aplicação de pressão interna p traduz-se em tensões normais segundo as direcções θ e φ (num sistema de coordenadas esférico) que, por razões de simetria, são direcções principais,

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2h} \qquad \sigma_3 = \sigma_r = 0 \tag{1.17.1}$$

Os símbolos r e h designam, respectivamente, o raio e a espessura da parede da esfera. Em face da equação (1.17.1) a tensão efectiva $\overline{\sigma}$ escreve-se da forma a seguir indicada,

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]} = \sigma_\theta \tag{1.17.2}$$

As equações de Levy-Mises permitem obter uma relação análoga para o incremento de extensão efectivo,

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r &= \frac{d\overline{\varepsilon}}{\overline{\sigma}}\left(\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\theta+\sigma_\varphi)\right) = -d\overline{\varepsilon} \\ d\varepsilon_\theta &= \frac{d\overline{\varepsilon}}{\overline{\sigma}}\left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\varphi)\right) = -\frac{d\overline{\varepsilon}}{2} \\ d\varepsilon_\varphi &= \frac{d\overline{\varepsilon}}{\overline{\sigma}}\left(\sigma_\phi - \frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\theta)\right) = -\frac{d\overline{\varepsilon}}{2} \end{aligned} \tag{1.17.3}$$

que é utilizada para relacionar o raio r_0 e a espessura h_0 iniciais da parede da esfera com os valores após deformação,

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{\overline{\varepsilon}}{2} = \ln\frac{2\pi r}{2\pi r_0} \quad &\Leftrightarrow \quad r = r_0 \exp^{\frac{\overline{\varepsilon}}{2}} \\ \varepsilon_r = -\overline{\varepsilon} = \ln\frac{h}{h_0} \quad &\Leftrightarrow \quad h = h_0 \exp^{-\overline{\varepsilon}} \end{aligned} \tag{1.17.4}$$

Substituindo (1.17.4) em (1.17.1) obtém-se,

$$p = \frac{2h\overline{\sigma}}{r} = \frac{2h_0 \exp^{-\overline{\varepsilon}}\,\overline{\sigma}}{r_0 \exp^{\frac{\overline{\varepsilon}}{2}}} \tag{1.17.5}$$

que, impondo a condição de pressão máxima no ponto de instabilidade plástica $dp=0$, permite obter o resultado pretendido,

$$\frac{d\overline{\sigma}}{d\overline{\varepsilon}} = \frac{3}{2}\overline{\sigma} \tag{1.17.6}$$

2. PLASTICIDADE

Este capítulo apresenta um conjunto de problemas sobre os conceitos básicos da teoria da plasticidade que são indispensáveis à compreensão dos processos tecnológicos que envolvem deformação plástica de materiais metálicos.

Problema 2.1

O estado de tensão num ponto é representado pelo seguinte tensor das tensões,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

a) Determine as tensões e as direcções principais no ponto.

b) Proceda à representação do estado de tensão no plano de Möhr e determine a tensão de corte máxima τ_{max}.

c) Determine os invariantes do tensor das tensões.

d) Determine a tensão média σ_m e proceda à decomposição do tensor das tensões na soma do tensor hidrostático com o tensor desviador.

e) Determine o vector tensão S_n num plano cuja normal é definida por intermédio do vector $n = \frac{2}{3} \cdot i + \frac{1}{3} \cdot j + \frac{2}{3} \cdot k$

f) Determine as tensões normal e de corte no plano octaedral.

Resolução

a) As tensões principais são os valores próprios do tensor das tensões e a sua determinação envolve a resolução da equação,

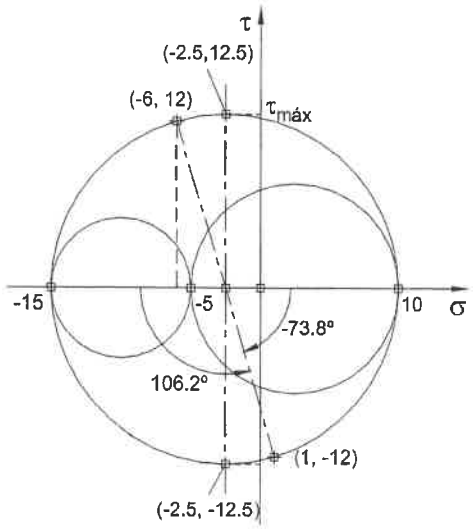
$$\left|\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -6-\lambda & -12 \\ 0 & -12 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ MPa} \qquad (2.1.1)$$

que dá origem a uma equação do 3º grau em λ, cujas raízes são as tensões principais,

$$(-5-\lambda)\left[(-6-\lambda)(1-\lambda)-(-12)^2\right]=0$$
$$-5\lambda^3-10\lambda^2+125\lambda+750=0 \quad \text{MPa} \qquad (2.1.2)$$
$$\lambda_1=10,\quad \lambda_2=-5,\quad \lambda_3=-15$$

De acordo com a convenção utilizada para a designação das tensões principais que envolve a ordenação por ordem decrescente de intensidade,

$$\sigma_1=10$$
$$\sigma_2=-5 \quad \text{MPa} \qquad (2.1.3)$$
$$\sigma_3=-15$$



(MPa)

Associada a cada uma destas tensões principais existe uma direcção principal cujos co-senos directores resultam da resolução dos seguintes sistemas de equações (problema de vectores próprios),

$$\begin{cases}\left(\sigma_{ij}-\lambda_i\delta_{ij}\right)\cdot n_i=0\\ cos^2\alpha_i+cos^2\beta_i+cos^2\gamma_i=1\end{cases} \quad i=1,2,3 \qquad (2.1.4)$$

Concretizando (2.1.4) para a direcção principal 1, obtém-se o sistema de equações,

$$\begin{cases}(\sigma_x-\sigma_1)a_{11}+\tau_{xy}a_{12}+\tau_{xz}a_{13}=0\\ \tau_{yx}a_{11}+(\sigma_y-\sigma_1)a_{12}+\tau_{yz}a_{13}=0\\ \tau_{zx}a_{11}+\tau_{zy}a_{12}+(\sigma_z-\sigma_1)a_{13}=0\\ a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1\end{cases} \qquad (2.1.5)$$

que, após substituição de valores,

$$\begin{cases}(-5-10)a_{11}+0\times a_{12}+0\times a_{13}=0\\ 0\times a_{11}+(-6-10)a_{12}+(-12)a_{13}=0\\ 0\times a_{11}+(-12)a_{12}+(1-10)a_{13}=0\\ a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-15\times a_{11}=0\\ -16\times a_{12}-12\times a_{13}=0\\ -12\times a_{12}-9\times a_{13}=0\\ a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1\end{cases} \qquad (2.1.6)$$

permite obter os co-senos directores entre a direcção principal 1 e os eixos (x, y, z),

$$a_{11}=0 \qquad \alpha_1=90°$$
$$a_{12}=-\frac{3}{5} \qquad \beta_1=126.9° \qquad (2.1.7)$$
$$a_{13}=\frac{4}{5} \qquad \gamma_1=36.9°$$

Utilizando o mesmo procedimento para a direcção principal 2,

$$\begin{cases}(-5+5)a_{21}+0\times a_{22}+0\times a_{23}=0\\ 0\times a_{21}+(-6+5)a_{22}+(-12)a_{23}=0\\ 0\times a_{21}+(-12)a_{22}+(1+5)a_{23}=0\\ a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\times a_{21}=0\\ -1\times a_{22}-12\times a_{23}=0\\ -12\times a_{22}+6\times a_{23}=0\\ a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1\end{cases} \qquad (2.1.8)$$

obtêm-se os co-senos directores entre a direcção principal 2 e os eixos (x, y, z),

$$a_{21}=1 \qquad \alpha_2=0°$$
$$a_{22}=0 \qquad \beta_2=90° \qquad (2.1.9)$$
$$a_{23}=0 \qquad \gamma_2=90°$$

Importa salientar que a determinação analítica dos co-senos directores para a direcção principal 2 poderia ter sido evitada na medida em que o eixo x é obrigatoriamente uma

direcção principal porque $\sigma_x = \sigma_2 = -5$ MPa e $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ MPa. Portanto, teria sido óbvio concluir-se que $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$ e $a_{23} = 0$.

Finalmente, utilizando o procedimento que tem vindo a ser seguido para a direcção principal 3,

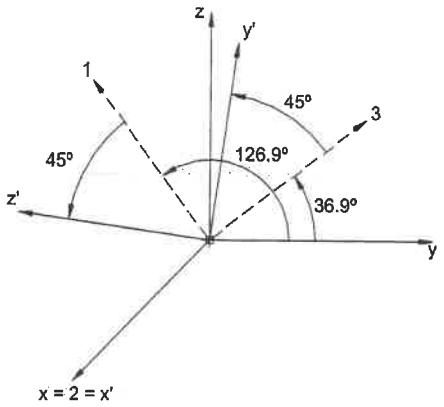
$$\begin{cases} (-5+15)a_{31} + 0 \times a_{32} + 0 \times a_{33} = 0 \\ 0 \times a_{31} + (-6+15)a_{32} + (-12)a_{33} = 0 \\ 0 \times a_{31} + (-12)a_{32} + (1+15)a_{33} = 0 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \times a_{31} = 0 \\ 9 \times a_{32} - 12 \times a_{33} = 0 \\ -12 \times a_{32} + 16 \times a_{33} = 0 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{cases} \quad (2.1.10)$$

obtêm-se os seguintes co-senos directores entre a direcção principal 3 e os eixos (x, y, z),

$$\begin{aligned} a_{31} &= 0 & \alpha_3 &= 90° \\ a_{32} &= \frac{4}{5} & \beta_3 &= 36.9° \\ a_{33} &= \frac{3}{5} & \gamma_3 &= 53.1° \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Em face do exposto, as direcções principais no ponto são as seguintes,

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \cdot i - \frac{3}{5} \cdot j + \frac{4}{5} \cdot k \\ n_2 &= 1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\ n_3 &= 0 \cdot i + \frac{4}{5} \cdot j + \frac{3}{5} \cdot k \end{aligned} \quad (2.1.12)$$



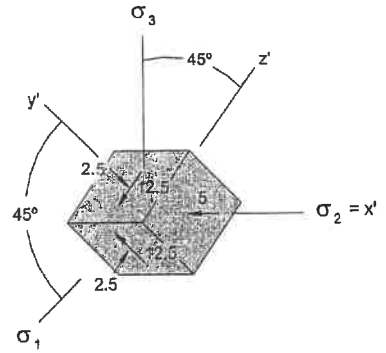
b) A tensão de corte máxima τ_{max} calcula-se a partir dos valores das tensões principais,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{10 - (-15)}{2} = 12.5 \text{ MPa} \quad (2.1.13)$$

A tensão de corte máxima τ_{max} actua num plano bissector aos planos onde estão aplicadas as tensões principais σ_1 e σ_3. A transformação de tensões entre o sistema de eixos do referencial principal (1, 2, 3) e o sistema de eixos da tensão de corte máxima (x', y', z') é efectuada por intermédio dos co-senos directores que relacionam os dois sistemas de eixos e que se encontram indicados na tabela seguinte.

$\lvert a'_{ij} \rvert$	1	2	3
x'	0	1	0
y'	$1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$
z'	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$

A figura seguinte apresenta o elemento de volume no ponto após orientação segundo o sistema de eixos das tensões de corte máximas (x', y', z').



A representação do estado de tensão no plano de Möhr encontra-se disponível na figura correspondente da alínea a).

c) Os três invariantes do tensor das tensões I_1, I_2, I_3, são os coeficientes da equação do 3º grau (2.1.2) que foi obtida na resolução do problema de valores próprios e podem, alternativamente, ser obtidos a partir das tensões principais da forma a seguir indicada,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 10 - 5 - 15 = -10 \text{ MPa} \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = -(10\times(-5) + (-5)\times(-15) + (-15)\times 10) = 125 \text{ MPa}^2 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 10\times(-5)\times(-15) = 750 \text{ MPa}^3 \end{aligned} \qquad (2.1.14)$$

Este resultado permite compreender a origem da designação 'invariante' que deriva do facto do seu valor não variar com o sistema de eixos considerado.

d) A tensão média σ_m calcula-se através de,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{-5 + -6 + 1}{3} = -\frac{10}{3} \text{ MPa} \qquad (2.1.15)$$

e o seu valor representa a componente não nula do tensor hidrostático que é utilizado na decomposição do tensor das tensões,

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} \qquad (2.1.16)$$

O tensor desviador σ'_{ij} obtém-se pela subtracção entre o tensor das tensões σ_{ij} e o tensor hidrostático $\sigma_{kk}/3$,

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10/3 & 0 & 0 \\ 0 & -10/3 & 0 \\ 0 & 0 & -10/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/3 & 0 & 0 \\ 0 & -8/3 & -12 \\ 0 & -12 & 13/3 \end{bmatrix} \text{MPa} \end{aligned} \qquad (2.1.17)$$

e) O vector tensão S_n que actua num plano com uma normal n_i definida no sistema de eixos (x, y, z) é calculado da forma a seguir indicada,

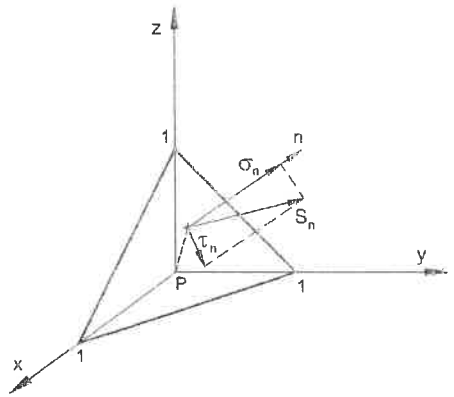
$$S_n = \sigma_{ij}\cdot n_i = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{nx} \\ S_{ny} \\ S_{nz} \end{Bmatrix} \qquad (2.1.18)$$

em que S_{nx}, S_{ny}, S_{nz} são as componentes cartesianas do vector tensão. Nestas condições, o vector tensão S_n que actua num plano cuja normal $n = \frac{2}{3}\cdot i + \frac{1}{3}\cdot j + \frac{2}{3}\cdot k$ vale,

$$S_n = \sigma_{ij}\cdot n_i = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10/3 \\ -10 \\ -10/3 \end{Bmatrix} \text{ MPa} \qquad (2.1.19)$$

As componentes normal σ_n e tangencial τ_n ao plano são calculadas através de,

$$\begin{aligned} \sigma_n &= S_n^T \cdot n_i = -\frac{70}{9} \text{ MPa} \\ \tau_n &= \sqrt{|S_n|^2 - \sigma_n^2} = \frac{10\sqrt{50}}{9} \text{ MPa} \end{aligned} \qquad (2.1.20)$$



f) As tensões octaedrais são as que actuam nos planos octaedrais ou seja, nos planos que coincidem com as faces de um octaedro regular. As normais aos planos octaedrais fazem ângulos iguais com cada uma das direcções principais do tensor das tensões ($\alpha = \beta = \gamma = 54.74°$).

Para determinar a tensão normal σ_{oct} e de corte τ_{oct} no plano octaedral é necessário conhecer o vector tensão octaedral S_{oct}. Como, em face do que foi referido anteriormente, os co-senos directores da normal exterior ao plano octaedral n_{oct} referidos ao sistema de eixos das direcções principais valem,

$$n_{oct} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \tag{2.1.21}$$

então, seguindo a metodologia utilizada na resolução da alínea anterior, o vector tensão octaedral S_{oct} vale,

$$\begin{aligned} S_{oct} &= \sigma_{ij} \cdot n_{oct} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{\sqrt{3}} \\ -\frac{15}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \text{ MPa} \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

e as tensões normal σ_{oct} e de corte octaedral τ_{oct} valem,

$$\begin{aligned} \sigma_{oct} &= S_{oct}^T \cdot n_i = \begin{Bmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{\sqrt{3}} & -\frac{15}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} = -\frac{10}{3} \text{ MPa} \\ \tau_{oct} &= \sqrt{|S_{oct}|^2 - \sigma_{oct}^2} = \sqrt{\frac{350}{3} - \frac{100}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{38} \text{ MPa} \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Estes valores poderiam, alternativamente, ter sido directamente obtidos das tensões principais,

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(10 - 5 - 15) = -\frac{10}{3} \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(10 - (-5))^2 + (10 - (-15))^2 + (-5 - (-15))^2} = \frac{5}{3}\sqrt{38} \text{ MPa} \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Problema 2.2

O estado de tensão σ_{ij} num ponto é representado por intermédio de dois dos três tensores das tensões que se apresentam a seguir (unidades em MPa),

$$\sigma_{ij}^{A}=\begin{bmatrix}100 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & -200\end{bmatrix}\quad \sigma_{ij}^{B}=\begin{bmatrix}3.03 & 0 & -140.31\\ 0 & 50 & 0\\ -140.31 & 0 & -103.03\end{bmatrix}\quad \sigma_{ij}^{C}=\begin{bmatrix}-102.29 & 0 & -140.59\\ 0 & 50 & 0\\ -140.59 & 0 & 40.63\end{bmatrix}$$

a) Indique qual dos tensores das tensões não é representativo do ponto.

b) Determine o valor da tensão de corte máxima no ponto e refira-se ao estado de deformação sabendo que a tensão limite de elasticidade $\sigma_e = 350$ MPa.

Resolução

a) Os tensores das tensões que representarem o estado de tensão no ponto devem possuir valores próprios idênticos ou seja, tensões principais iguais. O tensor σ_{ij}^{A} está referido às direcções principais na medida em que as tensões de corte são nulas e, portanto, as três tensões principais são as seguintes,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 100\\ \sigma_2 &= 50 \quad \text{MPa}\\ \sigma_3 &= -200\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

A análise dos tensores σ_{ij}^{B} e σ_{ij}^{C} permite concluir que uma das direcções do sistema de eixos em que foi escrito é uma direcção principal, a que corresponde a tensão principal de valor igual a 50 MPa, em virtude das tensões de corte que estão associadas a esta direcção serem nulas. A determinação das restantes tensões principais associadas aos tensores σ_{ij}^{B} e σ_{ij}^{C} é efectuada através da resolução dos seguintes problemas de valores próprios bidimensionais,

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{ij}^{A}\right| &= \begin{vmatrix}3.03-\lambda & -140.31\\ -140.31 & -103.03-\lambda\end{vmatrix} = 0 \ \text{MPa}\\ \left|\sigma_{ij}^{B}\right| &= \begin{vmatrix}-102.29-\lambda & -140.59\\ -140.59 & 40.63-\lambda\end{vmatrix} = 0 \ \text{MPa}\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

que dão origem a equações do 2º grau em λ, cujas raízes são as tensões principais,

$$\begin{aligned}&(3.03-\lambda)(-103.03-\lambda)-(-140.31)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=100 \ \vee \ \lambda=-200 \ \text{MPa}\\ &(-102.29-\lambda)(40.63-\lambda)-(-140.59)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=126.9 \ \vee \ \lambda=-188.5 \ \text{MPa}\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Este resultado permite escrever os estados de tensão σ_{ij}^{B} e σ_{ij}^{C} segundo as direcções principais,

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{B'} &= \begin{bmatrix}100 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & -200\end{bmatrix} \ \text{MPa}\\ \sigma_{ij}^{C'} &= \begin{bmatrix}127 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & -188\end{bmatrix} \ \text{MPa}\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

e permite concluir que os tensores das tensões σ_{ij}^{A} e σ_{ij}^{B} representam o mesmo estado de tensão no ponto.

b) A tensão de corte máxima no ponto τ_{max} calcula-se a partir dos valores das tensões principais,

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{100-(-200)}{2}=150 \ \text{MPa} \tag{2.2.5}$$

O ponto encontra-se em regime elástico na medida em que,

$$\tau_{max}<\frac{\sigma_e}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 150<\frac{350}{2} \ \text{MPa} \tag{2.2.6}$$

Problema 2.3

A aplicação de um estado triaxial de tensão $\sigma_1 = 80$ MPa, $\sigma_2 = 45$ MPa e $\sigma_3 = -30$ MPa sobre um componente metálico provoca-lhe uma deformação de natureza elástica. Verifique se o componente permanecerá em deformação elástica no caso de lhe ser sobreposto um carregamento adicional de natureza hidrostática em que $\sigma_m = -130$ MPa.

Resolução

O estado de tensão do enunciado é representado através do tensor das tensões,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \text{ MPa} \qquad (2.3.1)$$

O estado de tensão (2.3.1) representará uma solicitação de natureza elástica quando, de acordo com o critério de plasticidade de Tresca, se verificar a seguinte condição,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} < \frac{\sigma_e}{2} \qquad (2.3.2)$$

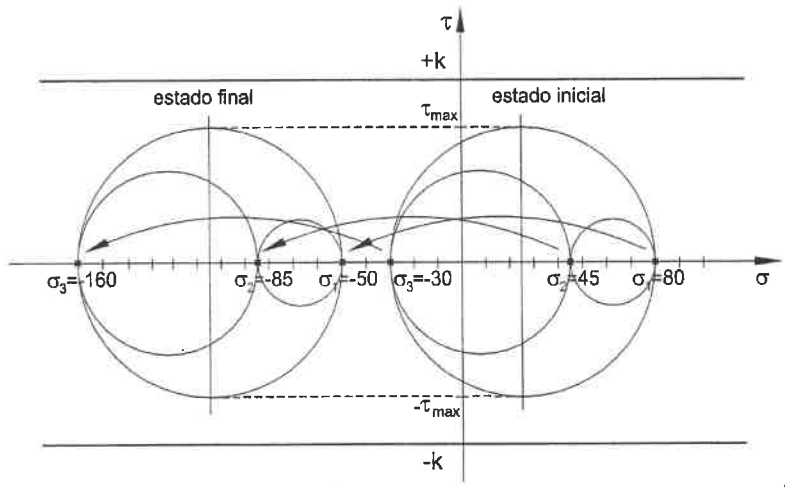
Como o estado triaxial de tensões se encontra referido às direcções principais,

$$\sigma_1 = 80\,,\ \sigma_2 = 45 \text{ e } \sigma_3 = -30 \text{ MPa} \qquad (2.3.3)$$

então, a tensão de corte máxima τ_{max} a que o componente está sujeito vale,

$$\tau_{max} = \frac{80 - (-30)}{2} = 55 \text{ MPa} \qquad (2.3.4)$$

e, para que o componente metálico esteja em deformação elástica, a tensão limite de elasticidade em corte puro $k > 55$ MPa, tal como se encontra ilustrado na figura seguinte (unidades em MPa).



(MPa)

Quando ao componente metálico é sobreposto um carregamento adicional de natureza hidrostática em que $\sigma_m = -130$ MPa, o estado de tensão resultante passa a ser expresso por intermédio do seguinte tensor das tensões,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -130 & 0 & 0 \\ 0 & -130 & 0 \\ 0 & 0 & -130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & -85 & 0 \\ 0 & 0 & -160 \end{bmatrix} \text{ MPa} \qquad (2.3.5)$$

e tensão de corte máxima τ_{max} é igual a,

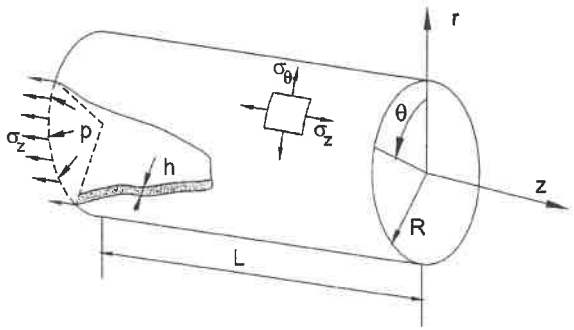
$$\tau_{max} = \frac{-50 - (-160)}{2} = 55 \text{ MPa} \qquad (2.3.6)$$

$$\tau_{max} < k$$

O valor obtido é igual ao que tinha sido calculado para a tensão de corte máxima antes da sobreposição do carregamento hidrostático e, portanto, o componente metálico permance em domínio elástico. Esta conclusão é compatível com um dos princípios fundamentais da teoria da plasticidade segundo o qual a tensão hidrostática não condiciona o estado de deformação dos materiais metálicos.

Problema 2.4

Proceda ao dimensionamento de um reservatório cilíndrico com um raio médio igual a 300 mm que seja capaz de suportar uma pressão interior máxima de serviço igual a 6 MPa para uma situação em que não se considera qualquer coeficiente de segurança.



O reservatório deverá ser construído num aço carbono com uma tensão limite de elasticidade $\sigma_e = 316$ MPa.

a) Determine a espessura teórica mínima admissível do reservatório cilíndrico de modo a assegurar que o seu funcionamento se realiza em regime elástico. Utilize o critério de plasticidade de Tresca.

b) Repita a alínea anterior utilizando o critério de plasticidade de von Mises.

c) Proceda à representação dos resultados obtidos nas alíneas a) e b) no espaço das tensões principais. Comente os resultados obtidos.

Resolução

a) A resolução deste problema considera que o reservatório cilíndrico é de parede fina e não entra em linha de conta com os coeficientes de segurança que são exigidos pela generalidade dos códigos de construção de reservatórios.

A hipótese de parede fina transforma o problema num problema de membrana em que a tensão normal e as tensões de corte que actuam segundo a espessura do reservatório podem ser desprezadas. Deste modo, a aplicação de uma pressão interna p originará tensões normais segundo a direcção tangencial e longitudinal as quais, por razões de simetria do carregamento, são direcções principais. Procedendo ao equilíbrio de força na

direcção axial z e tangencial θ obtêm-se os seguintes valores para as tensões principais que actuam na parede do reservatório,

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{pR}{h} \qquad \sigma_2 = \sigma_z = \frac{pR}{2h} \qquad \sigma_3 = \sigma_r = 0 \tag{2.4.1}$$

Considerando o critério de plasticidade de Tresca para dimensionar a parede do reservatório e assegurar que o seu funcionamento seja exclusivamente efectuado no regime elástico, obtém-se,

$$\sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_e \;\Leftrightarrow\; \sigma_\theta - \sigma_r < \sigma_e \;\Leftrightarrow\; \frac{pR}{h} < \sigma_e \tag{2.4.2}$$

que, por substituição de valores, permite obter o valor mínimo admissível para a espessura da parede do reservatório h,

$$h = \frac{pR}{\sigma_e} = \frac{6 \times 300}{316} = 5.7 \text{ mm} \tag{2.4.3}$$

b) Caso se tivesse optado pela utilização do critério de plasticidade de von Mises para garantir o funcionamento do reservatório em regime elástico, teria de verificar-se a seguinte condição,

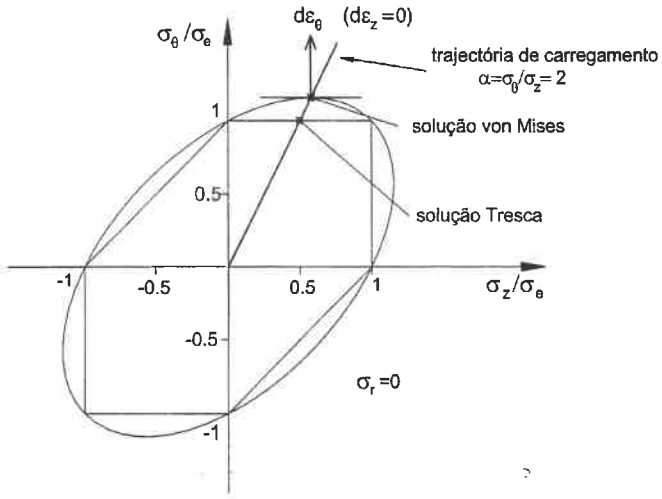
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 < 2\sigma_e^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{2}\left(\frac{pR}{h}\right)^2 < 2\sigma_e^2 \tag{2.4.4}$$

a que corresponde um valor mínimo admissível para a espessura da parede h do reservatório igual a,

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{pR}{\sigma_e} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{6 \times 300}{316} = 4.9 \text{ mm} \tag{2.4.5}$$

c) Para compreender a diferença entre os valores mínimos da espessura da parede do reservatório que foram obtidos por intermédio dos critérios de plasticidade de Tresca e de von Mises, considera-se o plano $\sigma_k = \sigma_r = 0$ do espaço das tensões principais que se encontra representado na figura seguinte. Na figura estão assinaladas as fronteiras elasto-plásticas dos dois critérios de plasticidade bem como a recta correspondente à trajectória

de carregamento $\sigma_\theta/\sigma_z = 2$ do reservatório cilíndrico quando este é submetido a uma pressão crescente p.



A análise da figura permite concluir que a recta correspondente à trajectória de carregamento $\sigma_\theta/\sigma_z = 2$ intersecta a representação gráfica dos critérios de plasticidade em pontos diferentes a que correspondem valores diferentes das tensões principais σ_z e σ_θ. Os valores críticos das tensões principais para entrada em deformação plástica que resultam da aplicação do critério de plasticidade de Tresca são inferiores aos do critério de plasticidade de von Mises.

Este facto explica a razão pela qual a estimativa da espessura mínima admissível da parede do reservatório que resulta da aplicação do critério de plasticidade de Tresca é superior à que resulta da utilização do critério de plasticidade de von Mises.

Problema 2.5

Proceda à determinação da pressão máxima de funcionamento de um reservatório esférico com um raio médio de 500 mm e uma espessura de parede igual a 30 mm fabricado num aço carbono com uma tensão limite de elasticidade σ_e = 316 MPa. Utilize o critério de plasticidade de Tresca e admita um coeficiente de segurança igual a 2.

Resolução

Seguindo a metodologia utilizada na resolução do problema anterior, a tensão normal e as tensões de corte que actuam na espessura do reservatório podem ser desprezadas. A aplicação de pressão interna p resulta em tensões normais segundo as direcções θ e φ (num sistema de coordenadas esférico) que, por razões de simetria do carregamento, são direcções principais ($\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma_1 = \sigma_2$),

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h} \qquad \sigma_3 = \sigma_r = 0 \tag{2.5.1}$$

Aplicando o critério de plasticidade de Tresca para dimensionar a pressão interna máxima que permite assegurar o funcionamento do reservatório em regime elástico,

$$\sigma_1 - \sigma_3 < \frac{\sigma_e}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{pR}{2h} < \frac{\sigma_e}{2} \tag{2.5.2}$$

e admitindo um coeficiente de segurança n = 2 obtém-se o seguinte valor para a pressão interna máxima admissível p_{max} de funcionamento do reservatório,

$$p_{max} = \frac{1}{n}\left(\frac{h\sigma_e}{R}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{6 \times 316}{500} = 1.9 \text{ MPa} \tag{2.5.3}$$

Problema 2.6

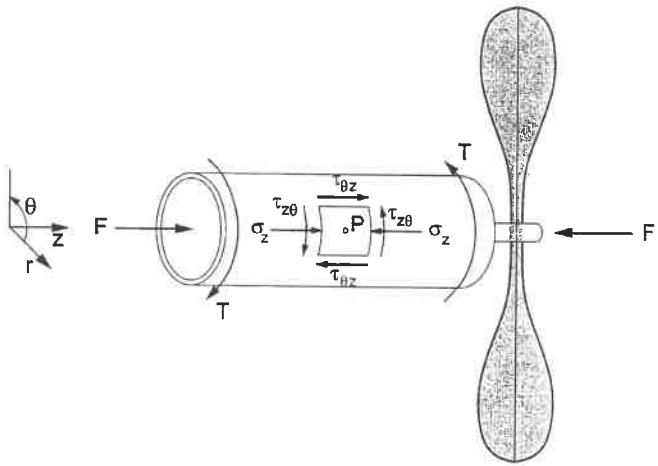
O veio da hélice de um ultraleve movido a pedais encontra-se sujeito a um momento torsor de 40 N.m e a uma força de compressão de 400 N. O veio deve ser fabricado a partir de um tubo com 20 mm de diâmetro de uma liga de alumínio com uma tensão limite de elasticidade $\sigma_e = 125$ MPa.

a) Determine a espessura mínima admissível para a parede do tubo. Utilize o critério de plasticidade de Tresca.

b) Resolva a alínea anterior admitindo um coeficiente de segurança igual a 2 e uma disponibilidade do mercado para apenas assegurar o fornecimento de tubos nas gamas de espessura: 1, 2, 3 e 4 mm.

Resolução

a) O veio da hélice solicitado por um momento torsor T e por uma força axial de compressão F encontra-se representado na figura seguinte.



Em resultado desta solicitação um elemento de volume genérico fica sujeito a tensões normais σ_z e a tensões de corte $\tau_{z\theta}$ impostas pela força axial e pelo momento torsor, respectivamente. O estado de tensão correspondente é expresso através do tensor das tensões,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{z\theta} \\ 0 & \tau_{z\theta} & -\sigma_z \end{bmatrix} \text{ MPa} \qquad (2.6.1)$$

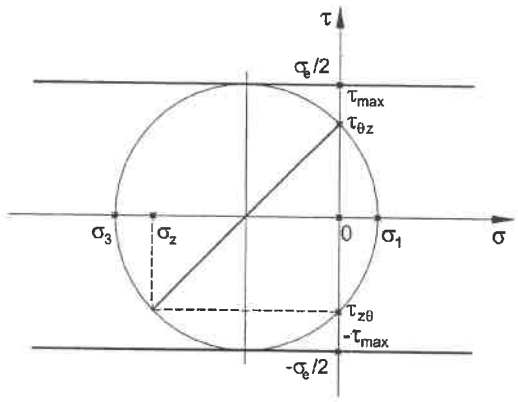
cuja representação no plano de Möhr está indicada na figura seguinte e cujos valores das tensões podem ser calculados através de,

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi\left(R^2 - (R-h)^2\right)} \qquad (2.6.2)$$

$$\tau_{z\theta} = \frac{TR}{I_p} \qquad I_p = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - (R-h)^4\right)$$

$$\tau_{z\theta} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}\left(R^4 - (R-h)^4\right)} \qquad (2.6.3)$$

em que R é o raio exterior e h é a espessura da parede do tubo.



Para obter o valor da espessura mínima admissível da parede do tubo considera-se que o elemento de volume não pode entrar em deformação plástica. Como o estado de tensão na parede do tubo é plano ($\sigma_r = 0$ e $\tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0$), a aplicação do critério de plasticidade de Tresca no plano (θ, z) permite obter a seguinte relação entre as tensões na parede do tubo,

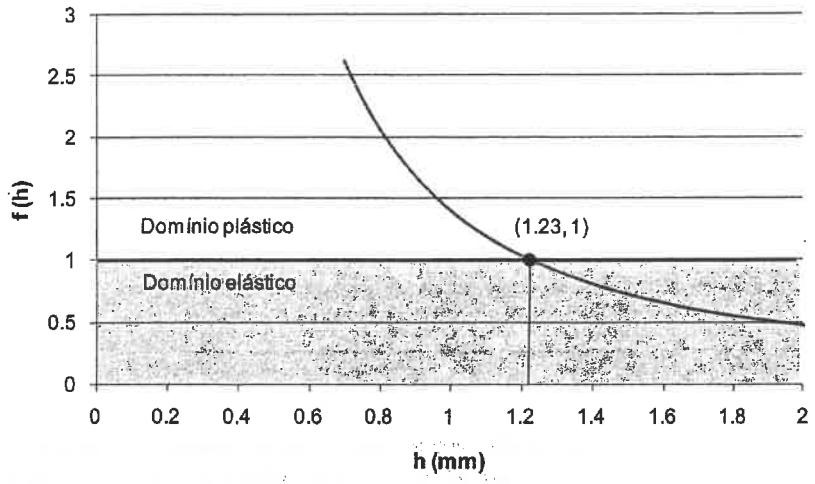
$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_z-\sigma_\theta}{2}\right)^2+\tau_{z\theta}^2}<k \quad \Leftrightarrow \quad {\sigma_z}^2+4\tau_{z\theta}^2<4k^2 \tag{2.6.4}$$

A relação (2.6.4) determina que para o tubo não entrar em deformação plástica o raio do círculo (ou seja, a tensão de corte máxima) representativa do estado de tensão no plano de Möhr deve ser inferior à tensão limite de elasticidade em corte puro $k=\sigma_e/2$. Reescrevendo a equação (2.6.4) da forma a seguir indicada,

$$f(h)=\frac{1}{{\sigma_e}^2}\left[{\sigma_z}^2+4\tau_{z\theta}^2\right]<1 \tag{2.6.5}$$

e substituindo as expressões (2.6.2) e (2.6.3) na equação anterior deverá ser verificada a seguinte condição para que o veio não entre em deformação plástica,

$$f(h)=\frac{1}{{\sigma_e}^2}\left[\left(\frac{F}{\pi\left(R^2-(R-h)^2\right)}\right)^2+4\left(\frac{2TR}{\pi\left(R^4-(R-h)^4\right)}\right)^2\right]<1 \tag{2.6.6}$$



O gráfico procede à representação da evolução da função $f(h)$ para os dados do enunciado do problema ou seja, R = 10 mm, T = 40 N.m, F = 400 N e $\sigma_e = 125$ MPa.

A linha $f(h)=1$, corresponde à fronteira entre o domínio elástico e o plástico de acordo com o critério de plasticidade de Tresca (2.6.4) e a evolução da função indica que a espessura mínima da parede do tubo $h_{min}=1.23$ mm.

Uma forma alternativa de resolver este problema por via analítica consiste em efectuar simplificações no modo como se calculam as tensões normal (2.6.2) e de corte (2.6.3) na parede do tubo. Admitindo que se trata de um tubo de parede fina ($h << R$) a área da secção transversal do tubo pode ser aproximada ao valor,

$$A \cong 2\pi Rh \tag{2.6.7}$$

e as tensões que actuam na parede do tubo podem calcular-se, também de modo aproximado, através de,

$$\sigma_z=\frac{F}{A}=\frac{F}{2\pi Rh} \tag{2.6.8}$$

$$\tau_{z\theta}=\frac{T/R}{A}=\frac{T}{2\pi R^2 h} \tag{2.6.9}$$

Seguindo a metodologia descrita anteriormente e substituindo (2.6.8) e (2.6.9) em (2.6.5) obtém-se,

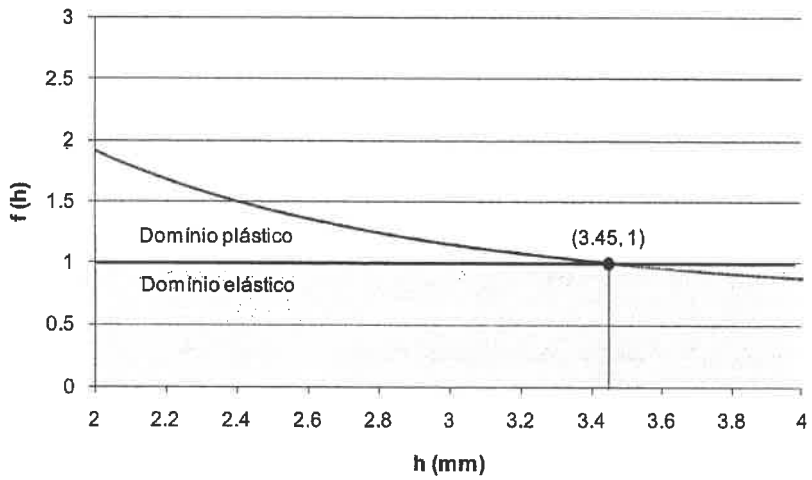
$$\begin{gathered}\frac{1}{\sigma_e^2}\left[\left(\frac{F}{2\pi Rh}\right)^2+4\left(\frac{T}{2\pi R^2 h}\right)^2\right]<1 \\ h>\frac{1}{\sigma_e \pi R}\sqrt{\frac{F^2}{4}+\frac{T^2}{R^2}}\end{gathered} \tag{2.6.10}$$

que permite obter o valor mínimo admissível para a espessura da parede do tubo do veio da hélice,

$$h_{min}=\frac{1}{125\times\pi\times10}\sqrt{\frac{400^2}{4}+\frac{40000^2}{10^2}}=1.02 \text{ mm} \tag{2.6.11}$$

Esta solução aproximada introduz um erro de 17% relativamente à solução exacta que se encontra representada na figura anterior.

b) Resolver a alínea a) com um coeficiente de segurança $n = 2$ exige que a tensão limite de elasticidade do material seja substituída por uma tensão limite de elasticidade admissível $\sigma_{adm} = \sigma_e / 2 = 62.5$ MPa. Nestas condições a representação gráfica da função $f(h)$ incluída em (2.6.6) permite obter uma espessura mínima $h_{min} = 3.45$ mm. Atendendo à disponibilidade de tubo no mercado, o tubo a adquirir para fabricar o veio da hélice deverá ter uma espessura de parede $h = 4$ mm.



Problema 2.7

Um componente estrutural entra em deformação plástica quando é submetido a um estado de tensão definido por intermédio do seguinte tensor das tensões,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -50 \\ 0 & -100 & 0 \\ -50 & 0 & -150 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Apresente uma estimativa do valor da tensão limite de elasticidade do material que foi utilizado no fabrico do componente utilizando os critérios de plasticidade de Tresca e de von Mises.

Resolução

a) A determinação das tensões principais é efectuada por via analítica resolvendo os valores próprios do tensor das tensões. Como a tensão $\sigma_y = -100$ MPa é uma tensão principal, uma vez que as tensões de corte associadas a esta direcção são nulas, o cálculo dos valores próprios fica reduzido ao determinante,

$$\begin{vmatrix} 100-\lambda & -50 \\ -50 & -150-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ MPa} \qquad (2.7.1)$$

cujo desenvolvimento conduz à equação do 2º grau em λ ,

$$(100-\lambda)\times(-150-\lambda)-(-50)\times(-50)=0 \Leftrightarrow \lambda = 109.63 \text{ e } \lambda = -159.63 \text{ MPa} \qquad (2.7.2)$$

As raízes desta equação são as tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 109.63 \\ \sigma_2 &= -100 \quad \text{MPa} \\ \sigma_3 &= -159.63 \end{aligned} \qquad (2.7.3)$$

e o tensor das tensões σ_{ij} referido às direcções principais escreve-se da forma a seguir indicada,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 109.63 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -159.63 \end{bmatrix} \text{ MPa} \qquad (2.7.4)$$

Uma vez que este estado de tensão corresponde à entrada do material em deformação plástica, a tensão limite de elasticidade do material σ_e pode ser calculada através do critério de plasticidade de Tresca da forma a seguir indicada,

$$(\sigma_e)_{Tresca} = \sigma_1 - \sigma_3 = 109.63 - (-159.63) = 269.26 \text{ MPa} \qquad (2.7.5)$$

ou, alternativamente, através do critério de plasticidade de von Mises,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_e^2$$

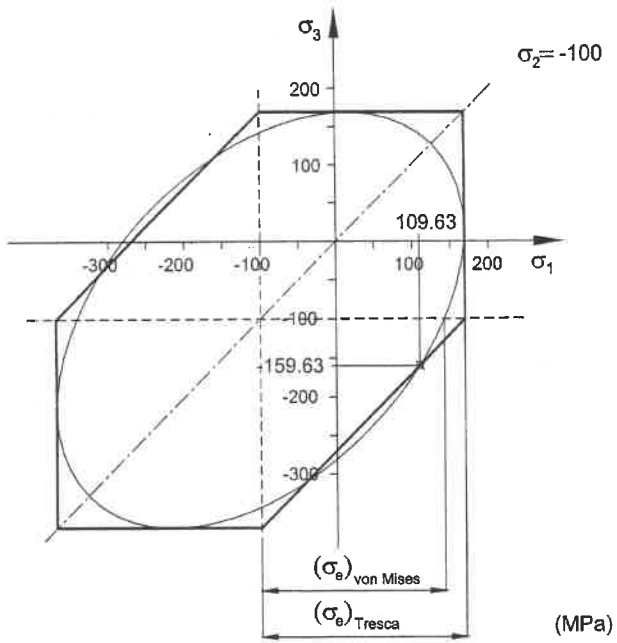
$$(109.63 - (-100))^2 + (-100 - (-159.63))^2 + (109.63 - (-159.63))^2 = 2\sigma_e^2 \qquad (2.7.6)$$

$$(\sigma_e)_{von\ Mises} = 244.95 \text{ MPa}$$

Os resultados obtidos pela aplicação dos dois critérios de plasticidade não significam que o mesmo material possa ter duas tensões limite de elasticidade diferentes. De facto, a diferença entre as duas estimativas para a tensão limite de elasticidade do material resulta dos critérios de plasticidade serem fundamentalmente relações empíricas que descrevem, de forma aproximada, a superfície limite de elasticidade dos materiais.

A tensão limite de elasticidade σ_e dos materiais é obtida experimentalmente por intermédio de ensaios de caracterização mecânica pelo que a representação dos critérios de plasticidade de Tresca e de von Mises no plano das tensões principais $\sigma_k = 0$ obriga a que estes critérios (e todos os demais critérios de plasticidade aplicáveis a materiais metálicos) devam coincidir para os estados de tracção e compressão uniaxiais.

Como este problema exige a determinação analítica da tensão limite de elasticidade σ_e através do conhecimento de um estado de tensão tridimensional correspondente ao início da deformação plástica, os valores estimados para a tensão limite de elasticidade através dos critérios de plasticidade de Tresca e de von Mises terão de ser naturalmente diferentes (ver figura seguinte)



Problema 2.8

O ensaio de tracção uniaxial de uma liga metálica forneceu os seguintes valores de tensão limite de elasticidade e de tensão de rotura; $\sigma_e = 200$ MPa e $\sigma_R = 350$ MPa.

a) Utilize o critério de plasticidade de Tresca para avaliar se a liga metálica está em deformação elástica ou plástica quando é solicitada por um carregamento $\sigma_x = 100$ MPa, $\sigma_y = -150$ MPa e $\sigma_z = -80$ MPa.

b) Admita que o valor das tensões σ_x e σ_z permanece constante e igual ao da alínea anterior e calcule entre que valores deverá variar a tensão σ_y de modo a que a liga metálica permaneça sempre em deformação elástica. Resolva esta questão analiticamente, no plano de Möhr e no espaço das tensões principais.

Resolução

a) As tensões σ_x, σ_y e σ_z são principais porque o carregamento não faz intervir tensões de corte,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 100 \\ \sigma_2 &= -80 \quad \text{MPa} \\ \sigma_3 &= -150 \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Para avaliar se a liga metálica está em deformação elástica ou plástica determina-se a tensão de corte máxima,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{100 - (-150)}{2} = 125 \text{ MPa} \tag{2.8.2}$$

e recorrendo, por exemplo, ao critério de plasticidade de Tresca compara-se o valor obtido com o da tensão limite de elasticidade em corte puro k ,

$$\tau_{max} > k = \frac{\sigma_e}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 125 > 100 \text{ MPa} \tag{2.8.3}$$

O resultado obtido permite afirmar que a liga metálica se encontra em deformação plástica.

b) Como o critério de plasticidade de Tresca não considera a influência da tensão intermédia σ_2 na entrada em domínio plástico, a determinação dos valores que a tensão σ_y pode tomar de modo a que a liga metálica permaneça sempre em deformação elástica deverá ser efectuada considerando três intervalos de variação da tensão σ_y a que correspondem diferentes valores das tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3,

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \sigma_x = 100 \quad -80 \le \sigma_2 = \sigma_y \le 100 \quad \sigma_3 = \sigma_z = -80 \text{ MPa} \\ &\sigma_1 = \sigma_y > 100 \quad \sigma_2 = \sigma_x = 100 \quad \sigma_3 = \sigma_z = -80 \text{ MPa} \\ &\sigma_1 = \sigma_x = 100 \quad \sigma_2 = \sigma_z = -80 \quad \sigma_3 = \sigma_y < -80 \text{ MPa} \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

A resolução dos três intervalos de variação da tensão σ_y (2.8.4) pode ser efectuada de forma analítica ou gráfica utilizando-se na segunda hipótese, o plano de Möhr ou o espaço das tensões principais. Apresentam-se de seguida os vários tipos de resoluções.

Resolução analítica

Intervalo 1: Quando $\sigma_1 = \sigma_x = 100$ MPa, $-80 \le \sigma_2 = \sigma_y \le 100$ MPa e $\sigma_3 = \sigma_z = -80$ MPa, a liga metálica encontra-se em domínio elástico, de acordo com o critério de plasticidade de Tresca, porque tensão de corte máxima τ_{max} aplicada é inferior à tensão limite de elasticidade em corte puro k ,

$$\tau_{max} = \frac{100 - (-80)}{2} = 90 \ < k = 100 \text{ MPa} \tag{2.8.5}$$

Intervalo 2: Quando $\sigma_1 = \sigma_y > 100$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_x = 100$ MPa e $\sigma_3 = \sigma_z = -80$ MPa, a liga metálica encontra-se em domínio elástico quando,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y - (-80)}{2} < 100 \text{ MPa} \tag{2.8.6}$$

ou seja, quando,

$$\frac{\sigma_y - (-80)}{2} < 100 \Leftrightarrow \sigma_y < 120 \text{ MPa} \tag{2.8.7}$$

Intervalo 3: Quando $\sigma_1 = \sigma_x = 100$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_z = -80$ MPa e $\sigma_3 = \sigma_y < -80$ MPa, a liga metálica encontra-se em domínio elástico quando,

$$\tau_{max} = \frac{100 - (\sigma_y)}{2} < 100 \text{ MPa} \qquad (2.8.8)$$

ou seja, quando,

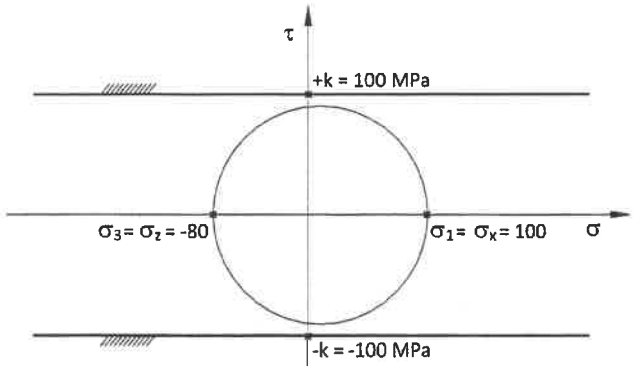
$$\frac{100 - (\sigma_y)}{2} < 100 \Leftrightarrow \sigma_y > -100 \text{ MPa} \qquad (2.8.9)$$

A união dos resultados obtidos a partir da análise dos três intervalos de variação da tensão σ_y permite concluir que se o valor das tensões σ_x e σ_z for igual a 100 MPa e -80 MPa, respectivamente, a liga metálica permanecerá em deformação elástica se a tensão σ_y variar no intervalo,

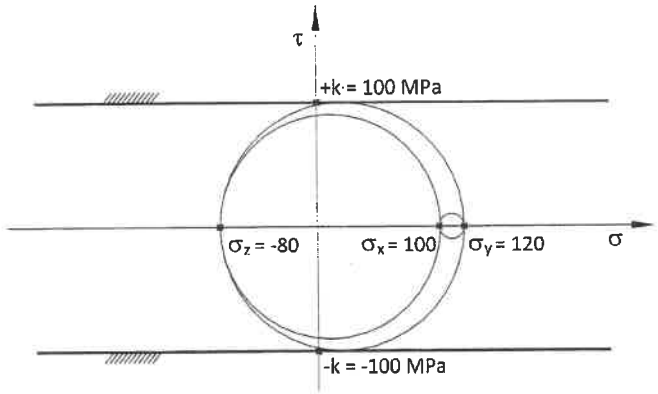
$$-100 < \sigma_y < 120 \text{ MPa} \qquad (2.8.10)$$

Resolução gráfica no plano de Möhr

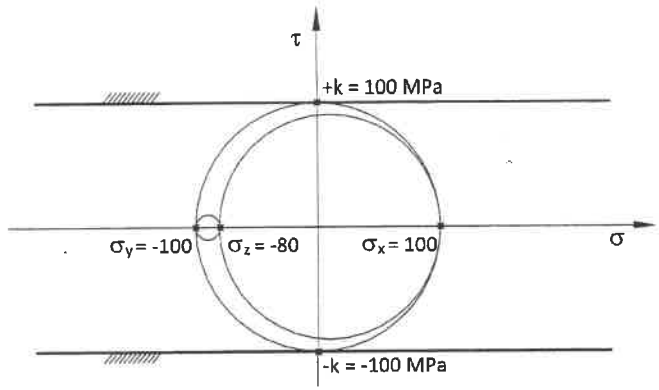
Intervalo 1: Quando $\sigma_1 = \sigma_x = 100$ MPa e $\sigma_3 = \sigma_z = -80$ MPa, a liga metálica encontra-se em domínio elástico qualquer que seja o valor da tensão σ_y no intervalo $-80 \leq \sigma_y \leq 100$ MPa.



Intervalo 2: Quando $\sigma_2 = \sigma_x = 100$ MPa e $\sigma_3 = \sigma_z = -80$ MPa a liga metálica entra em domínio plástico quando $\sigma_1 = \sigma_y = 120$ MPa.



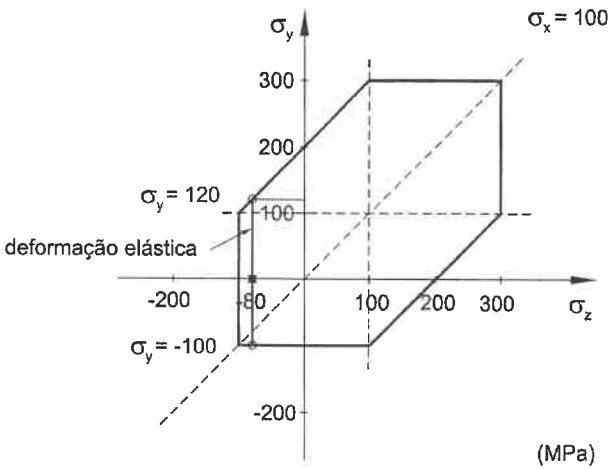
Intervalo 3: Quando $\sigma_1 = \sigma_x = 100$ MPa e $\sigma_2 = \sigma_z = -80$ MPa a liga metálica entra em domínio plástico quando $\sigma_3 = \sigma_y = -100$ MPa.



Tal como tínhamos concluído para o caso da resolução analítica, a união dos resultados obtidos através do plano de Möhr permite afirmar que se o valor das tensões σ_x e σ_z for igual a 100 MPa e -80 MPa, respectivamente, a liga metálica permanecerá em deformação elástica se a tensão σ_y variar entre -100 e 120 MPa.

Resolução gráfica no espaço das tensões principais

Intervalo 1: A análise deste problema no espaço das tensões principais apresenta a vantagem de dispensar que a resolução seja efectuada considerando os três intervalos de variação da tensão σ_y que tiveram que se considerados nas resoluções gráfica e no plano de Möhr. Assim, considerando um corte através do plano $\sigma_k = \sigma_x = 100$ MPa do espaço das tensões principais onde se encontra representada a fronteira elasto-plástica do critério de Tresca e representando nos eixos das abcissas e das ordenadas as tensões σ_z e σ_y, obtém-se,



Conclui-se, portanto, que a liga metálica permanece em deformação elástica sempre que $-100 < \sigma_y < 120$ MPa.

Problema 2.9

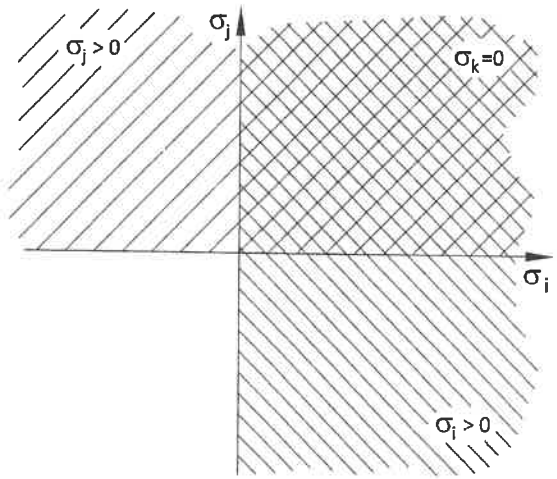
Os processos tecnológicos de deformação plástica de chapa são habitualmente estudados em condições de tensão plana $\sigma_k = 0$.

a) Assinale as zonas de trabalho características destes processos tecnológicos no espaço das tensões principais admitindo que pelo menos uma das tensões principais actuantes é de tracção.

b) Identifique a maior tensão de tracção que pode ser suportada por uma chapa plana submetida a um carregamento biaxial de tracção e determine o correspondente valor do quociente σ_i / σ_j.

Resolução

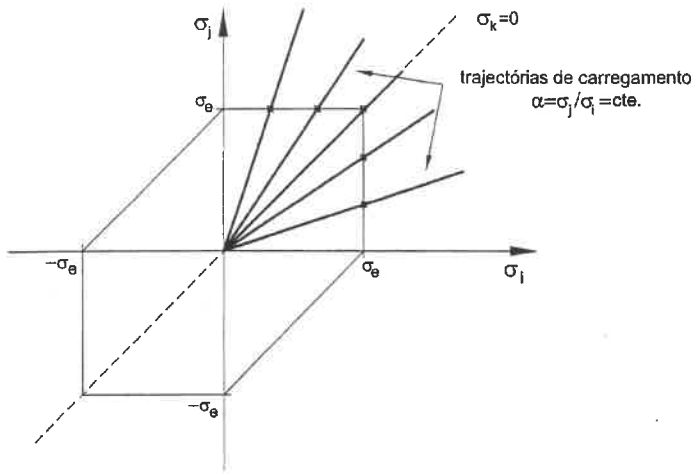
a) Como os processos tecnológicos de deformação plástica de chapa se realizam em condições de tensão plana ($\sigma_k = 0$) e como uma das tensões actuantes é obrigatoriamente de tracção ($\sigma_i > 0$ ou $\sigma_j > 0$), significa que as zonas possíveis de trabalho no espaço das tensões principais são as que se encontram assinaladas na figura seguinte.



b) Um carregamento biaxial de tracção aplicado a uma chapa plana tem representação gráfica no primeiro quadrante da projecção bidimensional do espaço das tensões

principais ($\sigma_k = 0$). Contudo, a análise da maior tensão de tracção a que a chapa pode estar submetida vai depender do critério de plasticidade que for considerado.

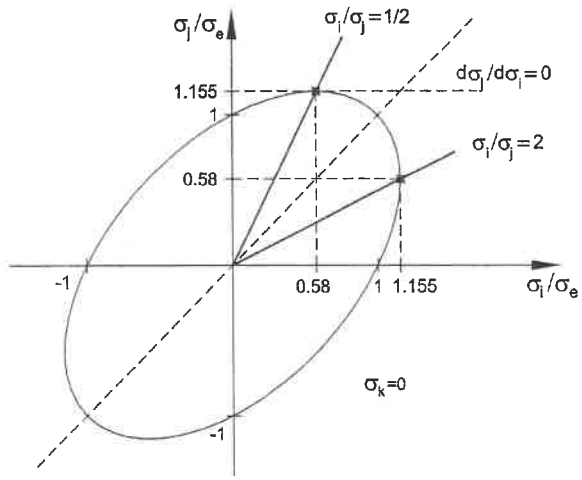
Começando por considerar o critério de plasticidade de Tresca e a sua representação no espaço das tensões principais (figura seguinte) é possível concluir que qualquer que seja a trajectória de carregamento σ_i / σ_j, a intensidade da maior tensão de tracção que pode ser suportada pela chapa é sempre igual a σ_e.



Se, alternativamente, for considerado o critério de plasticidade de von Mises, conclui-se através da representação gráfica da figura seguinte que as trajectórias de carregamento a que correspondem as tensões de tracção de maior intensidade que a chapa pode suportar são $\sigma_i / \sigma_j = 1/2$ (ou $\sigma_i / \sigma_j = 2$).

Esta conclusão pode ser confirmada analiticamente diferenciando o critério de plasticidade de von Mises e atendendo ao facto que $d\sigma_i / d\sigma_j = 0$ no ponto de intersecção entre a trajectória de carregamento a que corresponde a tensão de tracção de maior intensidade e o critério de plasticidade de von Mises,

$$\begin{aligned} &(\sigma_i - \sigma_j)^2 + (\sigma_j - \sigma_k)^2 + (\sigma_k - \sigma_i)^2 = 2\sigma_e^2 \\ &\sigma_k = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - \sigma_i\sigma_j = \sigma_e^2 \\ &2\sigma_i + 2\sigma_j \frac{d\sigma_j}{d\sigma_i} - \sigma_j - \sigma_i \frac{d\sigma_j}{d\sigma_i} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sigma_i = \frac{\sigma_j}{2} \end{aligned} \qquad (2.9.1)$$



O cálculo da maior tensão de tracção que a chapa pode suportar efectua-se substituindo na expressão analítica do critério de plasticidade de von Mises o estado de tensão correspondente a qualquer uma das duas trajectórias de carregamento que se encontram representadas na figura anterior. Considere-se por exemplo $\sigma_i / \sigma_j = 1/2$ e $\sigma_k = 0$,

$$\begin{aligned} &(\sigma_i - \sigma_j)^2 + (\sigma_i - \sigma_k)^2 + (\sigma_j - \sigma_k)^2 = 2\sigma_e^2 \\ &\left(\frac{1}{2}\sigma_j - \sigma_j\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_j - 0\right)^2 + (\sigma_j - 0)^2 = 2\sigma_e^2 \\ &\sigma_j = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_e = 1.155\,\sigma_e \end{aligned} \qquad (2.9.2)$$

Problema 2.10

Calcule a tensão efectiva, o incremento de extensão efectiva e o incremento de trabalho plástico por unidade de volume para os seguintes tipos de carregamento:

a) Tracção uniaxial.

b) Deformação plana $d\varepsilon_2 = 0$ com $\sigma_3 = 0$.

Resolução

a) Num ensaio de tracção uniaxial ($\sigma_1 \neq 0$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) a tensão efectiva associada ao critério de plasticidade de von Mises relaciona-se com tensão principal na direcção de aplicação da carga da forma a seguir indicada,

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\sigma_1^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sigma_1 \qquad (2.10.1)$$

A condição de incompressibilidade obriga a que os incrementos de extensão principal se relacionam entre si através de,

$$d\varepsilon_1 = -2d\varepsilon_2 = -2d\varepsilon_3 \qquad (2.10.2)$$

O incremento de extensão efectiva pode ser expresso em função do incremento de extensão principal na direcção de aplicação da carga através de,

$$\begin{aligned} d\overline{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(d\varepsilon_1-d\varepsilon_2)^2+(d\varepsilon_2-d\varepsilon_3)^2+(d\varepsilon_1-d\varepsilon_3)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\left(d\varepsilon_1-\left(-\frac{d\varepsilon_1}{2}\right)\right)^2+\left(\left(-\frac{d\varepsilon_1}{2}\right)-\left(-\frac{d\varepsilon_1}{2}\right)\right)^2+\left(d\varepsilon_1-\left(-\frac{d\varepsilon_1}{2}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{9}{2}d\varepsilon_1^{\,2}\right]^{\frac{1}{2}} = d\varepsilon_1 \end{aligned} \qquad (2.10.3)$$

Sabendo que o incremento de trabalho plástico por unidade de volume dw^p é igual a,

$$dw^p = \overline{\sigma}\,d\overline{\varepsilon} = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 \qquad (2.10.4)$$

pode-se concluir que o incremento de trabalho plástico por unidade de volume em tracção uniaxial é igual ao produto da tensão pelo incremento de extensão na direcção de aplicação da carga,

$$dw^p = \overline{\sigma}\,d\overline{\varepsilon} = \sigma_1 d\varepsilon_1 + 0\times d\varepsilon_2 + 0\times d\varepsilon_3 = \sigma_1 d\varepsilon_1 \qquad (2.10.5)$$

b) A condição de deformação plana $d\varepsilon_2 = 0$, associada à incompressibilidade dos materiais metálicos, obriga à compensação dos incrementos de extensão nas outras direcções,

$$d\varepsilon_1 = -d\varepsilon_3 \qquad (2.10.6)$$

e dá origem à seguinte relação entre o incremento de extensão efectiva e o incremento de extensão principal na direcção de aplicação da carga,

$$d\overline{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(d\varepsilon_1-0)^2+(0-(-d\varepsilon_1))^2+(d\varepsilon_1-(-d\varepsilon_1))^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,d\varepsilon_1 \qquad (2.10.7)$$

Aplicando as equações constitutivas de Levy-Mises na direcção principal 2, com $\sigma_3 = 0$,

$$d\varepsilon_2 = \frac{d\overline{\varepsilon}}{\overline{\sigma}}\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1+0)\right] = 0 \qquad (2.10.8)$$

obtém-se a relação entre as tensões principais σ_1 e σ_2,

$$\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1+0)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_1 \qquad (2.10.9)$$

que permite obter o valor da tensão efectiva,

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\sigma_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sigma_1-0\right)^2+(\sigma_1-0)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sigma_1 \qquad (2.10.10)$$

O incremento de trabalho plástico por unidade de volume para a deformação plana $d\varepsilon_2 = 0$ com $\sigma_3 = 0$ resulta igual a,

$$dw^p = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_1 \times 0 + 0 \times d\varepsilon_3 = \sigma_1 d\varepsilon_1 \qquad (2.10.11)$$

ou,

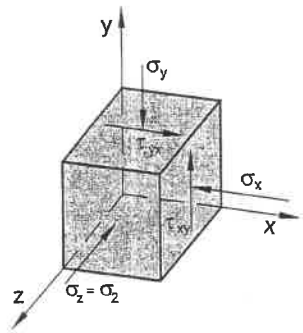
$$dw^p = \overline{\sigma}\, d\overline{\varepsilon} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_1 \frac{2}{\sqrt{3}} d\varepsilon_1 = \sigma_1 d\varepsilon_1 \qquad (2.10.12)$$

Problema 2.11

Proceda à representação no plano de Möhr dos estados de tensão e extensão de um material que apresenta um comportamento rígido-plástico e se encontra submetido a um estado de deformação plana $\varepsilon_2 = 0$. Considere que o quociente entre os incrementos de extensão $d\varepsilon_1 / d\varepsilon_3$ permanece constante durante a totalidade da deformação plástica.

Resolução

Considere-se um elemento de volume em condições de deformação plana na direcção do eixo dos z.



A condição de incompressibilidade dos materiais metálicos em condições de deformação plástica plana ($\varepsilon_2 = \varepsilon_z = 0$) obriga a que,

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 \qquad (2.11.1)$$

e dá origem à representação das extensões no plano de Möhr que se encontra disponível na figura seguinte.

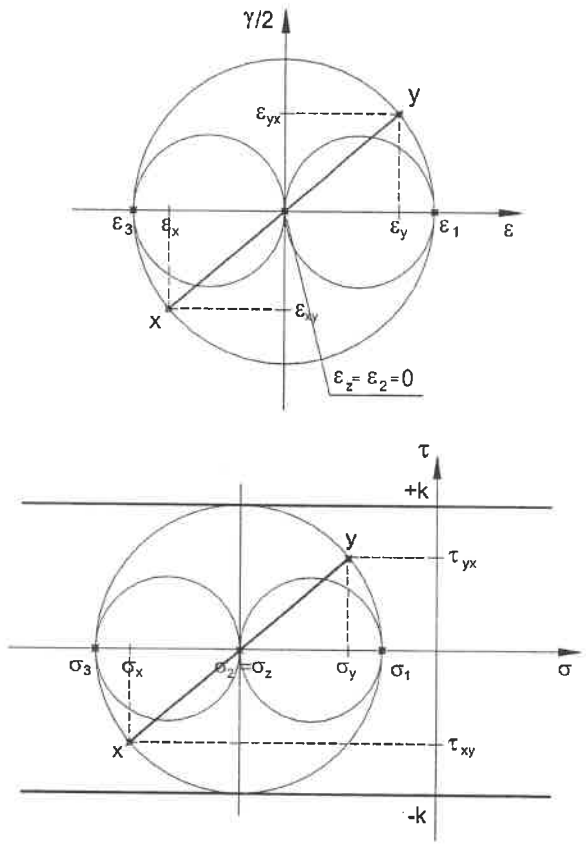
Aplicando as equações de Levy-Mises na direcção em que a deformação é plana,

$$d\varepsilon_2 = 0 = \frac{d\overline{\varepsilon}}{\overline{\sigma}}\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right] \qquad (2.11.2)$$

obtém-se o seguinte valor para a tensão σ_2,

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \qquad (2.11.3)$$

O resultado obtido em (2.11.3) determina que a representação do estado de tensão no plano de Möhr de um material sujeito a um estado de deformação plástica plana é efectuada por intermédio de três círculos em que o valor da tensão principal intermédia σ_2 é a média aritmética das outras duas tensões principais.



Problema 2.12

Um cubo de um material metálico com uma tensão limite de elasticidade igual a σ_e é submetido a duas tensões normais σ_1 e $\sigma_3 = -\sigma_1 / 2$.

a) Determine o quociente $d\varepsilon_1 / d\varepsilon_2$. Utilize as relações tensão-incremento de extensão de Levy-Mises.

b) Determine o valor da tensão de corte máxima τ_{max} no limite de elasticidade utilizando o critério de plasticidade de von Mises.

Resolução

a) Sabendo que o estado de tensão é caracterizado pelas tensões principais,

$$\sigma_3 = -\sigma_1 / 2 \quad \text{e} \quad \sigma_2 = 0 \qquad (2.12.1)$$

e considerando as equações constitutivas de Levy-Mises associadas ao critério de plasticidade de von Mises,

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \\ d\varepsilon_2 &= \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right] \\ d\varepsilon_3 &= \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \end{aligned} \qquad (2.12.2)$$

é possível determinar o quociente entre os incrementos de extensão principais $d\varepsilon_1 / d\varepsilon_2$,

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = \frac{\sigma_1 - \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\sigma_1}{2}\right)}{0 - \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1}{2}\right)} = \frac{\sigma_1 + \frac{1}{4}\sigma_1}{0 - \frac{1}{4}\sigma_1} = \frac{\frac{5}{4}\sigma_1}{-\frac{1}{4}\sigma_1} = -5 \qquad (2.12.3)$$

b) De acordo com o critério de plasticidade de von Mises,

$$(\sigma_1-0)^2+\left(0-\left(-\frac{\sigma_1}{2}\right)\right)^2+\left(\sigma_1-\left(-\frac{\sigma_1}{2}\right)\right)^2=2\sigma_e^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_1=\frac{2}{\sqrt{7}}\sigma_e \tag{2.12.4}$$

como $\sigma_3=-\sigma_1/2$, o estado de tensão do cubo no limite de elasticidade escreve-se da forma a seguir indicada,

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{2}{\sqrt{7}}\sigma_e\\ \sigma_2&=0\\ \sigma_3&=-\frac{1}{\sqrt{7}}\sigma_e\end{aligned} \tag{2.12.5}$$

A tensão de corte máxima calcula-se a partir das tensões principais (2.12.5),

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{7}}\sigma_e-\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\sigma_e\right)}{2}=\frac{3}{2\sqrt{7}}\sigma_e \tag{2.12.6}$$

Problema 2.13

A deformação plástica de chapas é realizada em condições de tensão plana $\sigma_z=0$. Determine o quociente entre os incrementos de extensão principal $d\varepsilon_x : d\varepsilon_y : d\varepsilon_z$ numa chapa metálica submetida a um carregamento do tipo $\sigma_y=\sigma_x/4$, à tracção e proceda à sua representação gráfica no plano das tensões principais, utilizando,

a) O critério de plasticidade de von Mises.

b) O critério de plasticidade de Tresca.

Resolução

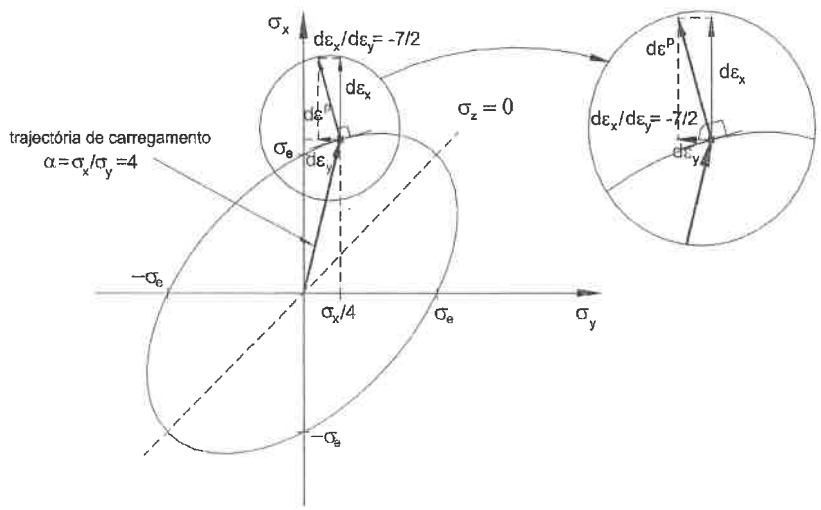
a) As equações constitutivas de Levy-Mises associadas ao critério de plasticidade de von Mises determinam as seguintes relações entre os incrementos de extensão plástica e as tensões aplicadas,

$$\begin{aligned}d\varepsilon_x&=\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_x-\frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right]\\ d\varepsilon_y&=\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_y-\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_z)\right]\\ d\varepsilon_z&=\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_z-\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\right]\end{aligned} \tag{2.13.1}$$

Substituindo nas equações anteriores o estado de tensão correspondente ao carregamento a que a chapa metálica se encontra submetida, $\sigma_y=\sigma_x/4$ com $\sigma_z=0$,

$$\begin{aligned}d\varepsilon_x&=\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_x-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_x}{4}+0\right)\right]=\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left(\frac{7}{8}\sigma_x\right)\\ d\varepsilon_y&=\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\frac{\sigma_x}{4}-\frac{1}{2}(\sigma_x+0)\right]=\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left(-\frac{1}{4}\sigma_x\right)\\ d\varepsilon_z&=\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[0-\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\frac{\sigma_x}{4}\right)\right]=\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left(-\frac{5}{8}\sigma_x\right)\end{aligned} \tag{2.13.2}$$

conclui-se que o quociente entre os incrementos de extensão principal $d\varepsilon_x : d\varepsilon_y : d\varepsilon_z$ é igual a $7 : -2 : -5$. A interpretação gráfica do resultado que acabou de ser obtido encontra-se ilustrada na figura seguinte,



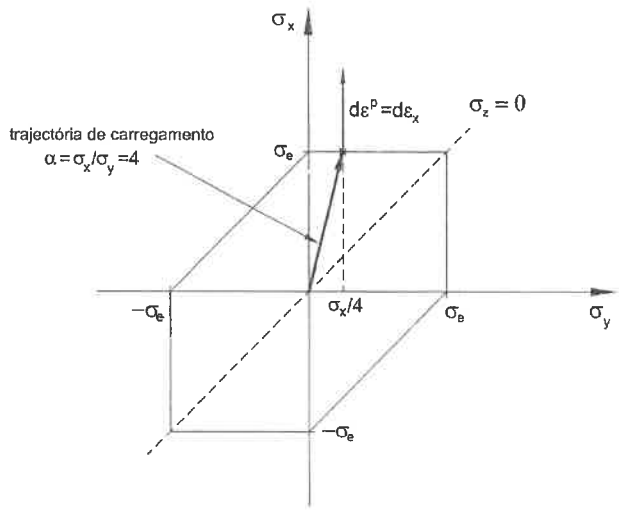
b) De acordo com a noção de potencial plástico o incremento de extensão plástica $d\varepsilon_{ij}^p$ pode ser obtido por derivação parcial de uma função potencial $g(\sigma_{ij})$ em relação às componentes da tensão σ_{ij},

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \qquad (2.13.3)$$

em que $d\lambda$ é uma constante de proporcionalidade positiva denominada multiplicador plástico.

Fazendo agora coincidir a função potencial com a função limite de elasticidade de Tresca é possível determinar os incrementos de extensão principal $d\varepsilon_x : d\varepsilon_y : d\varepsilon_z$ da chapa metálica. Importa referir que as equações de Levy-Mises, utilizadas na alínea anterior (equação (2.13.1)) poderiam ter sido obtidas do mesmo modo, através da noção de potencial plástico fazendo coincidir a função potencial com a função limite de elasticidade de von Mises.

O carregamento da chapa $\sigma_y = \sigma_x/4$ com $\sigma_z = 0$ corresponde a uma trajectória no 2º octante da projecção bidimensional do espaço das tensões principais ($\sigma_k = \sigma_z = 0$), conforme se pode observar na figura seguinte.



Neste octante as tensões principais valem,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x \\ \sigma_2 &= \sigma_y \\ \sigma_3 &= \sigma_z \end{aligned} \qquad (2.13.4)$$

a que corresponde o seguinte valor da tensão de corte máxima,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \qquad (2.13.5)$$

e que permite escrever o critério de plasticidade Tresca da forma a seguir indicada,

$$\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_e}{2} \Leftrightarrow \sigma_x - \sigma_z = \sigma_e \qquad (2.13.6)$$

Aplicando a noção de potencial plástico (2.13.3) ao critério de plasticidade de Tresca (2.13.6) os incrementos de extensão principal $d\varepsilon_x : d\varepsilon_y : d\varepsilon_z$ na chapa metálica valem,

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial(\sigma_x - \sigma_z)}{\partial \sigma_x} d\lambda = 1.d\lambda$$
$$d\varepsilon_y = \frac{\partial(\sigma_x - \sigma_z)}{\partial \sigma_y} d\lambda = 0 \qquad (2.13.7)$$
$$d\varepsilon_z = \frac{\partial(\sigma_x - \sigma_z)}{\partial \sigma_z} d\lambda = -1.d\lambda$$

Este resultado permite concluir que o quociente entre os incrementos de extensão principal na chapa $d\varepsilon_x : d\varepsilon_y : d\varepsilon_z$ é igual a $-1:0:-1$, a que corresponde o vector incremento de extensão plástica $d\varepsilon^p$ paralelo ao eixo das ordenadas e perpendicular à superfície limite de elasticidade, na projecção bidimensional do espaço das tensões principais ($\sigma_k = 0$, ver figura anterior).

Problema 2.14

Durante os ensaios experimentais de deformação plástica de chapas é habitual marcarem-se redes de círculos na superfície das chapas para avaliar o modo como o material se deforma.

Considere um ensaio no qual se marcaram grelhas de círculos com um diâmetro inicial igual a 3 mm que se transformaram em elipses com um eixo maior e menor respectivamente iguais a 3.6 e 2.9 mm.

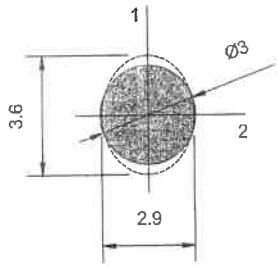
O comportamento mecânico do material da chapa pode ser aproximado por intermédio da seguinte equação empírica tensão-extensão (quantidades verdadeiras), $\bar{\sigma} = 300 + 40\bar{\varepsilon}$ MPa.

a) Determine, o valor da tensão efectiva $\bar{\sigma}$ admitindo que o quociente entre os incrementos de extensão $d\varepsilon_1 / d\varepsilon_2$ permanece constante durante a deformação plástica da chapa e que o estado de tensão é plano na direcção da espessura da chapa, $\sigma_3 = 0$.

b) Determine o valor das tensões σ_1 e σ_2 antes da descarga.

Resolução

a) A tensão efectiva após deformação plástica calcula-se através da equação tensão verdadeira-extensão verdadeira do material, conhecido o valor da extensão efectiva total. Após deformação plástica, os círculos transformam-se em elipses e as direcções dos eixos maior e menor de cada uma das elipses coincidem com as direcções principais locais. A figura seguinte ilustra a deformação de um círculo num referencial cujos eixos correspondem à maior e menor extensões principais no plano da chapa.



Os valores das extensões principais máxima ε_1 e mínima ε_2 no plano da chapa são os seguintes,

$$\varepsilon_1 = \ln\frac{3.6}{3} = 0.182 \qquad \varepsilon_2 = \ln\frac{2.9}{3} = -0.034 \tag{2.14.1}$$

e o valor da extensão principal ε_3 segundo a espessura (direcção normal ao plano da chapa) obtém-se através da condição de incompressibilidade,

$$\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -(0.182 - 0.034) = -0.148 \tag{2.14.2}$$

O valor da extensão efectiva após deformação plástica da chapa calcula-se através de,

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(0.182-(-0.034))^2+(-0.034-(-0.148))^2+(0.182-(-0.148))^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 0.194\end{aligned} \tag{2.14.3}$$

enquanto que o valor da tensão efectiva obtém-se através da relação tensão verdadeira-extensão verdadeira do material,

$$\bar{\sigma} = 300 + 40 \times 0.194 = 307.76 \text{ MPa} \tag{2.14.4}$$

b) O quociente entre as tensões principais no plano da chapa σ_2/σ_1 pode ser calculado através das equações constitutivas de Levy-Mises, tendo em consideração que o quociente entre os incrementos de extensão $d\varepsilon_2/d\varepsilon_1$ permanece constante durante a deformação plástica da chapa e que o estado de tensão é plano $\sigma_3 = 0$,

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\dfrac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2 - \dfrac{1}{2}(\sigma_1+0)\right]}{\dfrac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2+0)\right]} = \frac{\sigma_2 - \dfrac{1}{2}\sigma_1}{\sigma_1 - \dfrac{1}{2}\sigma_2} \tag{2.14.5}$$

Uma vez que a trajectória de deformação é constante, o quociente β entre as extensões principais no plano da chapa permanece constante e igual a,

$$\beta = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{0.034}{0.182} = -0.187 \tag{2.14.6}$$

A conjugação das equações (2.14.5) e (2.14.6) permite obter o quociente α., que permanece constante durante a deformação plástica, entre as tensões principais no plano da chapa,

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2\beta+1}{\beta+2} = \frac{2\times(-0.187)+1}{-0.187+2} = 0.345 \tag{2.14.7}$$

Como a expressão que permite calcular a tensão efectiva associada ao critério de plasticidade de von Mises em condições de tensão plana ($\sigma_3 = 0$) pode ser escrita da forma a seguir indicada,

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-0)^2+(0-\sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.14.8}$$

e tendo em consideração o valor $\alpha = 0.345$ calculado em (2.14.7) pode estabelecer-se a seguinte relação entre a maior tensão principal σ_1 e a tensão efectiva $\bar{\sigma}$,

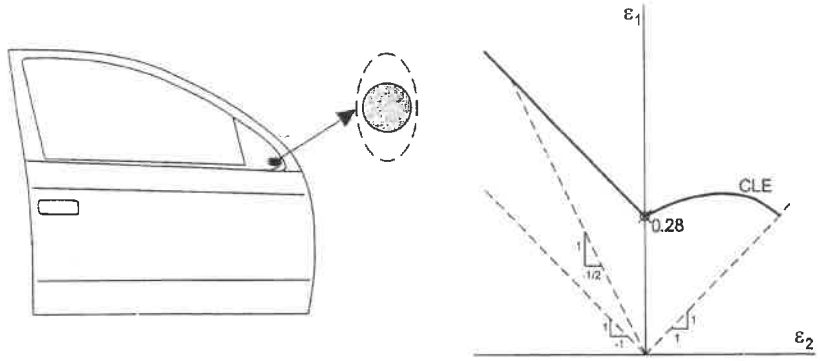
$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.345+0.345^2}} \tag{2.14.9}$$

Substituindo em (2.14.9) o valor da tensão efectiva $\bar{\sigma} = 307.76$ MPa que tinha sido calculado em (2.14.4), obtêm-se as tensões principais σ_1 e σ_2 no plano da chapa, antes da descarga,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{307.76}{\left(1-0.345+0.345^2\right)^{1/2}} = 349.8 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 0.345 \times 349.8 = 120.7 \text{ MPa}\end{aligned} \tag{2.14.10}$$

Problema 2.15

A região assinalada na figura é crítica durante o fabrico de uma porta de um veículo automóvel sendo habitual recorrer-se à marcação de grelhas de círculos na superfície das chapas para caracterizar a deformação do material durante a fase de desenvolvimento do processo de fabrico.



A porta é fabricada a partir de uma chapa de aço com uma curva tensão extensão do tipo $\overline{\sigma} = 420\,\overline{\varepsilon}^{0.28}$ MPa e com uma espessura inicial igual a 0.8 mm. A curva limite de enformabilidade (curva limite de estampagem – CLE) do aço encontra-se representada no lado direito da figura.

Os círculos marcados na superfície da chapa na região assinalada na figura têm um diâmetro inicial igual a 3 mm e após deformação transformam-se em elipses com o eixo maior e o eixo menor medindo respectivamente 3.35 mm e 3.05 mm.

a) Determine as extensões principais ε_1 e ε_2 na superfície da porta assinalada na figura e proceda à sua representação no plano das extensões principais.

b) Obtenha a extensão ε_3 e o valor da espessura final da chapa na região da porta assinalada na figura.

c) Calcule a extensão e a tensão efectivas na região da porta assinalada na figura.

d) Determine o valor do quociente σ_2 / σ_1 entre as tensões principais na região da porta assinalada na figura considerando que o estado de tensão é plano $\sigma_3 = 0$.

e) Calcule o valor das tensões principais na região da porta assinalada na figura.

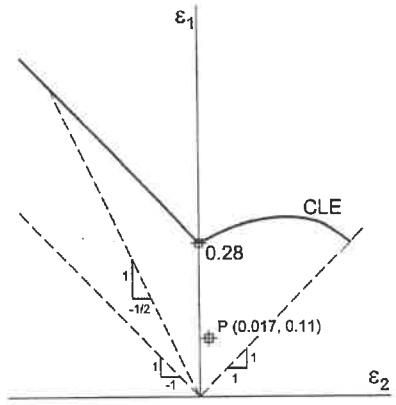
f) Indique o vector incremento de extensão plástica nessa região da porta.

Resolução

a) As extensões principais ε_1 e ε_2 na superfície da chapa na região da porta assinalada na figura calculam-se a partir das medições efectuadas no eixo maior e menor das elipses, obtendo-se,

$$\varepsilon_1 = \ln\frac{3.75}{3} = 0.11$$
$$\varepsilon_2 = \ln\frac{3.05}{3} = 0.017 \qquad (2.15.1)$$

A representação de (2.15.1) no plano das extensões principais é a que se apresenta na figura seguinte e permite concluir que a região da porta em análise está sujeita a níveis de extensão inferiores aos do limite de enformabilidade da chapa de aço e próximos da deformação plana.



b) A extensão ε_3 determina-se a partir da condição de incompressibilidade,

$$\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -(0.11 + 0.017) = -0.127 \qquad (2.15.2)$$

O valor da espessura final da chapa na região da porta assinalada na figura vale,

$$h = h_0 \exp^{\varepsilon_3} = 0.8 \times \exp^{-0.127} = 0.705 \text{ mm} \qquad (2.15.3)$$

c) A extensão efectiva $\bar{\varepsilon}$ calcula-se através das extensões principais, obtendo-se,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(0.11-0.017)^2+(0.017-(-0.127))^2+(-0.127-0.11)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ = 0.137 \qquad (2.15.4)$$

A tensão efectiva obtém-se substituindo o valor da extensão efectiva na lei de comportamento do material, obtendo-se,

$$\bar{\sigma} = 420\,\bar{\varepsilon}^{0.28} = 420\times 0.137^{0.28} = 240.73 \text{ N/mm}^2 \qquad (2.15.5)$$

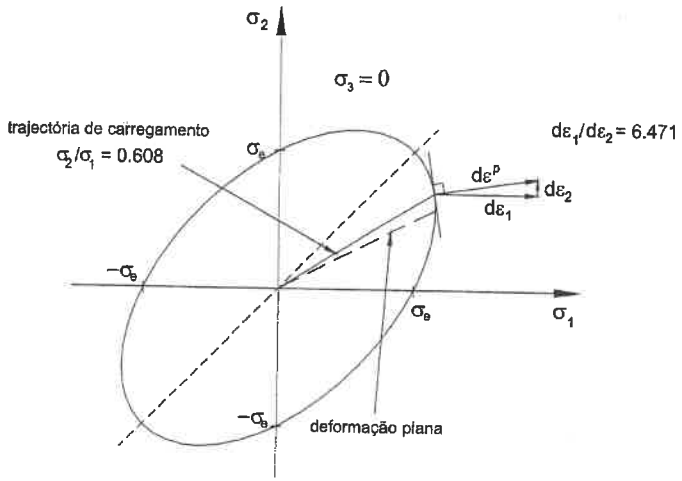
d) O quociente σ_2/σ_1 entre as tensões principais na região da porta que está indicada no enunciado do problema constrói-se por aplicação das equações constitutivas de Levy-Mises, considerando que o estado de tensão é plano $\sigma_3 = 0$ e que a trajectória de deformação é linear,

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{0.11}{0.017} = 6.471 = \frac{\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+0)\right]}{\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2-\frac{1}{2}(\sigma_1+0)\right]} \qquad (2.15.6)$$

obtendo-se,

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2+\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2}}{2\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2}+1} = \frac{2+\frac{0.11}{0.017}}{2\times\frac{0.11}{0.017}+1} = 0.608 \qquad (2.15.7)$$

O resultado obtido encontra-se representado na figura seguinte sendo importante salientar a proximidade da trajectória de carregamento da trajectória característica da deformação plana.



e) As tensões principais σ_1 e σ_2 calculam-se a partir do valor da tensão efectiva $\bar{\sigma}$ (2.15.5) e do valor do quociente σ_2/σ_1 (2.15.7) entre as tensões principais na região da porta que se encontra em análise.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-0.608\times\sigma_1)^2+(0.608\times\sigma_1-\sigma_3)^2+(0-\sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 240.73 \text{ N/mm}^2 \qquad (2.15.8)$$

obtendo-se,

$$\sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}}{0.873} = \frac{240.73}{0.873} = 275.75 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = 0.608\times\sigma_1 = 0.608\times 275.75 = 167.66 \text{ N/mm}^2 \qquad (2.15.9)$$

$$\sigma_3 = 0 \text{ N/mm}^2$$

f) O vector incremento de extensão plástica na região da porta em estudo obtém-se combinado o resultado obtido em (2.15.6) com a condição de incompressibilidade $d\varepsilon_{ii}=0$,

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2}=6.471 \qquad (2.15.10)$$

$$d\varepsilon_1+d\varepsilon_2+d\varepsilon_3=0$$

obtendo-se,

$$\frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_2}=-7.471 \qquad (2.15.11)$$

O vector incremento de extensão plástica $d\varepsilon_{ij}^{p}$ é definido da forma a seguir indicada,

$$d\varepsilon_1 : d\varepsilon_2 : d\varepsilon_3 = 6.471 : 1 : -7.471 = 1 : 0.154 : -1.154 \qquad (2.15.12)$$

Problema 2.16

Indique os incrementos de extensão principal $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ para o critério de plasticidade de Hosford.

Resolução

O critério de plasticidade anisotrópico de Hosford escreve-se da forma a seguir indicada,

$$F|\sigma_2-\sigma_3|^a+G|\sigma_3-\sigma_1|^a+H|\sigma_1-\sigma_2|^a=1 \qquad (2.16.1)$$

No caso particular em que $F=G=H=1/2\bar{\sigma}^a$ obtém-se a forma explícita do critério de plasticidade isotrópico de Hosford,

$$|\sigma_2-\sigma_3|^a+|\sigma_3-\sigma_1|^a+|\sigma_1-\sigma_2|^a=2\bar{\sigma}^a \qquad (2.16.2)$$

que é análogo ao critério de plasticidade de von Mises quando o expoente $a=2$. Admitindo que a plasticidade é associada, a função potencial $f(\sigma_{ij})$ vale,

$$f(\sigma_{ij})=|\sigma_2-\sigma_3|^a+|\sigma_3-\sigma_1|^a+|\sigma_1-\sigma_2|^a \qquad (2.16.3)$$

e, de acordo com a noção de potencial plástico, o vector incremento de extensão plástica $d\varepsilon_{ij}^{p}$ pode ser obtido por derivação parcial da função potencial $f(\sigma_{ij})$ em relação às componentes da tensão σ_{ij},

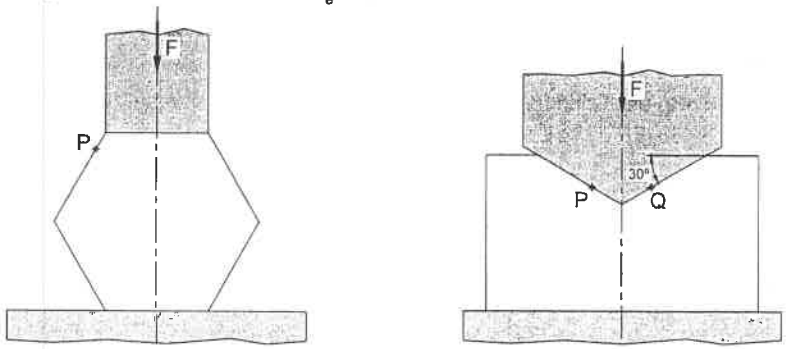
$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}d\lambda \qquad (2.16.4)$$

obtendo-se os incrementos de extensão principal,

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= a\,d\lambda\left[|\sigma_1-\sigma_2|^{a-1}-|\sigma_3-\sigma_1|^{a-1}\right] \\ d\varepsilon_2 &= a\,d\lambda\left[|\sigma_2-\sigma_3|^{a-1}-|\sigma_1-\sigma_2|^{a-1}\right] \\ d\varepsilon_3 &= a\,d\lambda\left[|\sigma_3-\sigma_1|^{a-1}-|\sigma_2-\sigma_3|^{a-1}\right] \end{aligned} \qquad (2.16.5)$$

Problema 2.17

Considere as operações de deformação plástica em condições de deformação plana que se encontram representadas na figura. O material das peças não sofre encruamento e tem uma tensão limite de elasticidade σ_e = 200 MPa.



(a) (b)

Para as operações de deformação plástica representadas na figura considere as seguintes situações:

1. Para a operação da figura (a), considere o ponto P situado na superfície livre da peça e numa região em deformação plástica. No instante considerado a secção transversal da peça tem a geometria de um hexágono regular.
2. Para a operação da figura (b), considere o ponto P situado onde está aplicada uma tensão normal de 250 MPa perpendicular à superfície da peça. Não existe atrito na interface material/cunho.
3. Para a operação da figura (b), considere o ponto P situado onde está aplicada uma tensão normal de 250 MPa perpendicular à superfície da peça. O atrito é máximo na interface material/cunho.

Para os vários casos enunciados anteriormente determine no ponto P respectivo:

a) O valor das tensões principais e a posição angular dessas direcções.

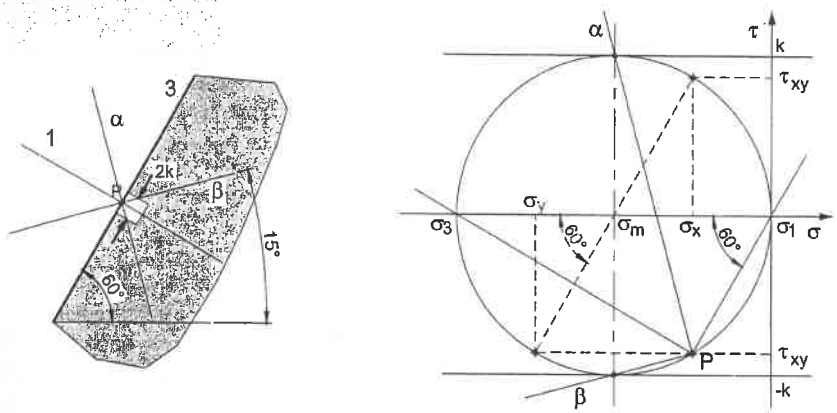
b) A posição angular das direcções de corte máximo e o valor das tensões que actuam segundo essas direcções.

c) O valor das tensões que actuam segundo as direcções horizontal e vertical.

Resolução

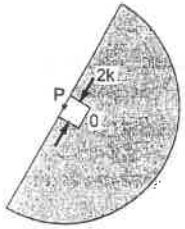
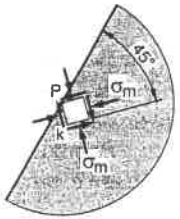
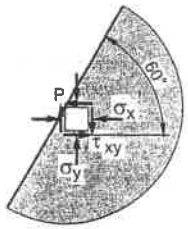
Caso 1.

Como o ponto P está situado numa superfície livre não existem tensões aplicadas sobre a superfície. Como o material nessa região está em deformação plástica, o critério de plasticidade de Tresca determina que na direcção perpendicular à superfície actua uma tensão normal de compressão igual a $2k$. Reproduzindo estas conclusões para o plano físico (a) e para o plano de Möhr (b), obtém-se o círculo de raio k tangente à origem, que se encontra representado figura seguinte.



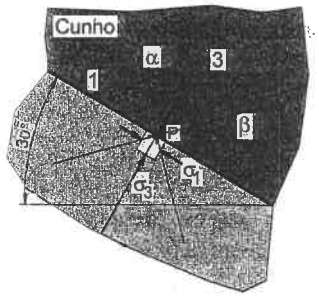
(a) (b)

O pólo do estado de tensão em P determina-se através da intersecção entre o círculo de Möhr e uma recta paralela à superfície livre da peça que passe pelo ponto (0,0). No que se refere ao valor das tensões, o cálculo encontra-se disponível na tabela seguinte.

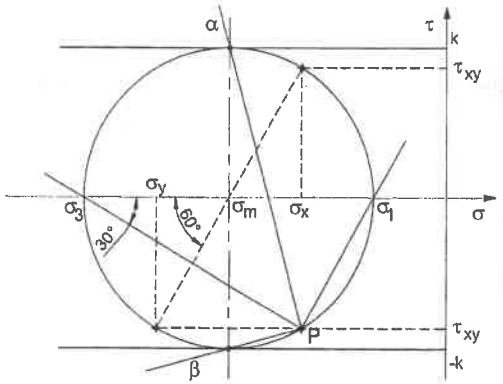
Direcções principais	*Direcções de corte máximo*	*Direcções vertical/horizontal*
		
$\sigma_1 = 0\,\text{MPa}$ $\sigma_3 = -200\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} = -100\,\text{MPa}$	$\sigma_m = -100\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} = -100\,\text{MPa}$ $k = 100\,\text{MPa}$	$\sigma_x = \sigma_m + k\cos 60° = -50\,\text{MPa}$ $\sigma_y = \sigma_m - k\cos 60° = -150\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} = -100\,\text{MPa}$ $\lvert\tau_{xy}\rvert = k\,\text{sen}\,60 = 86.6\,\text{MPa}$

Caso 2.

O ponto P está situado na interface de contacto entre o material e a ferramenta e encontra-se sujeito a uma tensão normal à superfície igual a -250 MPa resultante da actuação da ferramenta. Como não existe atrito na interface de contacto, esta direcção é principal e, da aplicação do critério de plasticidade de Tresca, conclui-se que na direcção perpendicular à superfície irá actuar uma tensão normal de compressão igual a -50 MPa. A representação gráfica destas conclusões para o plano físico (a) e para o plano de Möhr (b) encontra-se disponível na figura seguinte.

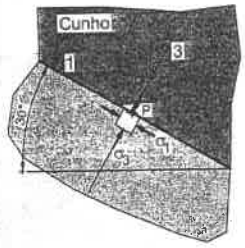
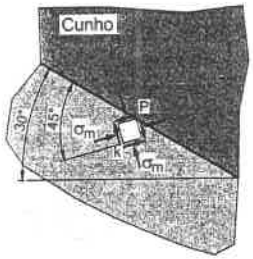
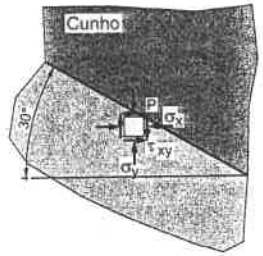


(a)



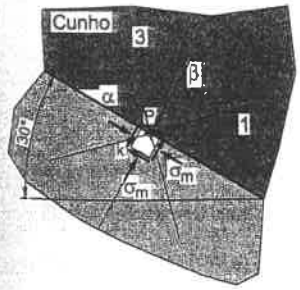
(b)

O pólo determina-se de forma análoga à efectuada para o caso 1 e o cálculo das tensões está disponível na tabela seguinte.

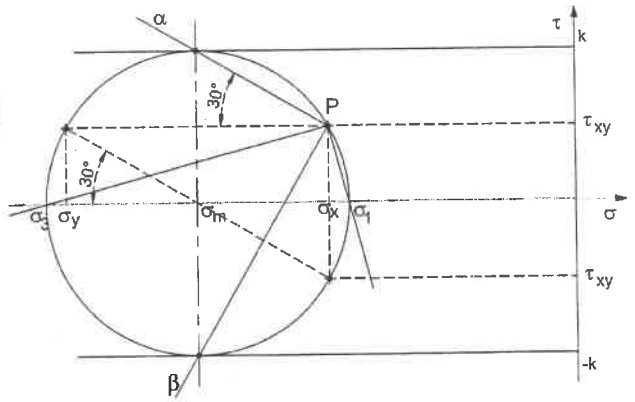
Direcções principais	*Direcções de corte máximo*	*Direcções vertical/horizontal*
		
$\sigma_1 = -50\,\text{MPa}$ $\sigma_3 = -250\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} = -150\,\text{MPa}$	$\sigma_m = -150\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} = -150\,\text{MPa}$ $k = 100\,\text{MPa}$	$\sigma_x = \sigma_m + k\cos 60° = -100\,\text{MPa}$ $\sigma_y = \sigma_m - k\cos 60° = -200\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} = -150\,\text{MPa}$ $\lvert\tau_{xy}\rvert = k\,\text{sen}\,60 = 86.6\,\text{MPa}$

Caso 3.

Como o ponto P situado na interface de contacto entre o material e a ferramenta está sujeito a uma tensão normal igual 250 MPa e como o atrito nessa superfície é máximo $(\tau_a = k)$ então essa direcção é de corte máximo.

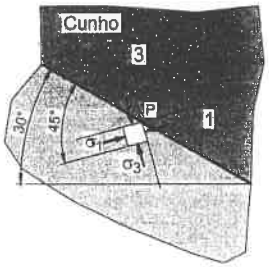
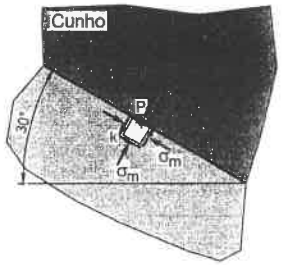
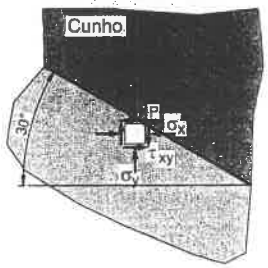


(a)



(b)

Conforme se observa na figura anterior o estado de tensão resultante fica caracterizado pela tensão média coincidir com a tensão normal aplicada na interface. O cálculo das tensões está disponível na tabela seguinte.

Direcções principais	*Direcções de corte máximo*	*Direcções vertical/horizontal*
		
$\sigma_1 = -150\,\text{MPa}$ $\sigma_3 = -350\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = -250\,\text{MPa}$	$\sigma_m = -250\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = -250\,\text{MPa}$ $k = 100\,\text{MPa}$	$\sigma_x = \sigma_m + k\cos 30° = -100\,\text{MPa}$ $\sigma_y = \sigma_m - k\cos 30° = -336.6\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = -163.4\,\text{MPa}$ $\lvert\tau_{xy}\rvert = k\ \text{sen}\ 30 = 50\,\text{MPa}$

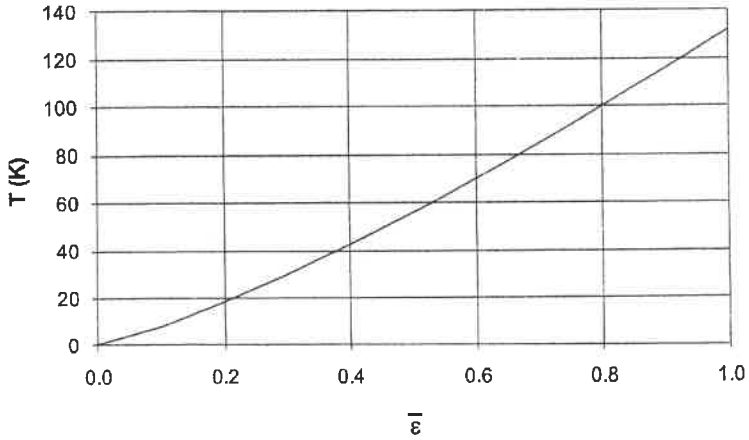
3. MÉTODO DA ENERGIA UNIFORME

Este capítulo apresenta um conjunto de problemas sobre a aplicação do método da energia uniforme a processos tecnológicos de deformação plástica de materiais metálicos.

Problema 3.1

Um cilindro de aço AISI 1015 com 20 mm de diâmetro e 30 mm de altura que se encontra à temperatura ambiente ($T_0 = 293.15\,\text{K}$) é comprimido entre pratos de maior extensão que a peça em condições adiabáticas e sem atrito.

Utilize o método da energia uniforme, admitindo que a percentagem de trabalho plástico que é convertido em calor $\alpha = 0.85$, para obter a evolução da temperatura do cilindro com a deformação que se encontra representada na figura.



Informações adicionais relativas ao aço AISI 1015,

Curva tensão-extensão, $\bar{\sigma} = 722\,(\bar{\varepsilon} + 0.02512)^{0.262}$ MPa;

Massa específica, $\rho = 7870$ kg/m^3;

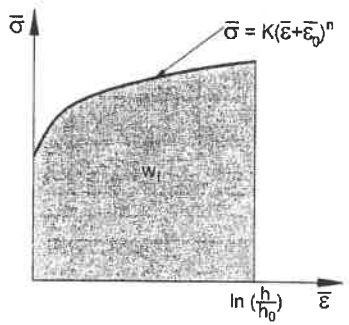
Calor específico, $c_p = 479$ J/kg.K;

Resolução

Em face dos dados do problema o aumento de temperatura que é possível determinar refere-se exclusivamente à deformação plástica que o material sofre durante a operação de compressão, em condições adiabáticas. Nestas condições o aumento de temperatura, ΔT, devido à deformação plástica do cilindro de aço pode ser estimado através de,

$$\Delta T = \frac{\alpha w_i}{\rho c} = \frac{\alpha \int \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}}{\rho c} \tag{3.1.1}$$

em que w_i é o trabalho ideal por unidade de volume, α é a percentagem de trabalho plástico que é convertido em calor, ρ é a densidade do material e C é o calor específico do material.



O trabalho ideal de deformação por unidade de volume corresponde ao valor da área sob a curva da tensão efectiva - extensão efectiva (ver figura anterior) e determina-se do modo a seguir indicado,

$$\begin{aligned} w_i &= \int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = \int_0^{\bar{\varepsilon}} 722\,(\bar{\varepsilon}+0.02512)^{0.262} d\bar{\varepsilon} \\ &= \frac{722\times(\bar{\varepsilon}+0.02512)^{1.262}}{1.262} - \frac{722\times(0.02512)^{1.262}}{1.262} \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Substituindo este resultado na equação (3.1.1), obtém-se o aumento de temperatura devido à deformação plástica, em função da extensão axial/efectiva do cilindro, $\bar{\varepsilon}$,

$$\Delta T = \frac{\alpha w_i}{\rho c} = \frac{0.85\times 722\times 10^6 \times \left[(\bar{\varepsilon}+0.02512)^{1.262} - (0.02512)^{1.262}\right]}{1.262\times 7870\times 479} \tag{3.1.3}$$

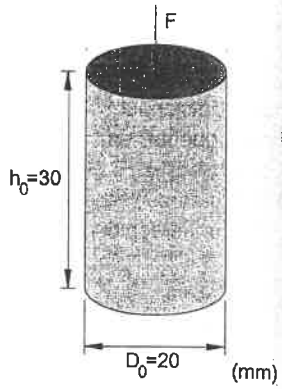
que adicionado à temperatura inicial do cilindro, T_0, permite obter a temperatura do componente em cada instante da deformação em função da respectiva extensão axial/efectiva, $\bar{\varepsilon}$. Considerando diferentes valores de extensão, $\bar{\varepsilon}$, na expressão anterior obtêm-se os respectivos valores para o aumento de temperatura e para a temperatura do cilindro de aço durante a operação de compressão uniaxial:

$\bar{\varepsilon}$	ΔT (K)	$T = T_0 + \Delta T$ (K)
0.1	8.13	301.28
0.2	18.41	311.56
0.3	30.01	323.16
0.4	42.60	335.75
0.5	55.99	349.14
0.6	70.07	363.22
0.7	84.75	377.90
0.8	99.98	393.13
0.9	115.70	408.85
1.0	131.87	425.02

A representação gráfica destes resultados permite obter a evolução da temperatura do cilindro com a deformação que se encontra representada na figura do enunciado deste problema.

Problema 3.2

Um cilindro de latão C26000 (70 Cu-30 Zn) com 20 mm de diâmetro e 30 mm de altura é comprimido, entre pratos de maior extensão que a peça e sem atrito, numa prensa hidráulica com uma velocidade constante, v = 40 mm/s, até ser obtida uma altura final igual a 8 mm.



a) Calcule o valor da força de compressão no instante correspondente ao final da operação. Admita que a operação de compressão se realiza a frio.

b) Obtenha a evolução da força de compressão com o deslocamento do prato superior.

c) Determine a quantidade de energia a fornecer pela prensa para se realizar a totalidade da operação de compressão.

d) Apresente uma estimativa do valor da potência que é exigida à prensa hidráulica no instante final da operação de compressão.

e) Calcule o valor da força de compressão no instante correspondente ao final da operação. Admita que a operação de compressão se realiza a quente (600°C).

Informações adicionais relativas ao latão C26000:

Curva tensão-extensão a frio (25°C), $\overline{\sigma} = 500\,\overline{\varepsilon}^{0.41}$ MPa;

Curva tensão-extensão a quente (600°C), $\overline{\sigma} = 100\,\dot{\overline{\varepsilon}}^{0.24}$ MPa;

Resolução

a) No instante final da operação de compressão uniaxial sem atrito a extensão efectiva vale,

$$\overline{\varepsilon} = \ln\left(\frac{h}{h_0}\right) = \ln\left(\frac{30}{8}\right) = 1.32 \qquad (3.2.1)$$

Conhecida a extensão axial/efectiva no final da operação, a tensão de axial/efectiva, $\overline{\sigma}$, no interior do cilindro pode ser determinada a partir da curva de comportamento mecânico do latão,

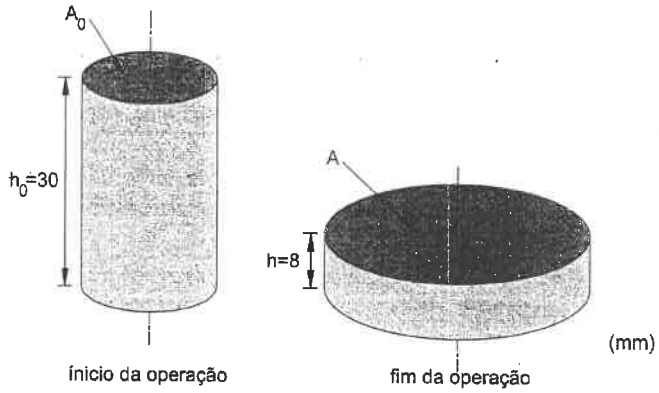
$$\overline{\sigma} = 500\,(1.32)^{0.41} = 560.6 \ \text{MPa} \qquad (3.2.2)$$

O correspondente valor da força de compressão obtém-se através de,

$$F = \overline{\sigma}\,A \qquad (3.2.3)$$

em que A é a área de contacto entre o material e os pratos compressores, a qual pode ser conhecida em qualquer instante da deformação através da conservação de volume. Em particular, no final da operação conhecida a altura da peça, pode-se determinar a área final de contacto entre o provete cilíndrico e a ferramenta, ilustrada na figura seguinte, através de,

$$V_0 = V \Leftrightarrow \pi\left(\frac{20}{2}\right)^2 \times 30 = A \times 8 \Leftrightarrow A = 1178.1 \ \text{mm}^2 \qquad (3.2.4)$$



Assim, de acordo com a equação (3.2.2) a força de compressão no final da operação é,

$$F = 560.6 \times 1178.1 = 660442.9 \ \text{N} \cong 67.4 \ \text{ton} \qquad (3.2.5)$$

b) Para representar a evolução da força de compressão com o deslocamento do prato superior, segue-se a metodologia utilizada na alínea anterior aplicada a diferentes instantes da operação, ou seja, para diferentes valores de altura do provete cilíndrico, h. A

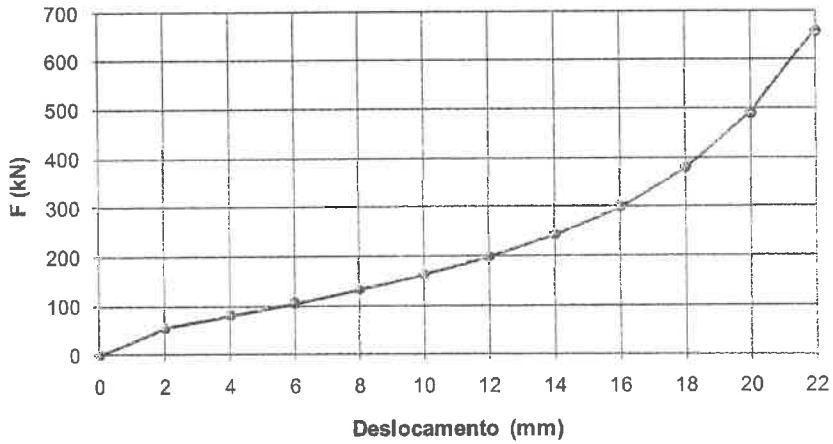
tabela seguinte sintetiza os resultados obtidos relativamente à área de contacto do provete com os pratos compressores, A, aos valores efectivos de extensão e tensão, $\bar{\varepsilon}$ e $\bar{\sigma}$, e à força de compressão, F.

h (mm)	A (mm^2)	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\sigma}$ (MPa)	F (N)
28	336.60	0.07	167.06	56232.4
26	362.49	0.14	225.31	81672.6
24	392.70	0.22	270.33	106158.6
22	428.40	0.31	309.4	132547.0
20	471.24	0.41	345.38	162756.9
18	523.60	0.51	379.63	198774.3
16	589.05	0.63	413.34	243477.9
14	673.20	0.76	447.31	301129.1
12	785.40	0.92	482.4	378877.0
10	942.48	1.10	519.66	489769.2
8	1178.10	1.32	560.59	660431.1

Estes resultados permitem representar a evolução da força de compressão com o deslocamento do prato superior durante a deformação plástica do cilindro de latão, na figura seguinte.

c) A energia necessária para efectuar a compressão uniaxial do provete de latão pode ser determinada através do produto do trabalho plástico ou ideal por unidade de volume, w_i, necessário à realização da deformação plástica do provete cilíndrico pelo seu volume, V,

$$W_i = V \times w_i = V \times \int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon} = \\ = \frac{\pi \times \left(20 \times 10^{-3}\right)^2}{4} \times 30 \times 10^{-3} \times \frac{500\,(1.32)^{1.41}}{1.41} \times 10^6 = 4943.5\ \text{J} \qquad (3.2.6)$$



Alternativamente esta energia pode ser determinada através do cálculo da área do gráfico obtido na alínea anterior. Considerando os valores de força que foram calculados na alínea anterior em instantes discretos do deslocamento do prato compressor, obtém-se o seguinte valor de energia para efectuar a compressão uniaxial do provete de latão,

$$W_i = \sum Áreas\,(F,d) = 4963.2\ \text{J} \qquad (3.2.7)$$

A diferença entre os valores de energia obtidos deve-se ao facto do cálculo efectuado através da área do gráfico que representa a evolução força de compressão com o deslocamento do prato compressor ter sido efectuado com valores discretos desta evolução. Quanto maior for o número de pontos considerados neste cálculo, mais próximo este valor de energia (3.2.7) está da energia calculada através da integração da curva tensão-extensão do material (3.2.6).

d) O valor da potência necessária no final da operação estima-se através do produto da força de compressão pela velocidade de actuação do prato compressor no instante,

$$P = F \times v = 660442.9 \times 40 \times 10^{-3} = 26417.71\,\text{W} \cong 26.42\ \text{kW} \qquad (3.2.8)$$

e) Caso a operação de deformação plástica se realizasse a quente, a temperaturas superiores à temperatura de recristalização do material, a tensão de escoamento seria significativamente influenciada pela velocidade de deformação e a sua lei de comportamento mecânico passaria a ser função da velocidade de deformação. Torna-se então necessário, para determinar a força de compressão no final da operação a 600°C, conhecer a velocidade de deformação efectiva do material neste instante,

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{v}{h} = \frac{40}{8} = 5\ s^{-1} \qquad (3.2.9)$$

De acordo com a curva tensão-velocidade de deformação do latão C26000 à temperatura a que se realiza a operação (600°C), a tensão efectiva no final da operação é,

$$\bar{\sigma} = 100\,(5)^{0.24} = 147.15\ \text{MPa} \qquad (3.2.10)$$

Então, de acordo com a equação (3.2.3), sabendo a área de contacto entre o provete cilíndrico e a ferramenta no instante final (3.2.4), obtém-se o seguinte valor para a força de compressão no final da operação,

$$F = \bar{\sigma} \times A = 147.15 \times 1178.1 = 173357.4\ \text{N} \cong 17.7\ \text{ton} \qquad (3.2.11)$$

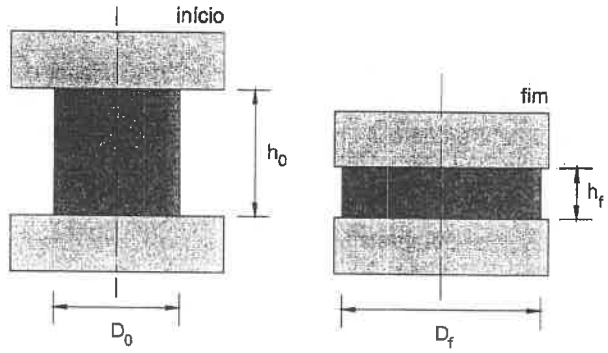
A comparação deste resultado com o correspondente valor para realizar a operação a frio, determinado na alínea a) (3.2.5),

$$\frac{F_{quente}}{F_{frio}} = \frac{173357.4}{660442.9} = 0.262 \cong 26.2\% \qquad (3.2.12)$$

permite concluir que ao realizarmos a operação a quente, com todas as desvantagens inerentes, a prensa necessita de ter uma disponibilidade de força cerca de 26.2% inferior à que seria necessária para realizar a operação a frio.

Problema 3.3

Um cilindro com 25 mm de diâmetro e 25 mm de altura é comprimido a frio, entre pratos de maior extensão que a peça e sem atrito, até ser alcançada uma redução em altura igual a 60%. Represente graficamente a evolução da força de compressão com a redução em altura.



Informações relativas ao material,

Curva tensão-extensão a frio (25°C), $\bar{\sigma} = 350\ \bar{\varepsilon}^{0.54}$ MPa

Resolução

Conforme foi analisado no problema anterior (problema 3.2) a força de compressão durante a compressão uniaxial sem atrito de um provete cilíndrico calcula-se multiplicando a tensão efectiva no interior do provete, $\bar{\sigma}$, pela área de contacto deste com os pratos compressores, A, em cada instante (3.2.3). O valor da tensão efectiva determina-se através da equação empírica tensão-extensão do material, conhecendo o valor da extensão efectiva no instante $\bar{\varepsilon}$. A área de contacto A estima-se considerando a conservação de volume característica da deformação plástica dos materiais metálicos.

Como é objectivo deste problema obter a evolução da força de compressão com a redução em altura,

$$r = \frac{h_0 - h}{h_0} \qquad (3.3.1)$$

a determinação das variáveis necessárias à sua obtenção será efectuada em função do valor r para um instante genérico da compressão uniaxial. Assim, a extensão efectiva, cujo valor sob um estado de compressão uniaxial, corresponde ao valor absoluto da extensão verdadeira axial determina-se do seguinte modo,

$$\bar{\varepsilon} = \ln\left(\frac{h_0}{h}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-r}\right) \qquad (3.3.2)$$

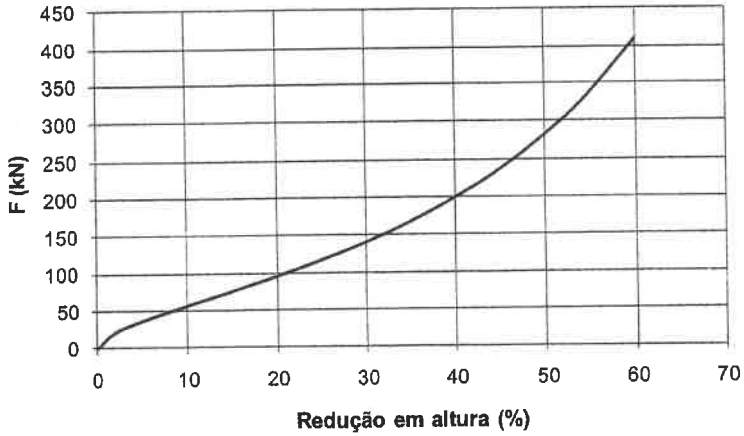
Conhecida a extensão efectiva, a tensão de efectiva $\bar{\sigma}$ no interior do cilindro pode ser determinada através da equação empírica tensão efectiva - extensão efectiva do material, $\bar{\sigma} = 350\,\bar{\varepsilon}^{0.54}$. O valor da área de contacto entre o cilindro e os pratos compressores em cada instante da deformação obtém-se através da conservação de volume do seguinte modo,

$$A_0 h_0 = Ah \Leftrightarrow A = A_0 \frac{h_0}{h} = A_0 \frac{1}{1-r} \qquad (3.3.3)$$

Em face do exposto, para determinar a evolução da força de compressão com a redução em altura do provete cilíndrico, r, considerem-se sete instantes da operação de compressão, incluindo o instante final. A tabela seguinte sintetiza os resultados obtidos, através da metodologia descrita.

r (%)	A (mm^2)	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\sigma}$ (MPa)	F (kN)
5	516.71	0.05	70.39	36.37
10	545.42	0.11	103.83	56.63
20	577.50	0.16	131.21	75.77
30	613.59	0.22	155.71	95.54
40	654.50	0.29	178.60	116.89
50	701.25	0.36	200.58	140.66
60	755.19	0.43	222.11	167.74

A representação gráfica da evolução da força de compressão com a redução em altura encontra-se representada na figura seguinte.



Problema 3.4

Um varão de cobre (99.94%) é extrudido a frio de modo a obter uma tensão limite de elasticidade igual a 320 MPa. A secção transversal do varão extrudido deverá, por imposições de projecto, ser igual a 500 mm^2.

a) Indique qual deverá ser o valor do diâmetro inicial do varão a extrudir e calcule a redução de área que se encontra associada a esta operação.

b) Determine os valores da pressão e da força de extrusão.

Informações adicionais relativas ao cobre (99.94%):

Curva tensão efectiva-extensão efectiva a frio (25°C), $\bar{\sigma} = 450\ \bar{\varepsilon}^{0.33}$ MPa.

Resolução

a) Sabendo que a tensão limite de elasticidade do varão obtido na operação de extrusão é igual a 320 MPa e uma vez que se conhece a curva tensão-extensão do material então o valor da extensão efectiva máxima imposta ao varão no final da operação determina-se do seguinte modo,

$$320 = 450\bar{\varepsilon}^{0.33} \Leftrightarrow \bar{\varepsilon} = 0.356 \tag{3.4.1}$$

Como nas operações de extrusão a extensão efectiva devida à deformação plástica no final da operação calcula-se em função do quociente entre as aéreas da secção inicial, A_0, e final, A, do seguinte modo (ver problema 8.1),

$$\bar{\varepsilon} = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \tag{3.4.2}$$

então, igualando as equações (3.4.1) e (3.4.2), obtém-se o valor que a área da secção transversal do varão inicial deverá ter,

$$0.356 = \ln\left(\frac{A_0}{500}\right) \Leftrightarrow A_0 = 500 \times \exp(0.356) = 713.8\ mm^2 \tag{3.4.3}$$

ou seja, um diâmetro inicial igual a,

$$A_0 = \pi\frac{d_0^2}{4} \Leftrightarrow 713.8 = \pi\frac{d_0^2}{4} \Leftrightarrow d_0 = 30.15\ mm \tag{3.4.4}$$

a que corresponde uma redução de área de,

$$r = \frac{A_0 - A}{A_0} = \frac{713.8 - 500}{713.8} \cong 30\% \tag{3.4.5}$$

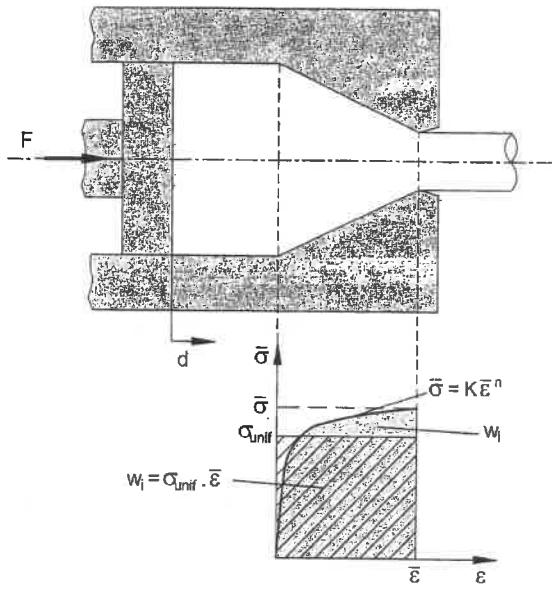
b) O processo de extrusão sem atrito é um processo estacionário, em que a força que é necessário aplicar para efectuar a deformação plástica é constante durante a operação. A determinação do seu valor através do método da energia uniforme, efectua-se a partir do equilíbrio energético entre o trabalho plástico ou ideal e o trabalho externo realizado pela força de extrusão, F. O trabalho plástico, W_i, determina-se a partir do produto do trabalho plástico por unidade de volume, w_i, pelo volume de material que se deforma, V. Uma vez que o trabalho ideal por unidade de volume corresponde ao valor da área sobre a curva tensão efectiva - extensão efectiva (representado na figura seguinte) então, o valor do trabalho plástico determina-se do seguinte modo,

$$W_i = V.w_i = V\int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon} \tag{3.4.6}$$

em que $\bar{\varepsilon}$ é o valor da extensão efectiva total (no final da operação). O volume de material deformado durante a operação de extrusão pode ser calculado através do produto da área inicial do varão pelo deslocamento do êmbolo de extrusão, d.

Com base na noção de trabalho plástico por unidade de volume, w_i, é possível definir o conceito de tensão média que actua no material no interior da matriz de extrusão, σ_{unif}, estabelecendo a igualdade das áreas assinaladas no gráfico da curva da tensão efectiva - extensão efectiva da figura anterior, do seguinte modo,

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon} = \sigma_{unif} \times \bar{\varepsilon} \Leftrightarrow \sigma_{unif} = \frac{\int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \tag{3.4.7}$$



É então possível reescrever a equação (3.4.6), que permite contabilizar o trabalho plástico ou ideal necessário à deformação plástica, em função da tensão média, σ_{unif},

$$W_i = V \int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon} = V \times \sigma_{unif} \times \bar{\varepsilon} \tag{3.4.8}$$

O trabalho externo realizado pela força de extrusão, é contabilizado através do produto entre a força de extrusão, F, e o deslocamento efectuado pelo êmbolo de extrusão durante a operação, d, do seguinte modo,

$$W = F \times d \tag{3.4.9}$$

Efectuando o equilíbrio energético entre o trabalho plástico ou ideal e o trabalho externo realizado pela força de extrusão, através igualdade entre as expressões (3.4.8) e (3.4.9), obtém-se o valor da força necessária para realizar a extrusão do varão,

$$F = \sigma_{unif}\ \bar{\varepsilon}\ A_0 \tag{3.4.10}$$

em que A_0 é a área da secção inicial do varão, onde actua o êmbolo de extrusão.

Finalmente, a pressão de extrusão determina-se através da divisão da força de extrusão (3.4.10) pela área do êmbolo, obtendo-se a seguinte expressão,

$$p = \sigma_{unif}\ \bar{\varepsilon} \tag{3.4.11}$$

Sempre que o material a deformar plasticamente possua uma curva tensão-extensão do tipo Ludwik-Hollomon, $\bar{\sigma} = K\,\bar{\varepsilon}^n$, como no presente problema, de acordo com a equação (3.4.7), a tensão média que actua no material é,

$$\sigma_{unif} = \frac{\int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{\int_0^{\bar{\varepsilon}} K\,\bar{\varepsilon}^n\, d\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{\frac{K\,\bar{\varepsilon}^{n+1}}{n+1}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{K\,\bar{\varepsilon}^n}{n+1} \tag{3.4.12}$$

Então, na operação de extrusão do varão de cobre, tendo em consideração o valor máximo da extensão efectiva imposto pela geometria operação (3.4.1) e a lei de comportamento mecânico do material, a tensão média do material no interior da matriz é,

$$\sigma_{unif} = \frac{450\ (0.356)^{0.33}}{0.33+1} = 240.6\,\text{MPa} \tag{3.4.13}$$

Logo, a pressão que é necessário aplicar para realizar a operação de extrusão (3.4.11) é,

$$p = 240.6 \times 0.356 = 85.7\,\text{MPa} \tag{3.4.14}$$

e a força de extrusão (3.4.10) é,

$$F = p \times A_0 = 85.7 \times 713.8 = 61172.7\,\text{N} \tag{3.4.15}$$

Problema 3.5

Um varão de Alumínio AA1100-O com um diâmetro inicial igual a 150 mm é sujeito a uma operação de extrusão directa a frio destinada a obter um diâmetro final igual a 50 mm.

A energia consumida na deformação redundante é igual a 40% da energia necessária à deformação plástica (energia ideal) enquanto que a energia consumida por atrito é igual a 25% da energia total necessária à realização da operação de extrusão.

a) Calcule a tensão limite de elasticidade do varão extrudido.

b) Calcule a força de extrusão.

Informações adicionais relativas ao Alumínio AA1100-O:

Comportamento mecânico, $\overline{\sigma} = 180\ \overline{\varepsilon}^{0.20}$ MPa.

Resolução

a) A tensão limite de elasticidade do varão extrudido obtém-se através da lei de comportamento mecânico do material a partir do valor da extensão efectiva máxima imposta ao varão no final da operação, uma vez que o varão extrudido só voltará a deformar-se plasticamente quando for atingido o valor de tensão (efectiva) para o qual a deformação plástica tinha terminado na operação de fabrico. Sabendo que nas operações de extrusão a extensão efectiva devida à deformação plástica no final da operação se determina através de (3.4.2), então, nesta operação a extensão efectiva máxima imposta ao varão é,

$$\overline{\varepsilon} = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \ln\left(\frac{{d_0}^2}{d^2}\right) = \ln\left(\frac{150^2}{50^2}\right) = 2.197 \qquad (3.5.1)$$

e de acordo com lei de comportamento mecânico do material a tensão limite de elasticidade do varão extrudido é,

$$\overline{\sigma} = 180\ (2.197)^{0.2} = 210.69 \quad \text{MPa} \qquad (3.5.2)$$

b) No problema anterior abordou-se a aplicação do método da energia uniforme para estimar a força e a pressão de extrusão, admitindo que o trabalho realizado pela força de extrusão, F, seria utilizado exclusivamente na deformação plástica do material. Porém,

nos processos de deformação plástica para além da energia de deformação plástica, W_i, é ainda necessário fornecer energia para vencer as forças de atrito entre o material e as ferramentas, W_a, e energia para a deformação redundante, W_r. Ou seja, o trabalho total para efectuar a operação corresponde à soma das seguintes parcelas,

$$W = W_i + W_r + W_a \qquad (3.5.3)$$

Uma forma de contabilizar os efeitos do atrito e da deformação redundante no método da energia uniforme é integrá-los através do conceito de eficiência energética, η,

$$\eta = \frac{W_i}{W} \qquad (3.5.4)$$

Das equações anteriores resulta que o trabalho necessário para realizar a operação de fabrico se relaciona com o trabalho para efectuar a deformação plástica do material do seguinte modo,

$$W = \frac{1}{\eta} W_i \qquad (3.5.5)$$

Desta forma, do equilíbrio energético entre o trabalho externo realizado pela força de extrusão e o trabalho necessário para realizar a operação de extrusão, seguindo a metodologia de resolução do exercício anterior, resulta,

$$F = \frac{1}{\eta}\sigma_{unif}\ \overline{\varepsilon}\ A_0 \qquad (3.5.6)$$

Torna-se então necessário determinar o valor médio da tensão na zona em deformação plástica, σ_{unif}, cuja determinação para materiais que possuam uma curva tensão-extensão do tipo Ludwik-Hollomon, $\overline{\sigma} = K\,\overline{\varepsilon}^{n}$, de acordo com a equação (3.4.10), se efectua do seguinte modo,

$$\sigma_{unif} = \frac{180(2.197)^{0.2}}{0.2+1} = 175.6 \quad \text{MPa} \qquad (3.5.7)$$

O valor da eficiência energética, que de acordo com os dados do enunciado, e as equações (3.5.3) e (3.5.4) é,

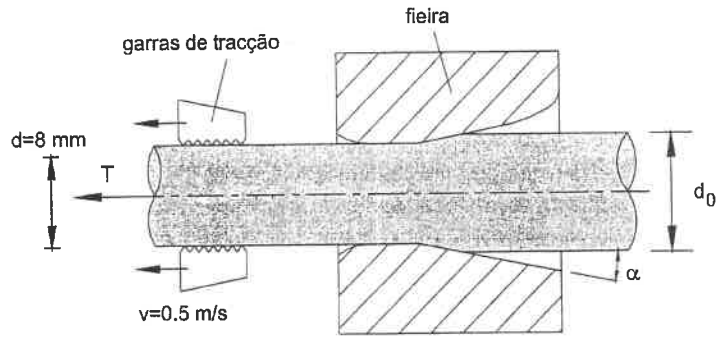
$$W = W_i + W_r + W_a = W_i + 0.4\,W_i + 0.25\,W \;\Rightarrow\; \eta = \frac{W_i}{W} = \frac{(1-0.25)}{1.4} = 0.536 \qquad (3.5.8)$$

Em face dos resultados obtidos é então possível estimar a força de extrusão (3.5.6),

$$F = \frac{1}{0.536} \times 175.6 \times 2.197 \times \frac{\pi \times 150^2}{4} = 12719269.8 \text{ N} \cong 12727 \text{ kN} \qquad (3.5.9)$$

Problema 3.6

Um arame (ou fio) de Latão 70Cu-30Zn recozido com 10 mm de diâmetro é submetido a uma operação de trefilagem destinada a obter um diâmetro final igual a 8 mm.



A trefilagem é efectuada a velocidade constante e igual a 0.5 m/s.

A soma da energia consumida para vencer as forças de atrito e a deformação redundante é igual a 40% da energia necessária à deformação plástica (energia ideal).

a) Calcule a força de trefilagem, T.

b) Calcule a potência necessária para realizar a trefilagem.

Informações adicionais relativas ao material:

Comportamento mecânico do Latão 70Cu-30Zn, $\overline{\sigma} = 895\,\overline{\varepsilon}^{0.49}$ MPa.

Resolução

a) A aplicação do método da energia uniforme a operações de fabrico por trefilagem é em tudo similar à metodologia aplicada para as operações de extrusão nos problemas anteriores. A principal diferença decorre das operações trefilagem serem realizadas aplicando uma força de tracção à saída da fieira, a força de trefilagem, T. Seguindo o procedimento de cálculo dos problemas anteriores, a força de trefilagem calcula-se do seguinte modo,

$$T = \frac{1}{\eta}\sigma_{unif}\ \bar{\varepsilon}\ A \tag{3.6.1}$$

em que A é a área da secção transversal do fio no final da operação.

Sabendo que a extensão efectiva do arame no final da operação é,

$$\bar{\varepsilon} = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \ln\left(\frac{d_0^2}{d^2}\right) = \ln\left(\frac{10^1}{8^2}\right) = 0.446 \tag{3.6.2}$$

o valor médio da tensão da zona em deformação plástica, σ_{unif}, tendo presente que o comportamento mecânico do material pode ser aproximado através de uma lei rígido-plástica do tipo Ludwik-Hollomon, determina-se de acordo com (3.4.10), do seguinte modo,

$$\sigma_{unif} = \frac{895\ (0.446)^{0.49}}{0.49+1} = 404.53\ \ \text{MPa} \tag{3.6.3}$$

De acordo com os dados da operação de fabrico relativos às energias consumidas a energia total é,

$$W = W_i + W_a + W_r = W_i + 0.4\,W_i = 1.4\,W_i \tag{3.6.4}$$

e a eficiência da operação é dada por,

$$\eta = \frac{W_i}{W} = \frac{1}{1.4} = 0.714 \tag{3.6.5}$$

Nestas condições, a força necessária à realização da operação de trefilagem, determinada através da aplicação do método da energia uniforme (3.6.1) é,

$$T = \frac{1}{\eta}\sigma_{unif}\,\bar{\varepsilon}A = \frac{1}{0.714} \times 404.53 \times 0.446 \times \frac{\pi \times 8^2}{4} = 12710.1\ \ N \cong 13\ \text{kN} \tag{3.6.6}$$

b) O valor da potência a fornecer pela máquina-ferramenta para efectuar a operação de trefilagem determina-se multiplicando a força de trefilagem pela velocidade com que se deslocam as garras de tracção, v,

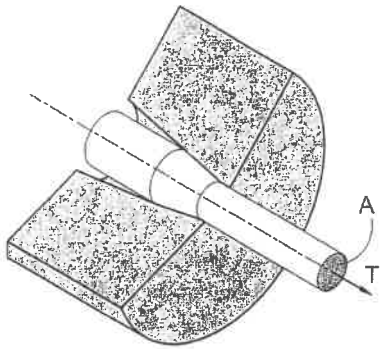
$$P = T.v = 12710.1 \times 0.5 = 6355.1\ \ \text{W} \tag{3.6.7}$$

Problema 3.7

Um arame (fio) com 5 mm de diâmetro é submetido a uma operação de trefilagem. A soma da energia consumida para vencer as forças de atrito e a deformação redundante é igual a 25% da energia necessária à deformação plástica (energia ideal).

a) Calcule a extensão admissível da operação.

b) Calcule o valor do diâmetro mínimo admissível à saída da fieira (matriz).



Informações adicionais relativas ao material:

Equação tensão-extensão empírica rígido-plástica do material, $\bar{\sigma} = 50 + 150\bar{\varepsilon}$ MPa.

Resolução

a) A extensão máxima que se pode atingir numa operação de trefilagem está condicionada pela tensão axial, t, que é necessário aplicar à saída da fieira para realizar a operação, resultante da acção da força de trefilagem, T. Esta tensão deve ser inferior à tensão efectiva, $\bar{\sigma}$, necessária à redução de secção do fio à saída da fieira, pois, se assim não for, o material não deformará plasticamente no interior da matriz e a deformação plástica passará a ocorrer no fio à saída da fieira. Pelo que se conclui que o limite de enformabilidade na operação de trefilagem estabelece-se a partir da seguinte condição,

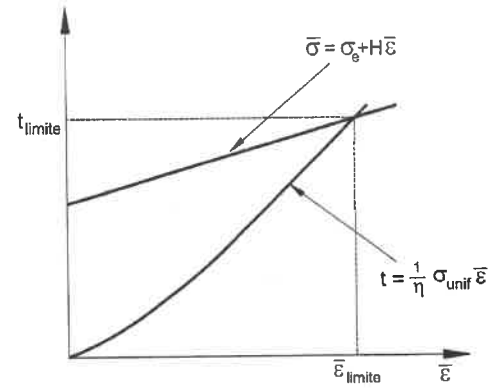
$$t < \bar{\sigma} \tag{3.7.1}$$

Conhecendo a equação tensão-extensão empírica do arame, a condição anterior passa a escrever-se do seguinte modo,

$$t < 50 + 150\bar{\varepsilon} \tag{3.7.2}$$

A figura seguinte ilustra o limite de enformabilidade desta operação, que corresponde à intercepção da curva que descreve a tensão de tracção de trefilagem, t, com a curva de comportamento mecânico do material, $\bar{\sigma}$, em função da extensão efectiva á saída da

fieira, $\bar{\varepsilon}$. A interpretação gráfica deste resultado é que a trefilagem será somente possível para estados de deformação inferiores ao limite $\bar{\varepsilon}_{limite}$, para os quais a operação de fabrico do fio se realiza sem que ocorra a deformação plástica do arame à saída da fieira uma vez que a tensão efectiva do arame produzido é superior à tensão axial imposta na operação de trefilagem.

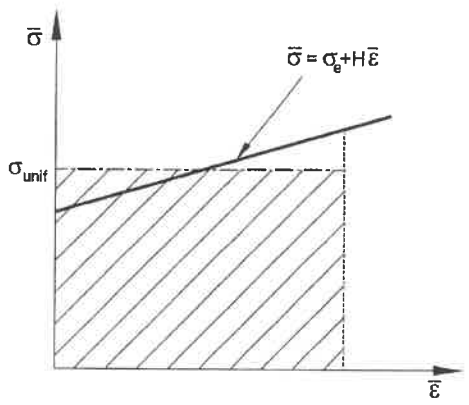


A tensão axial imposta na operação de trefilagem, de acordo com aplicação do método da energia uniforme, obtém-se dividindo a força de trefilagem, T, (3.6.1) pela área da secção transversal do fio no final da operação,

$$t = \frac{1}{\eta}\sigma_{unif}\ \bar{\varepsilon} \tag{3.7.3}$$

Torna-se então necessário proceder ao cálculo do valor médio da tensão da zona em deformação plástica, σ_{unif}, cuja determinação de acordo com o método da energia uniforme se efectua estabelecendo a igualdade das áreas assinaladas no gráfico da curva da tensão efectiva - extensão efectiva do material (ver figura abaixo), do seguinte modo,

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon} = \sigma_{unif} \times \bar{\varepsilon} \Leftrightarrow \sigma_{unif} = \frac{\int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{\int_0^{\bar{\varepsilon}} (50 + 150\,\bar{\varepsilon})\, d\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} = 50 + 75\,\bar{\varepsilon} \tag{3.7.4}$$



De acordo com os dados do problema relativos às energias consumidas na operação,

$$W = W_i + W_a + W_r = W_i + 0.25\,W_i = 1.25\,W_i \tag{3.7.5}$$

a eficiência desta operação é,

$$\eta = \frac{W_i}{W} = \frac{1}{1.25} = 0.8 \tag{3.7.6}$$

Em face do exposto a extensão admissível nesta operação de trefilagem ($\bar{\varepsilon}_{adm} < \bar{\varepsilon}_{limite}$) obtém-se substituindo os resultados das equações anteriores em (3.7.2),

$$\frac{1}{0.8} \times (50 + 75\,\bar{\varepsilon}_{adm})\,\bar{\varepsilon}_{adm} < 50 + 150\,\bar{\varepsilon}_{adm} \tag{3.7.7}$$

$$\bar{\varepsilon}_{adm} < 1.33$$

b) Conhecida a extensão máxima desta operação, o diâmetro mínimo correspondente calcula-se recorrendo ao valor da extensão efectiva no final da operação do seguinte modo,

$$\bar{\varepsilon}_{limite} = 1.33 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{A_0}{A_{min}}\right) = 1.33 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5^2}{d_{min}^{\,2}}\right) = 1.33 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d_{min} = \sqrt{\frac{5^2}{e^{1.33}}} = 2.57 \text{ mm} \tag{3.7.8}$$

Problema 3.8

Um tubo de cobre com um diâmetro exterior igual a 90 mm e uma espessura igual a 5 mm é trefilado a frio com o objectivo de reduzir o diâmetro exterior para 30 mm e a espessura para 2.5 mm.

A operação de trefilagem realiza-se sem atrito e com uma velocidade constante e igual a 30 m/min. Despreze a energia que é consumida pela deformação redundante.

a) Calcule a potência de trefilagem.

b) Calcule a potência necessária para realizar a deformação pretendida no caso de se utilizar extrusão directa.

c) Comente se um mesmo motor é adequado para realizar ambos os processos tecnológicos.

Informações adicionais relativas ao material:

Comportamento mecânico do material, $\bar{\sigma} = 315\,\bar{\varepsilon}^{0.54}$ MPa.

Resolução

a) A determinação da potência de trefilagem exige o conhecimento da força necessária à realização da referida operação. Seguindo o procedimento de cálculo dos problemas anteriores (problema 3.6 e 3.7), a extensão efectiva total imposta ao tubo durante a operação de trefilagem determina-se do seguinte modo,

$$\bar{\varepsilon} = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \ln\left[\frac{\pi\times\left(\frac{90^2-(90-2\times5)^2}{4}\right)}{\pi\times\left(\frac{30^2-(30-2\times2.5)^2}{4}\right)}\right] = \ln\left(\frac{1335.2}{216}\right) = 1.822 \qquad (3.8.1)$$

O valor médio da tensão na zona em deformação plástica, σ_{unif}, determinado através da aplicação do método da energia uniforme (3.4.10) é,

$$\sigma_{unif} = \frac{315\times(1.822)^{0.54}}{0.54+1} = 282.8 \ \text{MPa} \qquad (3.8.2)$$

Em virtude da operação se realizar sem atrito e desprezando a energia que é consumida pela deformação redundante, a eficiência da operação é, $\eta = 1$.

Nestas condições a força necessária à realização da operação de trefilagem de acordo com o método da energia uniforme (3.6.1) é,

$$T = \sigma_{unif}\ \bar{\varepsilon}\ A = 282.8\times1.822\times216 = 11296.5\,N \cong 11.4 \text{ ton} \qquad (3.8.3)$$

Uma vez que a operação é efectuada com as garras de tracção a deslocarem-se a uma velocidade constante de 30m/min, o valor da potência a fornecer pela máquina-ferramenta é,

$$P = T.v = 11296.5\times\frac{30}{60} = 55648.3 \text{ W} \cong 55.7 \text{ kW} \qquad (3.8.4)$$

b) No caso de a deformação ser realizada através de uma operação de extrusão, por aplicação do método da energia uniforme, a força para realizar a operação estima-se através de (3.4.8), em virtude da eficiência da operação analisada na alínea anterior, ser, $\eta = 1$. Considerando os valores determinados na alínea a), a força necessária para efectuar a deformação do tubo de cobre por extrusão seria,

$$F = \sigma_{unif}\ \bar{\varepsilon}\ A_0 = 282.8\times1.822\times1335.2 = 687977.3 \text{ N} \cong 688 \text{ ton} \qquad (3.8.5)$$

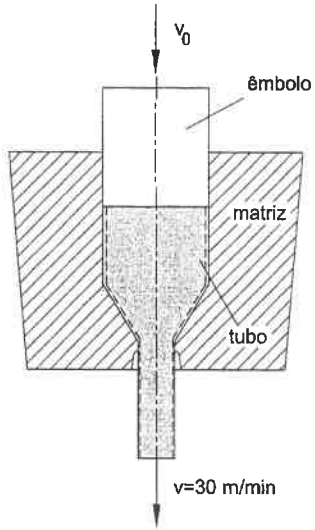
c) Para determinar a potência de extrusão torna-se necessário conhecer a velocidade do êmbolo, v_0, de modo a que a velocidade do tubo à saída da fieira seja 30 m/min, conforme se encontra ilustrado na figura seguinte. Considerando que o volume de material que atravessa uma secção transversal na unidade de tempo se conserva, a velocidade v_0 determina-se do seguinte modo,

$$A_0 v_0 = Av \Leftrightarrow v_0 = \frac{216\times30}{1335.2} = 4.853 \text{ m/min} \qquad (3.8.6)$$

Logo, a potência necessária para realizar a deformação do tubo por extrusão seria,

$$P = F.v_0 = 687977.3\times\frac{4.853}{60} = 55645.8 \text{ W} \cong 55.7 \text{ kW} \qquad (3.8.7)$$

Embora a potência necessária para ambas as operações seja a mesma, no caso da operação de extrusão o motor deverá ter maior binário e menor velocidade enquanto que para a operação de trefilagem o motor deverá ter menor binário e maior velocidade. Consequentemente o mesmo motor não poderá ser utilizado de forma eficaz em ambas as operações.



Problema 3.9

Um arame (fio) com 5 mm de diâmetro é submetido a uma operação de trefilagem. A trefilagem é efectuada a velocidade constante e igual a 100 mm/s. A soma da energia consumida para vencer as forças de atrito e a deformação redundante é igual a 25% da energia necessária à deformação plástica (energia ideal).

a) Calcule a extensão admissível da operação.

b) Calcule o valor do diâmetro mínimo admissível à saída da fieira (matriz).

c) Calcule o valor da força de trefilagem nas condições da alínea b).

d) Calcule a potência do motor indispensável a realização da operação de trefilagem nas condições da alínea b).

Informações adicionais relativas ao material:

Comportamento tensão-extensão do material do arame, $\overline{\sigma} = 500\ \overline{\varepsilon}^{0.41}$ MPa.

Resolução

a) A análise dos limites de enformabilidade das operações de trefilagem relacionados com a possibilidade de ocorrer a deformação plástica do fio produzido na operação foi analisada no problema 3.7, tendo-se concluído que a tensão axial imposta ao fio produzido, *t*, tem de ser inferior à tensão efectiva necessária à redução de secção do mesmo. Seguindo a mesma metodologia, a extensão efectiva no final da operação para a qual poderá ocorrer a redução da secção do fio produzido, $\overline{\varepsilon}_{limite}$, de acordo com (3.7.1), determina-se estabelecendo a seguinte igualdade,

$$\frac{1}{\eta}\sigma_{unif}\ \overline{\varepsilon}_{limite} = \overline{\sigma} \qquad (3.9.1)$$

em que o primeiro membro é a tensão axial imposta pelas garras de trefilagem, que se determina através do método da energia uniforme e o segundo membro é a tensão efectiva do material à saída da fieira, que se termina a partir da curva de comportamento mecânico do material em função do correspondente valor de extensão efectiva.

Para resolver a equação anterior (3.9.1), torna-se necessário conhecer a eficiência energética da operação, η, e a tensão média do material no interior da fieira, σ_{unif}, cujo valor se determina seguindo a metodologia utilizada nos problemas anteriores. No caso dos materiais com comportamento rígido-plástico, cujas curvas tensão verdadeira-

extensão verdadeira possam ser aproximadas por leis do tipo $\bar{\sigma} = k\bar{\varepsilon}^n$ a equação (3.9.1) pode ser escrita do seguinte modo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta}\frac{k\,\bar{\varepsilon}_{limite}^{n}}{n+1}\bar{\varepsilon}_{limite} &= k\,\bar{\varepsilon}_{limite}^{n} \\ \frac{1}{\eta}\frac{1}{n+1}\bar{\varepsilon}_{limite} &= 1 \\ \bar{\varepsilon}_{limite} &= \eta\,(n+1) \end{aligned} \tag{3.9.2}$$

O cálculo da eficiência do processo, η, efectua-se com base nos dados do enunciado, segundo os quais a energia consumida para vencer as forças de atrito e a deformação redundante se relaciona com a energia necessária à deformação plástica (energia ideal) do seguinte modo,

$$w_r + w_a = 0.25\,w_i \tag{3.9.3}$$

então, a eficiência da operação de trefilagem é,

$$\eta = \frac{w_i}{w} = \frac{w_i}{w_r + w_e + w_i} = \frac{w_i}{1{,}25\,w_i} = 0.8 \tag{3.9.4}$$

Substituindo este valor na equação (3.9.2) e considerando a lei de comportamento mecânico do material determina-se a extensão efectiva no final da operação para a qual poderá ocorrer a redução da secção do fio produzido, $\bar{\varepsilon}_{limite}$,

$$\bar{\varepsilon}_{limite} = 0.8\,(0.41+1) = 1.128 \tag{3.9.5}$$

Este resultado permite concluir que a extensão admissível nesta operação de trefilagem é,

$$\bar{\varepsilon}_{adm} < \bar{\varepsilon}_{limite} \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}_{adm} < 1.128 \tag{3.9.6}$$

b) Conhecido o valor da extensão limite de trefilagem, de acordo com a noção de extensão efectiva nas operações de extrusão/trefilagem (3.4.2), o correspondente valor do diâmetro à saída da fieira é,

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} = ln\frac{d_0^{\,2}}{d^2} \Rightarrow 1.128 = ln\frac{5^2}{d_{limite}^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d_{limite} = \sqrt{\frac{5^2}{e^{1.128}}} = 2.85\,\text{mm} \end{aligned} \tag{3.9.7}$$

c) A força de trefilagem, T, determina-se através do produto da tensão de trefilagem, t, pela área da secção do fio à saída da matriz, A. Torna-se então necessário calcular o valor médio da tensão da zona em deformação plástica, σ_{unif}, conforme foi exposto na alínea a),

$$\sigma_{unif} = \frac{500 \times 1.128^{0.41}}{0.41+1} = 372.6\ \text{MPa} \tag{3.9.8}$$

Face aos resultados obtidos é então possível estimar a força de trefilagem, nas condições limites da alínea b),

$$T = \frac{1}{\eta}\sigma_{unif}\,\bar{\varepsilon}\,A = \frac{1}{0.8} \times 372.6 \times 1.128 \times \frac{\pi \times 2.85^2}{4} \cong 3351.5\ \text{N} \tag{3.9.9}$$

d) Nas condições da alínea anterior, conhecendo a velocidade das garras de tracção, v, a potência exigida ao motor para realizar a operação é igual a,

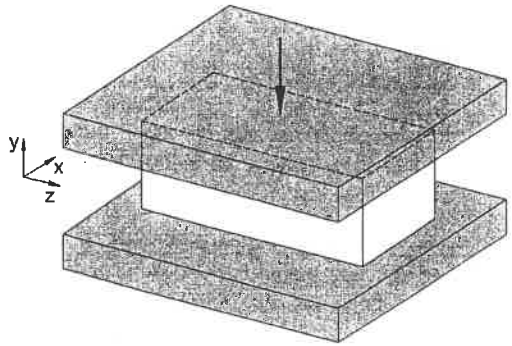
$$P = T.v = 3351.5 \times 0.1 = 335.15\ \text{W} \tag{3.9.10}$$

4. MÉTODO DA FATIA ELEMENTAR

Este capítulo apresenta um conjunto de problemas que exemplificam a aplicação do método da fatia elementar a processos de deformação plástica. São problemas com objectivos formativos na medida em que a aplicação directa do método da fatia elementar à tecnologia da deformação plástica é consubstanciada nos capítulos da especialidade.

Problema 4.1

Considere a operação de compressão com atrito máximo ($\tau = k$) de uma barra de secção rectangular entre pratos de maior extensão que a peça em condições de deformação plástica plana.



a) Calcule o valor da pressão de compressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material $p/2k$.

b) Determine o valor máximo de $p/2k$.

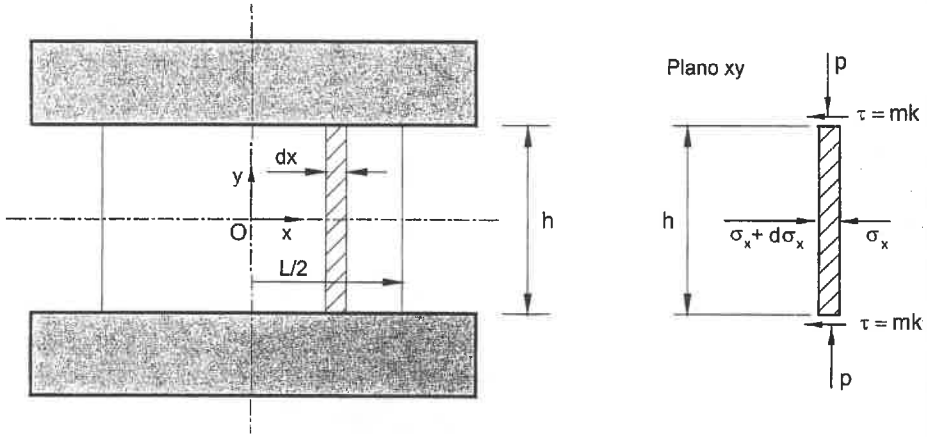
c) Determine o valor médio de $p/2k$.

d) Represente graficamente a variação de $p/2k$ com a distância x .

e) Represente graficamente a variação das tensões σ_x , σ_y e σ_z com a distância x .

Resolução

a) A figura seguinte apresenta a operação de compressão com atrito ($\tau = mk$) de uma barra de secção rectangular ($L \times h$) entre pratos de maior extensão que a peça, em condições de deformação plástica plana.



A aplicação do método da fatia elementar baseia-se na divisão da região em deformação plástica através de secções elementares que sejam adequadas à realização de equilíbrios estáticos entre a totalidade das solicitações interiores e exteriores que actuam numa secção num determinado instante da operação, conforme se encontra ilustrado no detalhe situado no lado direito da figura.

A condição de deformação plana determina que o comprimento da barra, w, permaneça constante durante a totalidade da operação de compressão e que a tensão segundo esta direcção seja uma direcção principal cuja intensidade de acordo com as equações constitutivas de Levy-Mises é,

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_2 \qquad (4.1.1)$$

Admitindo que a tensão σ_x não varia ao longo dos planos perpendiculares à direcção de escoamento do material, qualquer modificação do valor desta tensão apenas poderá ser efectuada ao longo da direcção longitudinal x. Considerando o equilíbrio de forças na fatia elementar, representado na figura anterior, segundo a direcção longitudinal pode-se estabelecer a seguinte equação diferencial,

$$(\sigma_x + d\sigma_x)hw - 2\tau w\, dx - \sigma_x\, h\, w = 0 \qquad (4.1.2)$$

Substituindo a tensão de corte devida ao atrito na interface com a ferramenta, $\tau = mk$, na equação anterior e eliminando o comprimento da chapa obtém-se a seguinte igualdade,

$$(\sigma_x + d\sigma_x)h - 2mk\, dx - \sigma_x\, h = 0 \qquad (4.1.3)$$

Admitindo que x e y são direcções principais e que as tensões correspondentes, σ_x e σ_y, são tensões principais cujo valor se mantém constante no plano da fatia elementar, pode relacionar-se o valor destas tensões através do critério de plasticidade de Tresca do seguinte modo,

$$\begin{matrix}\sigma_x = \sigma_1 \\ \sigma_y = -p = \sigma_3\end{matrix} \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_x - (-p) = 2k \Leftrightarrow \sigma_x = -p + 2k \qquad (4.1.4)$$

Importa referir que a hipótese de x e y serem direcções principais é uma aproximação que será tanto mais verdadeira quanto menor for o valor do factor de atrito m. O critério de plasticidade de Tresca (4.1.4) permite estabelecer a relação diferencial,

$$d\sigma_x = -dp \qquad (4.1.5)$$

Substituindo este resultado na equação (4.1.3) é possível eliminar uma das variáveis e transformar a referida equação na seguinte forma diferencial de variáveis separadas,

$$h\, dp = -2mk\, dx \qquad (4.1.6)$$

cuja integração conduz à seguinte expressão matemática,

$$\int_0^p h\, dp = -\int_0^x 2mk\, dx \Leftrightarrow hp = -2mkx + C \qquad (4.1.7)$$

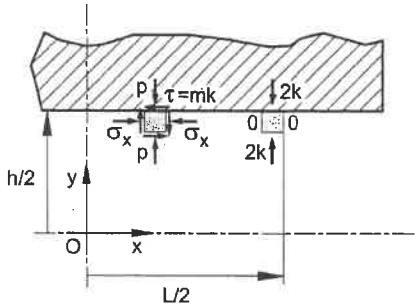
a qual, após substituição da condição de fronteira do problema (ver figura seguinte),

$$x = \frac{L}{2} \Rightarrow \sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -p = -2k \qquad (4.1.8)$$

permite obter a distribuição de pressão na interface de contacto entre o material e a ferramenta adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $2k$, em função da distância x ao centro da peça,

$$\frac{p}{2k} = 1 + \frac{m}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right) \qquad (4.1.9)$$

Importa referir que muito embora a distribuição de pressão seja simétrica em relação ao eixo y, a expressão anterior é apenas válida no domínio $0 \le x \le L/2$.



Nas condições do problema, e em virtude de se tratar de uma operação com atrito máximo na interface de contacto entre o material e a ferramenta, o factor de atrito toma o valor de máximo, $m = 1$. Substituindo este valor na equação (4.1.9), obtém-se a distribuição de pressão na interface de contacto entre a barra e a ferramenta adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $2k$, em função da distância x ao centro da peça,

$$\frac{p}{2k} = 1 + \frac{1}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right) \qquad (4.1.10)$$

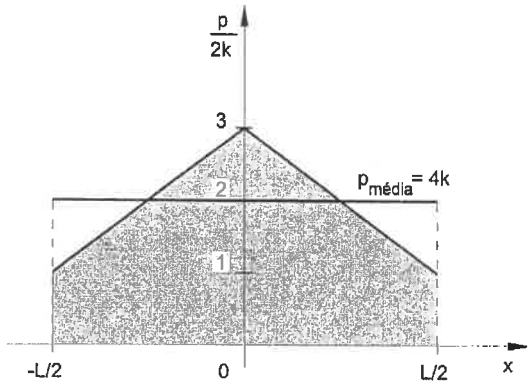
b) Considerando a distribuição de pressão de (4.1.10) verifica-se que, devido à existência de atrito na interface com a ferramenta, o valor máximo da pressão de contacto ocorre na linha de simetria vertical da ferramenta de compressão em $x = 0$,

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_{máx} = 1 + \frac{L}{2h} \qquad (4.1.11)$$

c) O valor médio da distribuição de pressão determinada na alínea a) em (4.1.10), determina-se do seguinte modo,

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_{média} = \frac{1}{L/2}\int_0^{L/2}\frac{p}{2k}\,dx = \frac{1}{L/2}\int_0^{L/2}\left[1 + \frac{1}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right]dx = 1 + \frac{L}{4h} \qquad (4.1.12)$$

d) Considere-se, para efeitos de representação gráfica, que a secção da barra tem a seguinte relação geométrica, $L = 4h$. Substituindo esta relação na equação (4.1.10) obtém-se a evolução da pressão de contacto adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material em função da distância longitudinal x, ao centro da peça, que se encontra representada na figura. Encontra-se igualmente representado o valor médio da pressão contacto adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material.



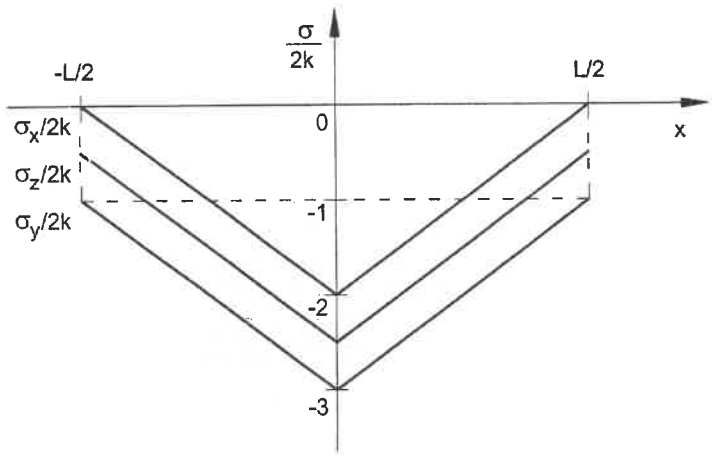
e) Em face do exposto na alínea a), a distribuição de tensões no interior da barra é descrita pelas equações (4.1.1) e (4.1.4). Pelo que determinada a distribuição da pressão na interface com a ferramenta (4.1.10), a distribuição completa de tensões no interior da peça σ_x, σ_y e σ_z em função da distância x ao centro da peça pode ser determinada através de,

$$\sigma_y = -2k\left[\frac{1}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] \qquad (4.1.13)$$

$$\sigma_y = -2k\left[1+\frac{1}{h}\left(\frac{L}{2}-x\right)\right] \qquad (4.1.14)$$

$$\sigma_y = -2k\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{h}\left(\frac{L}{2}-x\right)\right] \qquad (4.1.15)$$

Considerando novamente, para efeitos de representação gráfica, que a secção da barra tem a relação geométrica considerada na alínea anterior, substituindo esta relação em (4.1.13), (4.1.14) e (4.1.15), obtém-se o gráfico de variação das tensões σ_x, σ_y e σ_z no interior da peça, adimensionalizadas com a tensão limite de elasticidade do material, que está representado na figura seguinte.



Problema 4.2

Considere a operação de compressão com atrito máximo ($\tau = k$) de uma pré-forma cilíndrica entre pratos de maior extensão que a peça em condições axissimétricas.

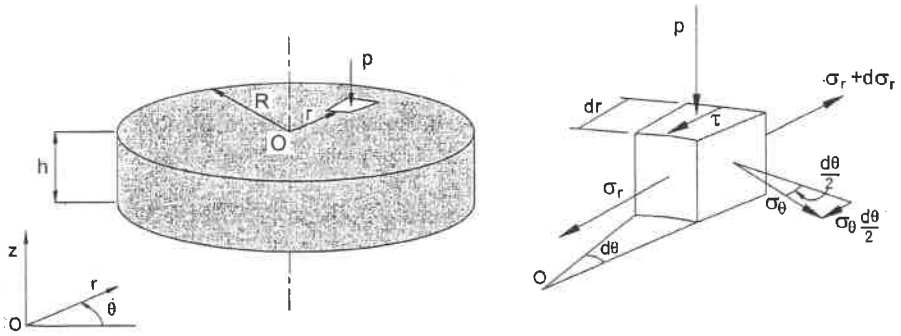
a) Calcule o valor da pressão de compressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $p/2k$.

b) Obtenha o valor máximo de $p/2k$.

c) Obtenha o valor médio de $p/2k$.

Resolução

a) Considere a operação de compressão com atrito ($\tau = mk$) de um cilindro de raio, R, e altura, h, representada na figura seguinte. Seguindo a metodologia de aplicação do método da fatia elementar utilizada no problema anterior considerem-se as tensões que actuam numa fatia elementar (elemento de volume), correspondente a um anel de espessura infinitesimal dr e altura h situado a uma distância radial r da linha de simetria.



O efeito do atrito na interface de contacto entre o material e a ferramenta está representado através da tensão de corte, τ, cuja intensidade será contabilizada através da lei de Prandtl, $\tau = mk$, em que m é o factor de atrito e k é a tensão limite de elasticidade em corte puro do material. Efectuando-se o equilíbrio de forças na direcção radial do elemento de volume infinitesimal representado do lado direito da figura anterior, obtém-se a seguinte expressão,

$$\sigma_r h\, r\, d\theta + 2\tau\, r\, d\theta\, dr + 2\sigma_\theta\, h\, dr \frac{d\theta}{2} - (\sigma_r + d\sigma_r)\, h\, d\theta (r + dr) = 0 \qquad (4.2.1)$$

Substituindo a tensão de corte, devida ao atrito, na expressão anterior e desprezando os termos de ordem superior, a sua simplificação permite obter a seguinte equação diferencial,

$$2mk\, r\, dr + \sigma_\theta\, h\, dr - \sigma_r\, h\, dr - d\sigma_r\, h\, r = 0 \qquad (4.2.2)$$

Admitindo que as tensões radiais e tangenciais são equivalentes $\sigma_r = \sigma_\theta$ e supondo ainda que as tensões referidas ao sistema de eixos cilíndrico r, θ, z são principais, pode concluir-se que a tensão de compressão $\sigma_z = -p$ aplicada na superfície do cilindro é a menor das tensões principais, $\sigma_3 = \sigma_z$.

Nestas condições, aplicando o critério de plasticidade de Tresca, obtém-se a seguinte relação entre as tensões radial (ou tangencial) e a tensão axial,

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_r + p = 2k \qquad (4.2.3)$$

a qual que permite estabelecer a seguinte relação diferencial,

$$d\sigma_r = -dp \qquad (4.2.4)$$

Substituindo este resultado na equação diferencial (4.2.2) e atendendo a que se admitiu que as tensões radiais e tangenciais são iguais, obtém-se a seguinte equação diferencial de variáveis separadas,

$$2mk\, dr + h\, dp = 0 \qquad (4.2.5)$$

cuja integração conduz à seguinte expressão matemática,

$$\int_0^p h\, dp = -\int_0^r 2mk\, dr \Leftrightarrow hp = -2mk\, r + C \qquad (4.2.6)$$

a qual, após substituição da condição de fronteira do problema,

$$r = R \;\Rightarrow\; \sigma_r = 0 \quad \sigma_z = -p = -2k \qquad (4.2.7)$$

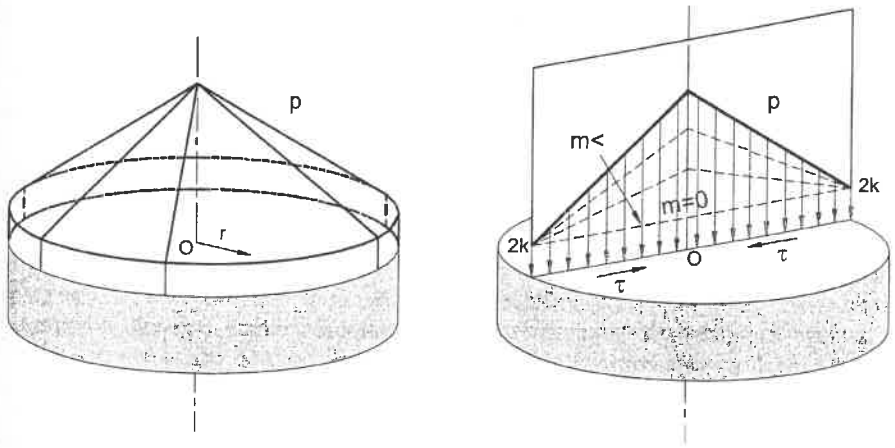
permite obter a expressão para determinar a pressão de contacto na superfície do cilindro em função da distância radial ao eixo, adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material $2k$,

$$\frac{p}{2k} = 1 + \frac{m}{h}(R - r) \qquad (4.2.8)$$

Nas condições do problema, e em virtude de se tratar de uma operação com atrito máximo na interface de contacto entre o material e a ferramenta, o factor de atrito toma o valor de máximo, $m = 1$. Substituindo este valor na expressão (4.2.8) obtém-se a distribuição de pressão na interface de contacto entre a barra e a ferramenta adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material $2k$,

$$\frac{p}{2k} = 1 + \frac{(R - r)}{h} \qquad (4.2.9)$$

A figura seguinte apresenta a representação esquemática da distribuição da pressão de contacto resultante de (4.2.9). A sua análise permite concluir que a pressão aumenta linearmente da periferia para o centro, devido à existência de atrito, sendo esta variação tanto mais significativa, quanto maior for o valor do factor de atrito m.



Importa ainda notar que caso não existisse atrito ($m = 0$) a pressão de contacto seria constante e igual à tensão limite de elasticidade do material, $2k$. Nestas condições o estado de tensão era uniforme e caracterizado por,

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_z = -p = -2k \tag{4.2.10}$$

b) Considerando a distribuição de pressão de contacto na superfície do cilindro em função da distância radial ao eixo (4.2.9) verifica-se que o valor máximo da pressão de contacto ocorre na linha de eixo da peça em $r = 0$,

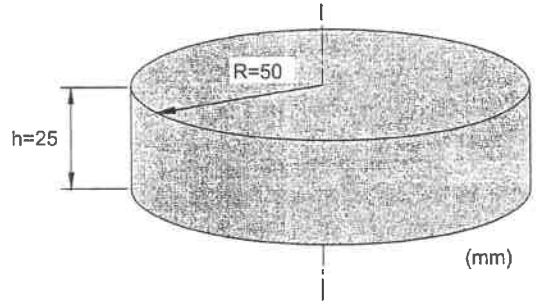
$$\left(\frac{p}{2k}\right)_{máx} = 1 + \frac{R}{h} \tag{4.2.11}$$

c) O valor médio da distribuição de pressão determinada na alínea a), em (4.2.9), determina-se do seguinte modo,

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_{média} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \frac{p}{2k}\, 2\pi r\, dr = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \left(1 + \frac{R-r}{h}\right) 2\pi r\, dr = 1 + \frac{R}{3h} \tag{4.2.12}$$

Problema 4.3

Uma pré-forma cilíndrica com 100 mm de diâmetro e 25 mm de altura é comprimida a frio em duas condições de atrito, $\mu = 0$ (sem atrito) e $\mu = 0.2$.



a) Escreva a equação que permite calcular o valor da pressão de compressão, p, no início da deformação plástica do material para as duas condições de atrito.

b) Compare as equações obtidas com as que resultariam da aplicação do método da energia uniforme.

c) Calcule o valor da força de compressão que é necessário aplicar para dar início à deformação plástica do material nas duas condições de atrito.

Admita que a lei de comportamento tensão-extensão do material da pré-forma pode ser aproximada por intermédio de um modelo rígido-perfeitamente plástico em que $\sigma_e = 300$ MPa.

Resolução

a) A pressão de compressão pode ser estimada através da aplicação do método da fatia elementar seguindo a metodologia utilizada no problema 4.2. Importa no entanto referir que nas condições de atrito descritas para este problema a intensidade da tensão de corte, τ, na interface de contacto entre o material e a ferramenta será contabilizada através do modelo de atrito de Amonton-Coulomb, $\tau = \mu p$, em que μ é o coeficiente de atrito e p é pressão normal na interface entre o material e a ferramenta. Introduzindo esta modificação na metodologia utilizada do problema 4.2, através da introdução do modelo de atrito de Amonton-Coulomb na equação que resulta do equilíbrio de forças na direcção radial do elemento de volume infinitesimal (4.2.1) obtém-se a seguinte equação diferencial de variáveis separadas,

$$2\mu p\,dr + h\,dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{2\mu}{h}dr \tag{4.3.1}$$

análoga a (4.2.5) e cuja integração conduz à seguinte expressão matemática,

$$\int_0^p \frac{1}{p}dp = -\int_0^r \frac{2\mu}{h}dr \quad \Leftrightarrow \quad \ln p = -\frac{2\mu r}{h} + C \tag{4.3.2}$$

a constante de integração, C, determina-se apartir das condições de fronteira estáticas do problema,

$$r = R \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = 0 \quad \sigma_z = -p = -\sigma_e \tag{4.3.3}$$

do seguinte modo,

$$\ln \sigma_e = -\frac{2\mu R}{h} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = \ln \sigma_e + \frac{2\mu R}{h} \tag{4.3.4}$$

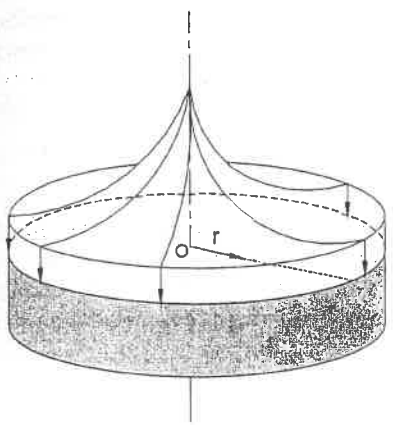
A substituição da constante de integração em (4.3.2) permite obter a seguinte expressão para determinar a pressão de contacto na superfície do cilindro em função da distância radial ao eixo da pré-forma,

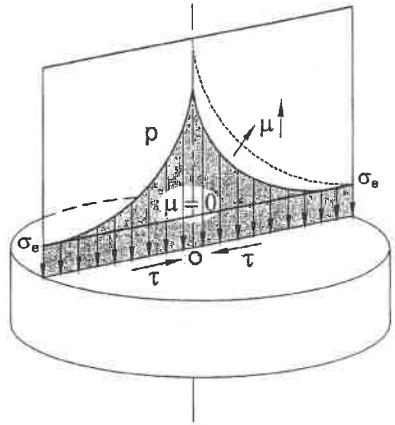
$$p = \sigma_e \exp\left[\frac{2\mu}{h}(R - r)\right] \tag{4.3.5}$$

A análise da distribuição da pressão que resulta desta expressão permite verificar que a pressão de contacto na superfície aumenta exponencialmente da periferia para o centro segundo uma colina de atrito, sendo esta variação tanto mais significativa, quanto maior for o valor do coeficiente de atrito, μ. A figura seguinte apresenta a representação da distribuição da pressão de contacto que resulta de (4.3.5).

É ainda possível obter uma forma aproximada da distribuição de pressão (4.3.5), para facilitar a sua manipulação matemática, se for considerado o seu desenvolvimento em série e desprezados os termos de ordem superior,

$$p \cong \sigma_e \left[1 + \frac{2\mu}{h}(R - r)\right] \tag{4.3.6}$$





Se procedermos à substituição do valor da tensão limite de elasticidade do material e das dimensões da pré-forma cilíndrica, $R = 50$ mm e $h = 25$ mm na equação (4.3.5) obtêm-se as seguintes expressões que permitem contabilizar a evolução da pressão de contacto na superfície do cilindro em função da distância radial ao eixo, no início da deformação plástica do material para as duas condições de atrito,

$$p = 300\,\text{MPa}, \quad \mu = 0 \tag{4.3.7}$$

$$p = 300 \exp\left(0.08 - 0.015\,r\right)\,\text{MPa}, \quad \mu = 0.02 \tag{4.3.8}$$

b) Em operações de fabrico que ocorrem em regime transiente, como a compressão uniaxial descrita neste problema, e por analogia com a aplicação do método da energia uniforme aos processos que decorrem em regime estacionário, o valor da pressão que é necessário aplicar para proceder à deformação plástica da peça determina-se em função da tensão efectiva $\overline{\sigma}$ no interior da peça do seguinte modo,

$$p = \frac{1}{\eta}\overline{\sigma} \tag{4.3.9}$$

em que η é o factor de eficiência energética destinado a corrigir o valor da pressão devido à existência de atrito e/ou deformação redundante nas operações de deformação plástica.

Tratando-se de um material sem encruamento (comportamento rígido-perfeitamente plástico), $\overline{\sigma} = \sigma_e$, o valor da pressão da equação anterior passa a ser estimado através de,

$$p = \frac{1}{\eta}\sigma_e \tag{4.3.10}$$

Como na compressão uniaxial sem atrito, $\eta = 1$, conclui-se que os valores de pressão estimados pelo método da energia uniforme e pelo método da fatia elementar são equivalentes. Já se existir atrito entre a pré-forma cilíndrica e a ferramenta, a eficiência da operação de compressão uniaxial pode ser estimada através do método da fatia elementar por comparação entre (4.3.5) e (4.3.10),

$$\eta = \frac{1}{\exp\left[\frac{2\mu}{h}(R-r)\right]} \tag{4.3.11}$$

c) Para determinar a força de compressão que dá início à deformação plástica da pré-forma cilíndrica torna-se necessário conhecer a pressão de contacto média, $p_{média}$, entre a pré-forma cilíndrica e a ferramenta. Este valor pode ser determinado, para facilitar a manipulação matemática, a partir da distribuição da pressão de contacto (4.3.6),

$$\begin{aligned} p_{média} &= \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R p\ 2\pi r\ dr \cong \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \left(\sigma_e\left[1+\frac{2\mu}{h}(R-r)\right]2\pi r\right)\ dr \\ &\cong \sigma_e\left(1+\frac{2\mu R}{3h}\right) \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Conhecido o valor da pressão de contacto média, $p_{média}$, qualquer que seja o coeficiente de atrito na interface com a ferramenta, a força necessária para dar início à deformação plástica da pré-forma cilíndrica calcula-se através do produto entre a pressão de contacto média acima calculada e a área de contacto entre a pré-forma cilíndrica e a ferramenta, $A_{contacto}$, no respectivo instante,

$$F = p_{média} \times A_{contacto} \cong \sigma_e\left(1+\frac{2\mu R}{3h}\right)\times \pi R^2 \tag{4.3.13}$$

Procedendo à substituição do valor da tensão limite de elasticidade do material e das dimensões da pré-forma cilíndrica, na equação anterior, obtêm-se os valores das forças de compressão estimados através do método da fatia elementar para dar início à deformação plástica da pré-forma cilíndrica nas duas condições de atrito,

$$F = 300 \times \pi \times 50^2 = 2356200\ \text{N}, \quad \mu = 0 \tag{4.3.14}$$

$$F = 300 \times \left(1+\frac{2\times 0{,}2\times 50}{3\times 25}\right)\times \pi \times 50^2 = 380 \times 7854 = 2984520\ \text{N}, \quad \mu = 0.02 \tag{4.3.15}$$

De onde se conclui que, nas condições deste problema, a existência de atrito implica um aumento de 27% na força de compressão.

Problema 4.4

Considere a operação de compressão com atrito ($\mu = 0.3$) de uma barra entre pratos de maior extensão que a peça em condições de deformação plástica plana. A barra tem 100 mm de comprimento e uma secção rectangular com 20 mm de largura e 25 mm de altura (espessura).

a) Determine, sem utilizar a equação da distribuição da pressão média, o valor da força de compressão no instante correspondente a 20% de redução em altura.

b) Determine, utilizando a equação da distribuição da pressão média, o valor da força de compressão no instante correspondente a 20% de redução em altura.

c) Esboce o gráfico de variação das tensões σ_x, σ_y e σ_z no interior da peça no instante correspondente a 20% de redução em altura, indicando os valores máximo e mínimo para cada uma das tensões.

Informações adicionais relativas ao material:

Equação tensão-extensão empírica rígido-plástica do material, $\overline{\sigma} = 400\overline{\varepsilon}^{0.5}$ MPa.

Resolução

a) A pressão de compressão pode ser estimada através da aplicação do método da fatia elementar seguindo a metodologia utilizada no problema 4.1. Importa no entanto salientar que nas condições de atrito descritas para este problema a intensidade da tensão de corte, τ, na interface de contacto entre o material e a ferramenta será contabilizada através do modelo de atrito de Amonton-Coulomb, $\tau = \mu p$, em que μ é o coeficiente de atrito e p é pressão normal na interface entre o material e a ferramenta. Introduzindo esta modificação na metodologia utilizada do problema 4.1, através da introdução do modelo de atrito de Amonton-Coulomb na equação (4.1.2) que resulta do equilíbrio de forças na direcção longitudinal x do elemento de volume infinitesimal obtém-se a seguinte equação diferencial de variáveis separadas,

$$2\mu p\,dx + h\,dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{2\mu}{h}dx \tag{4.4.1}$$

cuja integração conduz à seguinte expressão matemática,

$$\int_0^p \frac{1}{p}dp = -\int_0^x \frac{2\mu}{h}dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln p = -\frac{2\mu}{h}x + C \tag{4.4.2}$$

A constante de integração, C, determina-se a partir das condições de fronteira estáticas do problema,

$$x = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -p = -\sigma_e \tag{4.4.3}$$

Nestas condições obtém-se a seguinte expressão para a distribuição de pressão na interface de contacto entre o material e a ferramenta adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $2k$, em função da distância x ao centro da peça,

$$p = \sigma_e \exp\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] \tag{4.4.4}$$

Este resultado permite concluir que a pressão de contacto aumenta exponencialmente da periferia para o centro, sendo esta variação tanto mais significativa, quanto maior for o valor do coeficiente de atrito μ. Esta variação da pressão de contacto é habitualmente denominada por colina de atrito.

O método da fatia elementar na sua génese aplica-se a materiais cujo comportamento seja rígido perfeitamente plástico. Como porém o material da barra apresenta encruamento durante a deformação plástica, uma forma de contabilizar o encruamento do material no cálculo da distribuição de pressão em cada instante consiste em actualizar a tensão limite de elasticidade do material, σ_e, a cada instante através do cálculo da respectiva tensão efectiva, $\overline{\sigma}$, do seguinte modo

$$p = \overline{\sigma} \exp\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] \tag{4.4.5}$$

Cujo valor da tensão efectiva, $\overline{\sigma}$, no interior da peça é obtido, considerando que o efeito das forças de atrito entre a barra e as ferramentas não influenciam a geometria final da peça e que a deformação plástica é uniforme, através da curva de comportamento mecânico do material a partir da extensão efectiva, $\overline{\varepsilon}$.

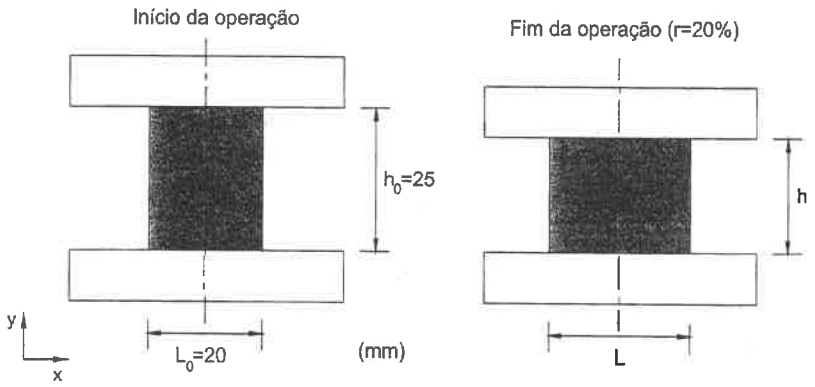
Importa salientar que as expressões (4.4.4) e (4.4.5) são apenas válidas no domínio compreendido entre $x = 0$ e $x = L/2$.

No instante final da operação, quando a redução em altura for 20% ($r = 0{,}2$), a altura da peça é,

$$h = (1 - r) \times h_0 = (1 - 0.2) \times 25 = 20 \text{ mm} \tag{4.4.6}$$

Uma vez calculada a altura final da peça a sua largura pode ser determinada por intermédio da conservação de volume característica do materiais metálicos. Considerando que o efeito das forças de atrito entre a barra e as ferramentas não influenciam a geometria final da peça, em condições de deformação plana, o comprimento da barra, w, permanece constante durante a deformação plástica e a conservação de volume da barra é equivalente à conservação da área da sua secção (que se considera rectangular),

$$L \times h = Cte. \quad \Rightarrow \quad L_0 \times h_0 = L \times h \Leftrightarrow 20 \times 25 = L \times 20 \Leftrightarrow L = 25 \text{ mm} \tag{4.4.7}$$



Neste instante, em condições de deformação plana, w = Cte., a extensão efectiva que é alcançada no instante final, determina-se do seguinte modo,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{h_0}{h}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{25}{20}\right) = 0.258 \tag{4.4.8}$$

Admitindo que o estado de tensão no interior da peça também é uniforme, então, a tensão efectiva, $\bar{\sigma}$, pode ser calculada com base no valor de extensão efectiva $\bar{\varepsilon}$ e através da curva tensão-extensão do material,

$$\bar{\sigma} = 400\ \bar{\varepsilon}^{0.5} = 400\ (0.258)^{0.5} = 203.2 \text{ MPa} \tag{4.4.9}$$

Conhecida a geometria da barra e a tensão efectiva do material no final da operação, a força aplicada através da ferramenta pode ser estimada em função da área de contacto da

barra com a ferramenta, A, e da distribuição de pressão nesta interface (4.4.5) do seguinte modo,

$$\begin{aligned} F = A.p &= w \times 2 \times \int_0^{L/2} \bar{\sigma} \exp\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] dx \\ &= 100 \times 2 \times \int_0^{12.5} 203.2 \exp\left[\frac{2 \times 0.3}{20}\left(\frac{25}{2} - x\right)\right] dx \\ &= 200 \times 203.2 \times \int_0^{12.5} \exp\ (0.375 - 0.03\ x)\, dx \\ &= 200 \times 203.2 \times \exp\ (0.375) \times \left(-\frac{1}{0.03}\right) \times \left|\exp\ (-0.03\ x)\right|_0^{12.5} \\ &= 616361.7 \text{ N} \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

b) A força de compressão pode igualmente ser determinada através do produto entre a área de contacto da barra com a ferramenta, A, e a pressão média nesta interface, $p_{média}$, que se determina a partir da distribuição de pressão (4.4.5),

$$p_{média} = \frac{1}{L/2} \int_0^{L/2} \bar{\sigma} \exp\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] dx \tag{4.4.11}$$

A integração da expressão anterior pode ser efectuada de forma simplificada se se considerar o seu desenvolvimento em série e forem desprezados os termos de ordem superior. Seguindo esta metodologia, o valor da pressão média na interface entre a barra e a ferramenta pode ser contabilizado de forma aproximada através da seguinte expressão,

$$p_{média} \cong \bar{\sigma}\left(1 + \frac{\mu L}{2h}\right) \tag{4.4.12}$$

Considerando os dados do problema e os resultados da alínea anterior, no instante correspondente a 20% de redução em altura da barra, a pressão média na interface de contacto com a ferramenta vale,

$$p_{média} \cong 203.2\left(1 + \frac{0.3 \times 25}{2 \times 20}\right) = 241.3 \text{ MPa} \tag{4.4.13}$$

Este valor multiplicado pela área de contacto da barra com a ferramenta conduz à seguinte estimativa para a força de compressão,

$$F = p_{média}.A \cong 241.3 \times 100 \times 25 = 603250 \text{ N} \qquad (4.4.14)$$

c) O estado de tensão no interior da barra em deformação plástica plana (na direcção z), considerando o critério de plasticidade de Tresca, caracteriza-se por,

$$\sigma_x = -p + \overline{\sigma} = \sigma_1 \qquad \sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) = \sigma_2 \qquad \sigma_z = -p = \sigma_3 \qquad (4.4.15)$$

em que, conforme já foi referido, a tensão efectiva $\overline{\sigma}$ substitui a tensão limite de elasticidade do material, σ_e, desta vez no critério de plasticidade, de modo a contabilizar o encruamento do material a cada instante da deformação.

Nestas condições, a distribuição de tensões no interior da peça no instante correspondente a 20% de redução em altura, considerando a distribuição de pressão (4.4.5) é dada em função da distância x ao centro da peça por,

$$\sigma_x = 203.2\,[1 - \exp[0.03\,(12.5 - x)]] \qquad (4.4.16)$$

$$\sigma_y = 203.2\left[\frac{1}{2} - \exp[0.03\,(12.5 - x)]\right] \qquad (4.4.17)$$

$$\sigma_z = -203.2 \exp[0.03\,(12.5 - x)] \qquad (4.4.18)$$

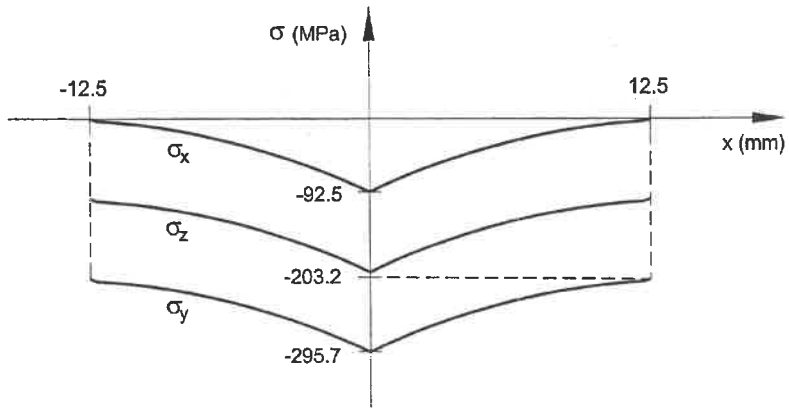
A que correspondem os gráficos de variação das tensões σ_x, σ_y e σ_z da figura seguinte. Os valores máximos e mínimos destas tensões ocorrem em $x = 0$ e $x = \pm L/2 = \pm 12.5\,\text{mm}$,

$$(\sigma_x)_{máx} = -92.5 \quad (\sigma_x)_{min} = 0 \quad \text{MPa} \qquad (4.4.16)$$

$$(\sigma_y)_{máx} = -194.1 \quad (\sigma_y)_{min} = -101.6 \quad \text{MPa} \qquad (4.4.17)$$

$$(\sigma_z)_{máx} = -295.7 \quad (\sigma_z)_{min} = -203.2 \quad \text{MPa} \qquad (4.4.18)$$

Conforme se encontra ilustrado na figura seguinte.

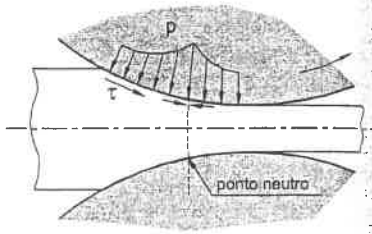


Problema 4.5

Uma chapa com uma espessura inicial de 3 mm e uma largura de 200 mm é laminada a frio num laminador de dois rolos com o objectivo de obter uma espessura final igual a 2.5 mm.

O diâmetro dos rolos é igual a 500 mm e o coeficiente de atrito $\mu = 0.1$.

Considere que o material é rígido-perfeitamente plástico com uma tensão limite de elasticidade $\sigma_e = 250$ MPa.



a) Determine a força de separação dos rolos.

Sugestão: Utilize a distribuição de pressão média $p_{média}$ correspondente à compressão em condições de deformação plana.

b) Determine o valor do momento de laminagem.

Resolução

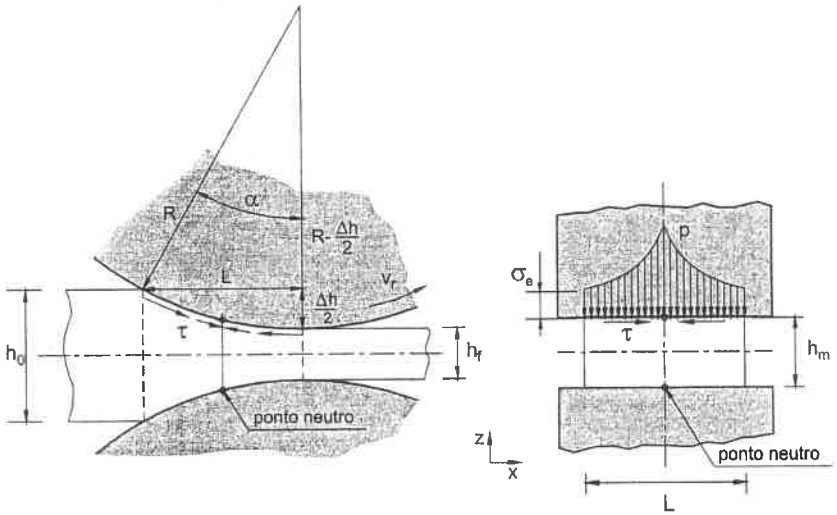
a) A análise das operações de laminagem de chapa pode ser efectuada estabelecendo uma analogia entre a operação de laminagem e a compressão entre pratos planos em condições de deformação plástica plana, segundo a largura, conforme se encontra ilustrado na figura seguinte. Esta analogia deve-se facto do comprimento de contacto entre os rolos e a chapa ser geralmente muito inferior à largura da mesma, $L \ll w$. A largura é a dimensão da chapa na direcção perpendicular ao plano do papel.

Nestas condições o campo de extensões no interior da zona em deformação plástica caracteriza-se por,

$$\varepsilon_y = 0 \text{ e } \varepsilon_z = -\varepsilon_x \qquad (4.5.1)$$

No que diz respeito às velocidades que se desenvolvem durante este processo, verifica-se que a velocidade tangencial da chapa vai aumentando da entrada para a saída. O ponto localizado na superfície de contacto entre o rolo e a chapa onde as velocidades tangenciais da chapa e do rolo se igualam designa-se 'ponto neutro'. Este ponto caracteriza-se pela ausência de escorregamento relativo entre a chapa e o rolo não existindo, portanto, sobre ele aplicadas quaisquer tensões tangenciais de atrito. À esquerda do ponto neutro, o rolo move-se mais depressa do que a chapa pelo que se desenvolvem tensões de atrito que actuam no sentido de arrastar o material para a zona compreendida entre os rolos de laminagem. À direita do ponto neutro, a chapa move-se mais depressa do que os rolos, e portanto, as tensões de atrito que se desenvolvem vão

estar orientadas no sentido oposto ao do movimento da chapa, isto é, contrariando a saída da chapa. A cinemática descrita e as tensões de corte devidas ao atrito que consequentemente se desenvolvem nas operações de laminagem dão origem a uma distribuição da pressão de contacto, p, a cuja variação se dá o nome de colina de atrito, resultante da analogia que se pode estabelecer entre a laminagem de chapa plana e a compressão entre pratos direitos, em condições de deformação plana (ver figura seguinte).



Considerando o critério de plasticidade de Tresca, a distribuição de tensões no interior da chapa é a seguinte,

$$\sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) = \sigma_2 \qquad \sigma_x = -p + \sigma_e = \sigma_1 \qquad \sigma_z = -p = \sigma_3 \qquad (4.5.2)$$

Em face do exposto a força de separação que o material da chapa exerce nos rolos de laminagem pode ser calculada seguindo a metodologia descrita no problema anterior, relativa à aplicação do método da fatia elementar à compressão entre pratos planos de uma barra de dimensões $L \times h_m \times w$, em condições de deformação plana. Por analogia, L é a projecção horizontal do comprimento do arco de contacto entre a chapa e os rolos na direcção x e h_m é a espessura média de laminagem entre a entrada e a saída da região em deformação plástica, dada por,

$$h_m = \frac{h_0 + h_f}{2} \tag{4.5.3}$$

A aproximação da largura L à projecção do comprimento de contacto advém do raio dos rolos ser geralmente muito maior do que a espessura da chapa ($R >> h$) pelo que é razoável admitir que o arco de contacto pode ser substituído pela sua projecção horizontal. Nestas condições, de acordo com a geometria da operação de laminagem da figura anterior, a projecção horizontal do arco de contacto do rolo com a chapa vale,

$$L = \sqrt{R\,\Delta h} \tag{4.5.4}$$

em que Δh é a redução de espessura da chapa na operação de laminagem.

Considerando os dados do problema a espessura média de laminagem (4.5.3) vale,

$$h_m = \frac{3 + 2.5}{2} = 2.75 \text{ mm} \tag{4.5.5}$$

e a projecção horizontal do arco de contacto do rolo com a chapa (4.5.4) vale,

$$L = \sqrt{250 \times (3 - 2.5)} = 11.18 \text{ mm} \tag{4.5.6}$$

A força que o material exerce no sentido de afastar os rolos de laminagem F_s, representada na figura seguinte, pode ser calculada multiplicando a área correspondente à projecção horizontal do arco de contacto entre a chapa e o material pela pressão média na interface rolo/chapa, obtendo-se,

$$F_s = p_{média}\, L\, w \tag{4.5.7}$$

Tendo em consideração o estudo da operação da compressão de uma barra em condições de deformação plástica plana, efectuado com base no método da fatia elementar no problema 4.4, conclui-se que a pressão média de contacto na interface rolo/chapa se pode determinar apartir da distribuição de pressão normal fornecida pela expressão (4.4.4), obtendo-se,

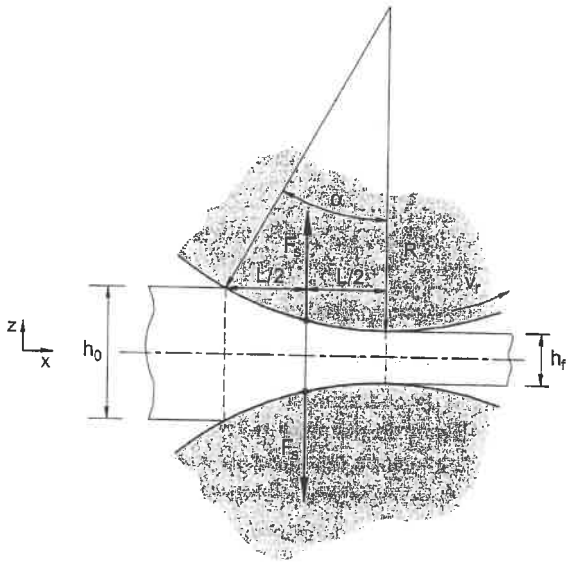
$$p_{média} = \frac{1}{L/2}\int_0^{L/2} \sigma_e \exp\left[\frac{2\mu}{h_m}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] dx = \sigma_e \frac{h_m}{\mu L}\left[\exp\left(\frac{\mu L}{h_m}\right) - 1\right] \tag{4.5.8}$$

Substituindo os dados do problema e os resultados obtidos em (4.5.5) e (4.5.6) na equação anterior obtém-se a pressão média de contacto na interface rolo/chapa,

$$p_{média} = 250 \times \frac{2.75}{0.1 \times 11.18}\left[\exp\left(\frac{0.1 \times 11.18}{2.75}\right) - 1\right] = 308.47 \text{ MPa} \tag{4.5.9}$$

A que corresponde a seguinte força de separação dos rolos de laminagem (4.5.7),

$$F_s = 308.47 \times 11.18 \times 200 = 6897389 \text{ N} \tag{4.5.10}$$

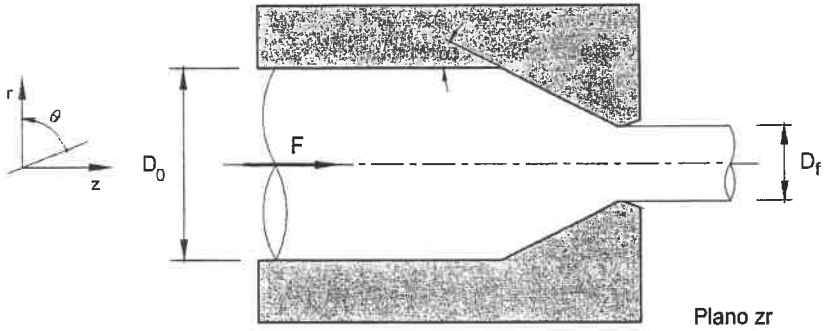


b) Para determinar o momento de laminagem considera-se que a força de separação dos rolos, F_s, actua a meio do arco de contacto na direcção vertical (segundo o eixo z) conforme ilustra a figura anterior. Nestas condições, o braço do momento vale $L/2$ e, como existem dois rolos motores, o valor do momento total de laminagem, determina-se do seguinte modo,

$$M = F_s\, L = 6897389 \times 11.18 \times 10^{-3} = 7711.3 \text{ N.m} \tag{4.5.11}$$

Problema 4.6

Considere a operação de extrusão cilíndrica directa através de uma matriz cónica representada na figura.



Sabendo que a intensidade das tensões de corte devidas ao atrito na interface com a ferramenta pode ser estimada através da lei de Prandtl, $\tau = mk$, determine:

a) A tensão axial no material à entrada da matriz cónica.

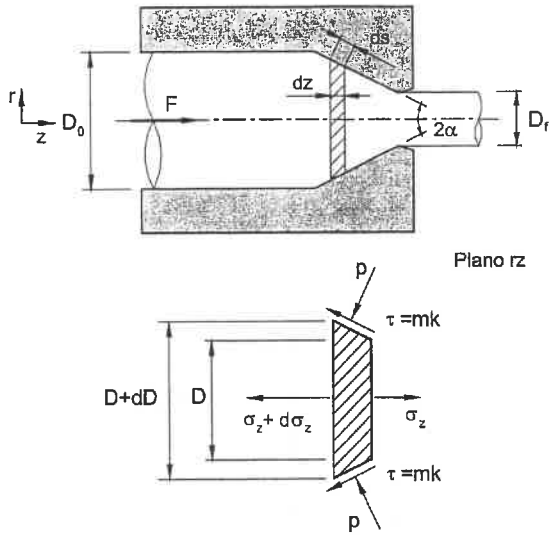
b) A pressão de extrusão p_e aplicada pelo punção na extremidade da matéria-prima.

c) A força a aplicar no início da operação de extrusão cilíndrica directa de um varão em aço carbono com 15 mm de diâmetro e 45 mm de comprimento destinada a obter um varão com 9.5 mm de diâmetro. Sabendo que o semi-ângulo de abertura da matriz é $\alpha = 30^o$ e o factor de atrito na interface com a ferramenta é $m = 0.05$.

Admita que a lei de comportamento tensão-extensão do aço carbono pode ser aproximada por intermédio de um modelo rígido-plástico $\bar{\sigma} = 685.2\bar{\varepsilon}^{0.185}$ MPa com $\sigma_e = 300$ MPa.

Resolução

a) Para resolver este problema começa-se por identificar uma fatia elementar que seja característica da deformação plástica da peça, no interior da matriz, conforme ilustra a figura seguinte. Seguindo a metodologia de aplicação do método da fatia elementar considerem-se as tensões que actuam numa fatia elementar de geometria tronco-cónica existente na zona cónica da matriz.



Efectuando o equilíbrio de forças na direcção axial (direcção z) do elemento de volume, pode-se estabelecer a seguinte equação diferencial,

$$(\sigma_z + d\sigma_z)\frac{\pi}{4}(D+dD)^2 + p\,\mathrm{sen}\,\alpha\left(\pi D\,\frac{dz}{\cos\alpha}\right) + \tau\cos\alpha\left(\pi D\,\frac{dz}{\cos\alpha}\right) = \sigma_z\,\frac{\pi}{4}D^2 \qquad (4.6.1)$$

Esta equação pode ser simplificada desprezando os termos de ordem superior, obtendo-se,

$$\sigma_z\,\frac{D\,dD}{2} + \frac{D^2\,d\sigma_z}{4} + p\,D\,\mathrm{tg}\,\alpha\,dz + \tau\,D\,dz = 0 \qquad (4.6.2)$$

Atendendo à relação geométrica,

$$\frac{dD/2}{dz} = \text{tg}\,\alpha \Leftrightarrow dz = \frac{dD}{2\,\text{tg}\,\alpha} \tag{4.6.3}$$

a equação (4.6.2) pode reescrever-se do seguinte modo,

$$\sigma_z\, dD + \frac{D\, d\sigma_z}{2} + p\, dD + \tau \frac{dD}{\text{tg}\,\alpha} = 0 \tag{4.6.4}$$

Substituindo a tensão de corte devida ao atrito na interface com a ferramenta, $\tau = mk$, na equação anterior obtém-se a seguinte igualdade,

$$\sigma_z\, dD + \frac{D\, d\sigma_z}{2} + p\, dD + mk \frac{dD}{\text{tg}\,\alpha} = 0 \tag{4.6.5}$$

Para resolver a equação anterior é necessário estabelecer uma relação entre a tensão axial σ_z e a pressão p. Neste sentido, admitindo que r, θ, z são direcções principais, que as tensões σ_r, σ_θ e σ_z são tensões principais, que se mantêm constantes no plano da fatia elementar e que as tensões radiais e tangenciais são aproximadamente iguais $\sigma_r \cong \sigma_\theta$, pode-se relacionar o valor destas tensões aplicando um critério de plasticidade, como por exemplo o de Tresca, do seguinte modo,

$$\begin{matrix} \sigma_z = \sigma_1 \\ \sigma_r \cong \sigma_\theta = \sigma_3 \end{matrix} \Rightarrow \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_z - \sigma_r = 2k \tag{4.6.6}$$

Torna-se então necessário determinar o valor da tensão σ_r através do equilíbrio de forças na direcção radial, obtendo-se,

$$\sigma_r\, \pi D dz + p \pi D \cos\alpha\, ds = mk\, \pi D \text{sen}\,\alpha\, ds \tag{4.6.7}$$

em que a tensão de corte devida ao atrito na interface com a ferramenta foi novamente contabilizada através da lei de Prandtl, $\tau = mk$.

Porém, se atendermos a que,

$$\cos\alpha = \frac{dz}{ds} \tag{4.6.8}$$

a equação (4.6.7) pode ser reescrita obtendo-se a seguinte relação entre a tensão σ_r e a pressão p aplicada pela matriz de extrusão,

$$\sigma_r = mk\,\text{tg}\,\alpha - p \tag{4.6.9}$$

Este resultado permite relacionar, de acordo com o critério de plasticidade de Tresca (4.6.6), a tensão axial σ_z e a pressão p, do seguinte modo,

$$\sigma_z - (mk\,\text{tg}\,\alpha - p) = 2k \Leftrightarrow p = 2k + mk\,\text{tg}\,\alpha - \sigma_z \tag{4.6.10}$$

Substituindo este resultado na equação (4.6.5) é possível proceder à eliminação de uma das variáveis e transformar a referida equação na seguinte forma diferencial de variáveis separadas,

$$\begin{aligned} &\sigma_z\, dD + \frac{D\, d\sigma_z}{2} + (2k + mk\,\text{tg}\,\alpha - \sigma_z) dD + mk \frac{dD}{\text{tg}\,\alpha} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d\sigma_z = -2k \left(2 + m\,\text{tg}\,\alpha + m \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}\right) \frac{dD}{D} \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

Para resolver a equação anterior é necessário conhecer as condições de fronteira estáticas associadas à operação de extrusão. Na secção de saída da matriz as condições de fronteira são as seguintes,

$$\sigma_z = 0 \text{ e } D = D_f \tag{4.6.12}$$

Deste modo a integração da equação (4.6.12) efectua-se do seguinte modo,

$$\int_{\sigma_z}^{0} d\sigma_z = \int_{D}^{D_f} -2k \left(2 + m\,\text{tg}\,\alpha + m \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}\right) \frac{dD}{D} \tag{4.6.13}$$

De que resulta a seguinte expressão para contabilizar a tensão axial σ_z em função do diâmetro D no interior da zona cónica,

$$\sigma_z = -2k \left[1 + m\left(\text{tg}\,\alpha + \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}\right)\right] \ln\left(\frac{D}{D_f}\right) \tag{4.6.14}$$

Conhecida a tensão axial σ_z, a distribuição de tensões no interior da região em deformação plástica poderá ser determinada, de acordo (4.6.6), através de,

$$\sigma_z = -2k\left[2 + m\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right]\ln\left(\frac{D}{D_f}\right)$$
$$\sigma_r = \sigma_z - 2k = -2k\left[3 + m\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right]\ln\left(\frac{D}{D_f}\right) \qquad (4.6.15)$$
$$\sigma_\theta \cong \sigma_r$$

E a tensão axial que actua no material à entrada da matriz, onde $D = D_0$, determina-se através da equação (4.6.14) obtendo-se o seguinte valor,

$$\sigma_{z_{entrada\ matriz}} = -2k\left[2 + m\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right]\ln\left(\frac{D_0}{D_f}\right) \qquad (4.6.16)$$

Atendendo ao facto de que a extensão efectiva à saída da matriz de extrusão é contabilizada através de,

$$\bar{\varepsilon} = \ln\frac{A_0}{A_f} = \ln\left(\frac{D_0}{D_f}\right)^2 \qquad (4.6.17)$$

as tensões principais à entrada da matriz de extrusão (4.6.15) podem ser determinadas em função da extensão efectiva imposta na operação de extrusão (4.6.17) do seguinte modo,

$$\sigma_{z_{entrada\ matriz}} = -2k\left[1 + \frac{m}{2}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right]\bar{\varepsilon}$$
$$\sigma_{r_{entrada\ matriz}} = -2k\left[\frac{3}{2} + \frac{m}{2}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right]\bar{\varepsilon} \qquad (4.6.18)$$
$$\sigma_{\theta\,entrada\ matriz} \cong \sigma_{r\,entrada\ matriz}$$

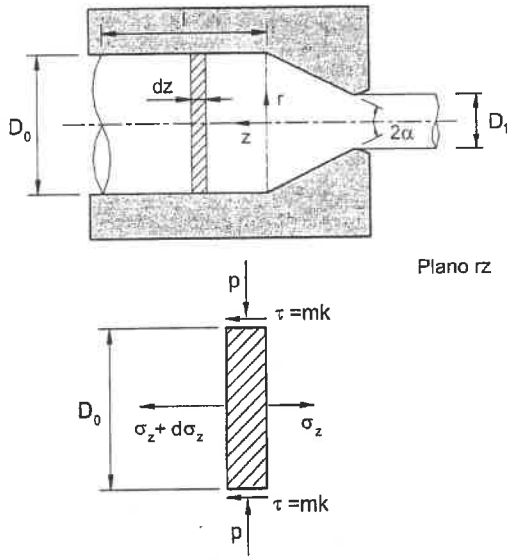
Importa referir que os cálculos efectuados, através da aplicação do método da fatia elementar, não consideraram a existência de encruamento durante a deformação plástica do componente. No entanto, caso o material apresente encruamento, é possível contabilizar a sua existência substituindo, nas equações anteriores, a tensão limite de elasticidade $2k$ pelo valor médio da tensão efectiva, σ_{unif}, que caracteriza o estado de

tensão no interior do material em deformação plástica. Este valor de tensão, σ_{unif}, resulta da aplicação do método da energia uniforme conforme foi abordado no problema 3.4 do Capítulo 3.

b) Para determinar a pressão de extrusão é necessário contabilizar o acréscimo de pressão, p_a, a exercer pelo punção devido às tensões de atrito, τ, que se desenvolvem entre o material e as paredes do contentor. Para tal começa-se por identificar uma fatia elementar que seja característica da peça, no interior do contentor, conforme ilustra a figura seguinte. Considerem-se as tensões que actuam na fatia elementar de geometria cilíndrica representadas na figura. Efectuando o equilíbrio de forças na direcção axial (direcção z) do elemento de volume pode-se estabelecer a seguinte equação diferencial,

$$(\sigma_z + d\sigma_z)\frac{\pi}{4}D_0^{\,2} + \tau\pi D_0\,dz = \sigma_z\frac{\pi}{4}D_0^{\,2} \qquad (4.6.19)$$

em que $\tau = mk$ é a tensão de corte devida ao atrito na interface com o contentor de extrusão e D_0 é o diâmetro interior do contentor.



A equação anterior pode ser simplificada e reescrita na seguinte forma diferencial de variáveis separadas,

$$d\sigma_z = -\frac{4\tau}{D_0}dz \tag{4.6.20}$$

ou,

$$d\sigma_z = -\frac{4mk}{D_0}dz \tag{4.6.21}$$

substituindo a tensão de corte devida ao atrito na interface com o contentor por $\tau = mk$.

A resolução das equações anteriores efectua-se conhecendo as condições de fronteira estáticas do problema à saída do contentor de extrusão (entrada na matriz cónica) determinadas na alínea anterior (4.6.16),

$$z = 0 \quad e \quad \sigma_z = \sigma_{z\,entrada\ matriz} \tag{4.6.22}$$

Deste modo a integração da equação (4.6.21) efectua-se do seguinte modo,

$$\int_{\sigma_{z\,entrada\,matriz}}^{\sigma_z} d\sigma_z = \int_0^l -\frac{4mk}{D_0}dz \tag{4.6.23}$$

onde l representa o comprimento da matéria-prima no interior do contentor de extrusão para o instante considerado, assinalado na figura anterior, que permite obter a seguinte expressão para contabilizar a tensão axial σ_z em função do comprimento de contacto entre o material e o contentor l,

$$\sigma_z = -\frac{4mk}{D_0}l + \sigma_{z\,entrada\,matriz} \tag{4.6.24}$$

A pressão de extrusão p_e aplicada pelo punção na extremidade da matéria-prima corresponde à intensidade da tensão σ_z nesta extremidade. Substituindo o valor da tensão axial à entrada da matriz de extrusão determinado na equação (4.6.16) na equação anterior obtém-se a pressão de extrusão em função do comprimento de contacto entre o material e o contentor l,

$$p_e = \frac{4mk}{D_0}l + 2k\left[2 + m\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right]\ln\left(\frac{D_0}{D_f}\right) \tag{4.6.25}$$

ou,

$$p_e = \frac{4mk}{D_0}l + 2k\left[1 + \frac{m}{2}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right]\bar{\varepsilon} \tag{4.6.26}$$

caso se substitua na equação (4.6.25) o valor da tensão axial à entrada da matriz de extrusão em função da extensão efectiva imposta na operação de extrusão, determinado em (4.6.18).

Os resultados fornecidos pelas equações (4.6.25) e (4.6.26) correspondem sempre a valores subestimados da pressão de extrusão real, na medida o método da fatia elementar por ser estaticamente admissível não permite contabilizar os efeitos da deformação redundante. É importante salientar que em ambas as expressões a primeira parcela corresponde ao acréscimo de pressão de extrusão que é necessário exercer devido à existência de atrito entre o material e as paredes do contentor, p_a,

$$p_a = \frac{4mk}{D_0}l \tag{4.6.27}$$

É ainda interessante verificar que no caso de não existir atrito, $m = 0$, existe uma coincidência total entre as estimativas do valor da pressão de extrusão fornecidas pelos métodos da energia uniforme e da fatia elementar. De facto, fazendo $m = 0$ na equação (4.6.26) chega-se à seguinte expressão,

$$p_e = 2k\,\bar{\varepsilon} \tag{4.6.28}$$

Este valor é análogo ao que tinha sido anteriormente obtido para a pressão de extrusão através do método da energia uniforme (3.4.1), uma vez que a existência de encruamento no material corresponde a substituir $2k$ por σ_{unif} na expressão anterior.

c) A força de extrusão obtém-se multiplicando a pressão de extrusão, p_e, pela área inicial, A_0, da secção transversal do varão,

$$F = p_e \times A_0 = p_e\frac{\pi D_0^2}{4} \tag{4.6.29}$$

Devido ao material do varão apresentar encruamento, a pressão de extrusão pode ser estimada através do método da fatia elementar, conforme foi referido anteriormente, a partir de uma forma modificada das equações (4.6.25) ou (4.6.26), resultante da substituição da tensão limite de elasticidade $2k$ pelo valor médio da tensão efectiva σ_{unif}. Torna-se então necessário efectuar cálculos preliminares para determinar a extensão

$$\bar{\varepsilon} = \ln \frac{A_0}{A_f} = \ln \frac{176.7}{70.9} = 0.91 \tag{4.6.29}$$

e,

$$\sigma_{unif} = \frac{K\varepsilon^n}{n+1} = \frac{685.2 \times (0.91)^{0.185}}{1.185} = 568.2 \text{ MPa} \tag{4.6.30}$$

O passo seguinte consiste em determinar a pressão de extrusão no instante inicial da operação apartir da modificação da equação (4.6.26) para contabilizar o encruamento do material,

$$p_e = \frac{4mk}{D_0} l + \sigma_{unif}\left[1 + \frac{m}{2}\left(\text{tg}\alpha + \frac{1}{\text{tg}\alpha}\right)\right]\bar{\varepsilon}$$
$$= \frac{4 \times 0.05 \times 150}{15} \times 45 + 568.2\left[1 + \frac{0.05}{2} \times \left(\text{tg}30° + \frac{1}{\text{tg}30°}\right)\right] \times 0.9 \tag{4.6.31}$$
$$= 636.9 \text{ MPa}$$

Finalmente, a força de extrusão determina-se por intermédio da equação (4.6.28),

$$F = 636.9 \times \frac{\pi \times 15^2}{4} = 112552.1 \text{ N} \cong 113 \text{ kN} \tag{4.6.32}$$

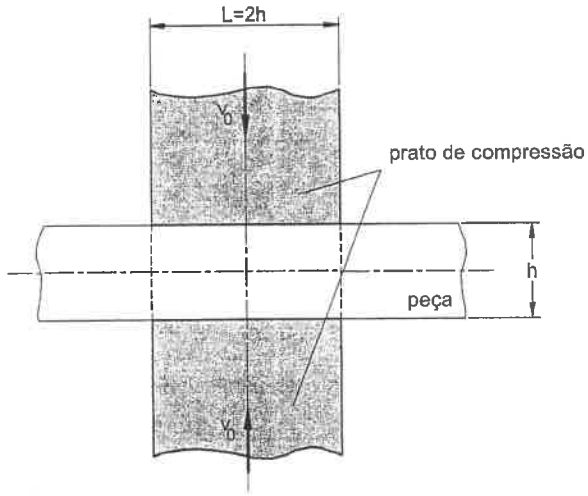
Para terminar, importar reafirmar que esta estimativa de força fornecida pelo método da fatia elementar será inferior ao valor real em virtude solução obtida pelo método da fatia elementar ser estaticamente admissível e, portanto, não contabilizar o efeito do trabalho redundante.

5. MÉTODO DAS LINHAS DE ESCORREGAMENTO

Embora o método das linhas de escorregamento tenha um limite de aplicabilidade relativamente reduzido é por muitos investigadores considerado fundamental na aprendizagem do modo como a teoria da plasticidade é aplicada aos processos de fabrico e na interpretação física dos resultados obtidos ao nível dos campos de tensões e de velocidades.

Problema 5.1

Considere a operação de compressão sem atrito em condições de deformação plástica plana, utilizando pratos de menor extensão que a peça que se encontra representada na figura.



a) Proponha um campo de linhas de escorregamento para a resolução do problema.

b) Determine o campo de tensões e proceda à sua representação no plano de Möhr.

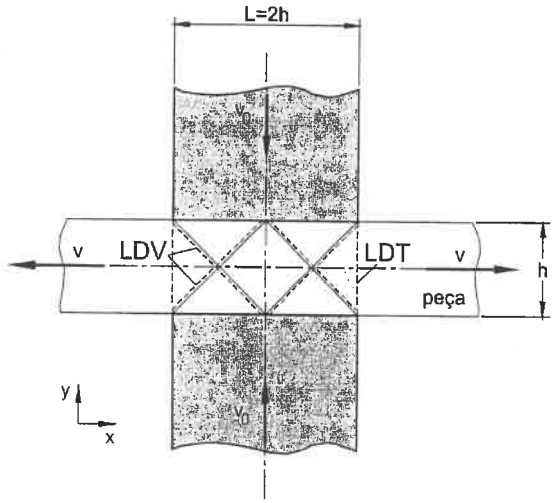
c) Calcule o valor da pressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material $p/2k$ que é aplicada pelos pratos de compressão.

d) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

e) Proceda à representação das linhas de fluxo.

Resolução

a) O campo de linhas de escorregamento que é proposto para a resolução do problema está representado na figura seguinte. O campo é constituído por 7 blocos rígidos dos quais seis têm geometria triangular (triângulos rectângulos) e por um bloco quadrangular, situado no meio da peça. Estes blocos encontram-se delimitados por duas linhas de descontinuidade de tensão (LDT), que separam a zona em deformação plástica da zona rígida que já não sofre a acção directa dos pratos compressores.



Este campo de tensões é estaticamente admissível na medida em que cumpre as condições fronteira:

- Na interface de contacto com os pratos compressores, onde a inexistência de atrito faz com que não se transmitam tensões de corte e, portanto, as linhas de escorregamento devem encontrar a interface a 45°;

- Impostas pelas linhas de simetria, onde a inexistência de tensões de corte determina que as direcções destas linhas sejam direcções principais e, portanto, as linhas de escorregamento as devem intersectar a 45°;

A análise da cinemática do problema permite concluir que o material adjacente aos pratos compressores e no interior dos respectivos campos triangulares, dever-se-á mover com uma velocidade cuja componente normal à interface é igual à velocidade dos pratos

compressores, v_0. O bloco quadrado central terá que estar parado, uma vez que ao ser atravessado por duas linhas de simetria, uma vertical e outra horizontal, não tem outra alternativa para conseguir respeitar simultaneamente as condições de fronteira impostas pelas duas linhas de simetria. Por outro lado, o material situado no interior dos dois campos triangulares uniformes que se encontram delimitados pelas linhas de descontinuidade de tensão (LDT) têm que se deslocar com uma velocidade horizontal, v, respeitando a existência de uma linha de simetria horizontal e assegurando a conservação de massa, característica da deformação plástica dos materiais metálicos, ou seja,

$$\begin{aligned} 2v_0\, 2h\, w &= 2vh\, w \\ v &= 2v_0 \end{aligned} \qquad (5.1.1)$$

em w é a largura do componente, na direcção perpendicular ao plano xy, que se mantém-se constante durante a operação devido à deformação plástica ocorrer em condições de deformação plástica plana nesta direcção.

Em face do exposto conclui-se que no campo de linhas de escorregamento proposto os blocos rígidos adjacentes apresentam velocidades diferentes. Consequentemente os pontos materiais que se encontram na intersecção das linhas de escorregamento não têm velocidade definida. Para assegurar a compatibilidade cinemática do campo de velocidades e a satisfação integral das condições de fronteira torna-se então necessário introduzir as linhas de descontinuidade de velocidade (LDV) que se encontram assinaladas a tracejado no plano físico representado na figura anterior. O campo que resulta deste procedimento é cinematicamente admissível na medida em que cumpre simultaneamente as condições fronteira cinemáticas e a condição de incompressibilidade do material.

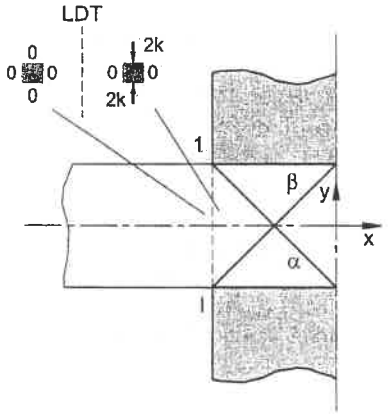
b) Tendo em consideração a simetria geométrica e cinemática do problema, considere-se a figura seguinte, onde se encontra representada a metade esquerda da operação de compressão. A representação do campo de tensões no plano de Möhr inicia-se através da marcação do círculo de Möhr, que representa o estado de tensão da zona triangular rígida junto à linha de descontinuidade de tensão. Sabe-se que a existência da LDT impõe que tanto a tensão normal que se exerce na direcção perpendicular à LDT, como a tensão de corte, têm que ser iguais dos dois lados da LDT. Como do lado esquerdo da LDT o material não se encontra em deformação plástica, então é rígido (ver figura seguinte). Por outro lado, na zona triangular rígida do lado direito da LDT, o material encontra-se em deformação plástica tendo por este motivo de respeitar um critério de plasticidade. Consequentemente, considerando o critério de plasticidade de Tresca, o estado de tensão no campo triangular uniforme do lado direito da LDT no plano xy, caracteriza-se por,

$$\sigma_x = \sigma_1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_y = \sigma_3 = -2k \tag{5.1.2}$$

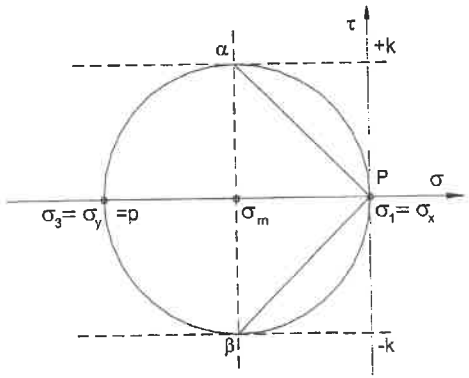
conforme se encontra representado na figura seguinte. A tensão na direcção z perpendicular ao plano xy vale,

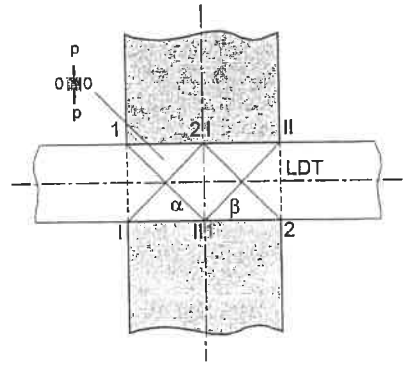
$$\sigma_z = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{5.1.3}$$

devido à deformação plástica ocorrer em condições de deformação plástica plana na direcção perpendicular ao plano xy.



Em face do exposto, e em virtude do campo de linhas de escorregamento proposto ser uniforme, conclui-se que o estado de tensão representativo de toda esta região é um único círculo de Möhr, tangente ao eixo das tensões de corte do lado das compressões, cuja tensão média é $\sigma_m = -k$ (ver figura seguinte). A posição do pólo no círculo de Möhr desta zona, associada à convenção que define o sentido da distorção das linhas α e β, determina que, no interior deste campo, as linhas de escorregamento α são as linhas que fazem 135° com a horizontal, enquanto que as linhas de escorregamento β são as linhas de escorregamento que fazem 45° com a horizontal. O lado direito da figura seguinte apresenta o plano físico da operação compressão em que as linhas de escorregamento se encontram identificadas de acordo com a convenção habitualmente utilizada segundo a qual as linhas de escorregamento α e β são descritas através da numeração árabe e romana, respectivamente.





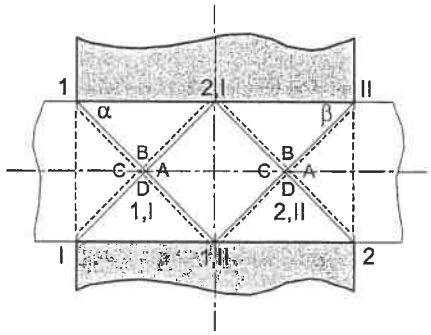
c) Uma vez que o estado de tensão é uniforme entre as duas LDT também a pressão aplicada pelo cunho será uniforme ao longo dos pratos compressores. O valor da pressão aplicada que corresponde à tensão normal que actua na direcção y obtém-se directamente do plano de Möhr,

$$p = \sigma_y = -2k \tag{5.1.4}$$

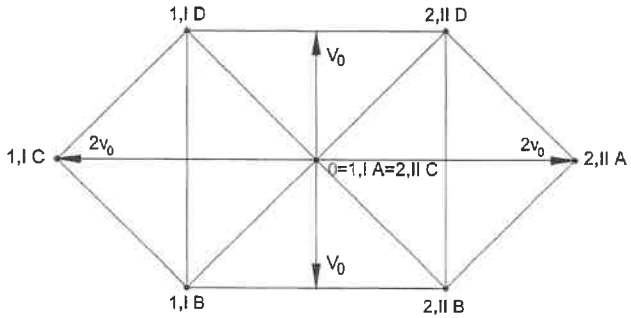
a que corresponde o seguinte valor da pressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material,

$$\frac{p}{2k} = 1 \tag{5.1.5}$$

d) Na alínea a) deste problema efectuou-se a análise cinemática do campo de linhas de escorregamento proposto do qual resultou a necessidade de introduzir as linhas de descontinuidade de velocidade, α_1, α_2, β_I e β_{II}, assinaladas para tornar o campo cinematicamente admissível. Como os pontos materiais (1,I) e (2,II), localizados na intersecção das linhas de descontinuidade de velocidade, não têm uma velocidade definida, a sua representação no hodógrafo é distinta consoante o quadrante em que são considerados. Por este motivo a sua posição no hodógrafo será referenciada adicionando à designação do ponto as letras A, B, C e D para identificar o quadrante em que se situam, de acordo com a figura seguinte.



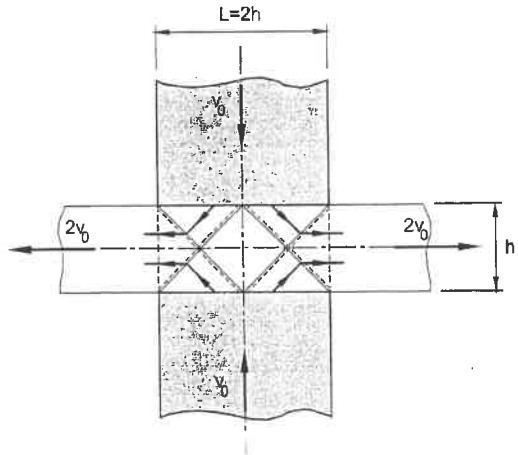
Em face da análise cinemática efectuada anteriormente é possível obter-se a representação vectorial do campo de velocidades. A construção do hodógrafo representado na figura seguinte inicia-se pela representação dos vectores cujas velocidades são conhecidas. Assim sendo, conhece-se a velocidade vertical dos pratos compressores, v_0 e as velocidades horizontais v dos dois campos triangulares, que se encontram delimitados pelas linhas de descontinuidade de tensão, a que correspondem as extremidades dos vectores velocidade nos pontos (1,I C) e (2,II A) do hodógrafo. O campo uniforme central com velocidade nula representa-se na origem do hodógrafo. Representam-se igualmente na origem do hodógrafo os pontos materiais (1,I A) e (2,II C), delimitados pelas linhas de descontinuidade de velocidade α_1 e β_I, e, α_2 e β_{II}, respectivamente, por pertencem ao campo uniforme central de velocidade nula.



Depois de representados os vectores cujas velocidades são conhecidas, procede-se à determinação das velocidades dos campos triangulares uniformes adjacentes aos pratos compressores com base nas propriedades definidas para as linhas de descontinuidade de velocidade. Para tal importa relembrar que as características destas linhas determinam a componente normal da velocidade seja igual de ambos os lados de uma linha de

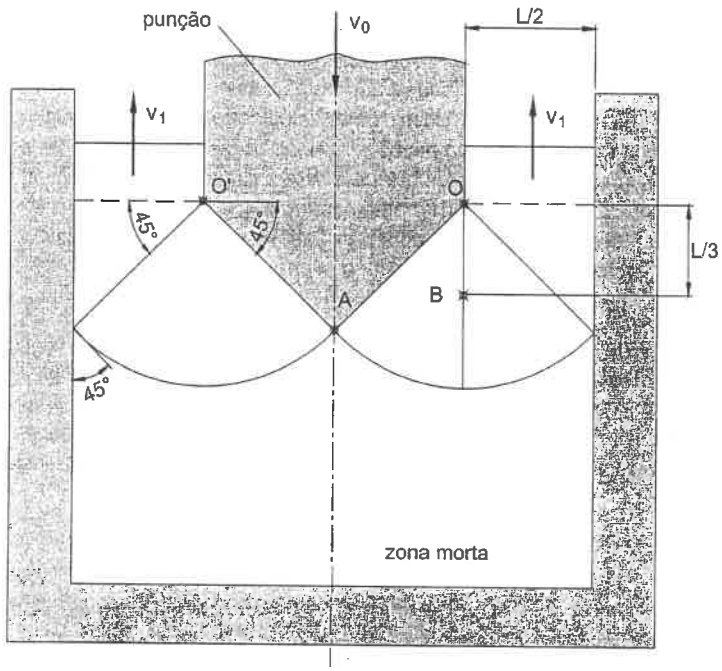
descontinuidade de velocidade e ainda que o valor da intensidade da descontinuidade de velocidade (diferença entre os módulos das velocidades) seja constante ao longo da mesma. Considere-se, por exemplo, o campo triangular do lado esquerdo da geometria que se encontra em contacto com o prato superior, para o qual a componente da velocidade na direcção y tem de ser igual à velocidade do prato compressor, v_0. Note-se que em virtude deste campo ser uniforme a velocidade do ponto material (1,I), quando considerado infinitamente acima das linhas de descontinuidade de velocidade, α_1 e β_I, coincide com a velocidade de qualquer ponto material situado no interior do campo uniforme que lhe é adjacente. Este mesmo ponto quando considerado infinitamente abaixo da linha de descontinuidade de velocidade α_1 e acima da linha de descontinuidade de velocidade β_I, tem uma velocidade horizontal igual a $2v_0$ com extremidade em (1,I C). Para compatibilizar estas duas condições, sabendo que a direcção das descontinuidades de velocidade é tangencial às respectivas linhas, então, a extremidade do vector velocidade do campo triangular em análise terá de ser o ponto (1,I B). Seguindo esta metodologia obtêm-se as velocidades dos restantes campos triangulares uniformes adjacentes aos pratos compressores.

e) Finalmente, a figura seguinte mostra as linhas de fluxo, ilustrando as direcções de escoamento ou movimentação do material em deformação plástica. Estas linhas foram obtidas a partir da representação vectorial do campo de velocidades efectuada na alínea anterior e são tangentes ao vector velocidade em cada ponto. Importa ainda salientar que a descontinuidade de uma linha de fluxo corresponde no plano físico a uma descontinuidade de velocidade.



Problema 5.2

Considere a operação de extrusão inversa, em condições de deformação plástica plana e com uma relação de extrusão $R = 2$, que se encontra representada na figura. A figura inclui uma representação esquemática do campo de linhas de escorregamento (incompleto) que permite resolver o problema do ponto de vista estático e cinemático.



a) Indique, justificando, qual o tipo de atrito que deverá existir na superfície da base do cunho (OA) e na parede do contentor.

b) Resolva o campo de tensões procedendo à sua representação no plano de Möhr.

c) Determine o valor das tensões principais no ponto B.

d) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

Resolução

a) O campo de linhas de escorregamento proposto, para o material que se encontra em deformação plástica nesta operação, é constituído por dois leques centrados nos pontos singulares O e O', e por dois campos uniformes de geometria triangular que se encontram separados da zona rígida de material à saída do contentor de extrusão através de duas linhas de descontinuidade de tensão, representadas a tracejado.

Na base do cunho duas linhas de escorregamento radiais dos dois leques, do lado esquerdo e direito da linha de simetria, encontram a superfície tangencialmente, enquanto que os arcos de círculo dos leques vão intersectar esta superfície ortogonalmente. Sabendo que as linhas de escorregamento representam graficamente as direcções dos planos em que a tensão de corte é máxima, conclui-se que na interface material/cunho, onde existem linhas de escorregamento tangenciais, o atrito é máximo.

Por outro lado, na parede do contentor as linhas de escorregamento encontram a interface de contacto a 45°. Sabendo que os planos em que a tensão de corte é máxima fazem ângulos de 45° relativamente aos planos principais, então que a interface material/parede do contentor é um plano principal (onde as tensões de corte são inexistentes) pelo que se trata de uma superfície com atrito nulo.

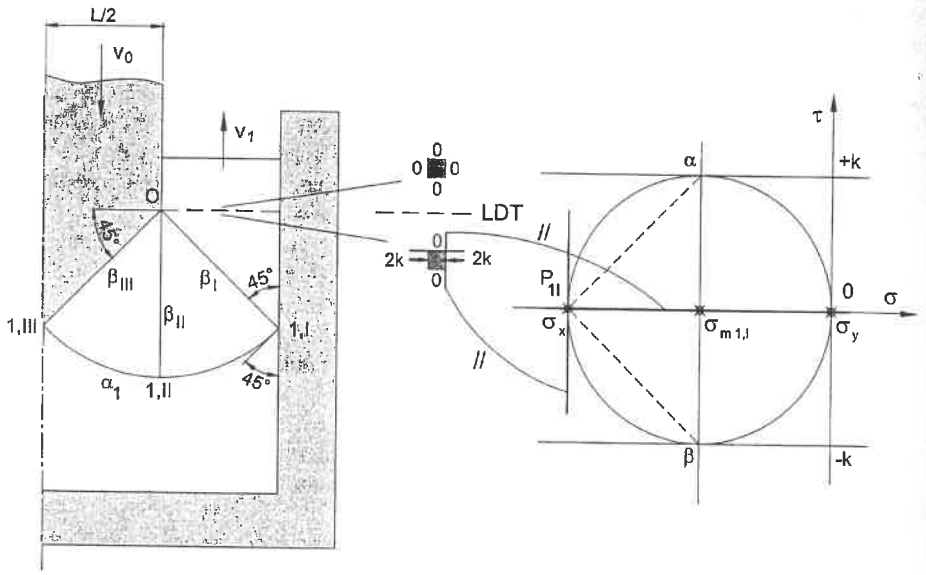
b) Uma vez que o problema apresenta uma linha de simetria geométrica e cinemática vertical apenas se irá analisar a sua metade direita, que se encontra ilustrada na figura seguinte.

Para determinar o campo de tensões é necessário começar por identificar as linhas de escorregamento α e β através do conhecimento do estado de tensão no interior campo triangular uniforme. Para tal, sabe-se que a existência da linha de descontinuidade de tensão, que separa a zona em deformação plástica da zona rígida do material à saída do contentor de extrusão, impõe que tanto a tensão normal que se exerce na direcção perpendicular à LDT, como a respectiva tensão de corte, sejam nulas no interior do campo uniforme devido à existência da zona rígida situada à saída do contentor. Como o material no interior campo triangular está em deformação plástica considerando o critério de plasticidade de Tresca, conclui-se que o seu estado de tensão é de compressão simples e caracteriza-se por,

$$\sigma_x = \sigma_3 = -2k \quad \text{e} \quad \sigma_y = \sigma_1 = 0 \tag{5.2.1}$$

As representações gráficas no plano físico e no plano de Möhr (plano das tensões) estão disponíveis na figura seguinte do lado esquerdo e direito, respectivamente. Conhecidas as tensões que actuam nas direcções x e y, o pólo determina-se no plano das tensões através da intersecção das duas rectas paralelas às direcções físicas onde estas tensões

actuam e que passam pelos pontos (-2k,0) e (0,0), localizados no círculo representativo das tensões no interior do campo triangular uniforme. Esta metodologia de determinação do pólo encontra-se representada esquematicamente no plano de Möhr da figura seguinte.



Conhecida a posição do pólo no círculo de Möhr desta zona, associada à convenção que define o sentido da distorção das linhas α e β, conclui-se que no interior deste campo, as linhas de escorregamento α e β fazem 45° e 135° com a horizontal, respectivamente. Na figura anterior, do lado esquerdo, no plano físico da operação, encontram-se identificadas as linhas de escorregamento α e β seguindo a convenção de representação apoiada num par ordenado formado por numeração árabe e romana, respectivamente.

Em face do exposto conclui-se que a tensão média no campo triangular referido, e em particular no ponto (1,I) é,

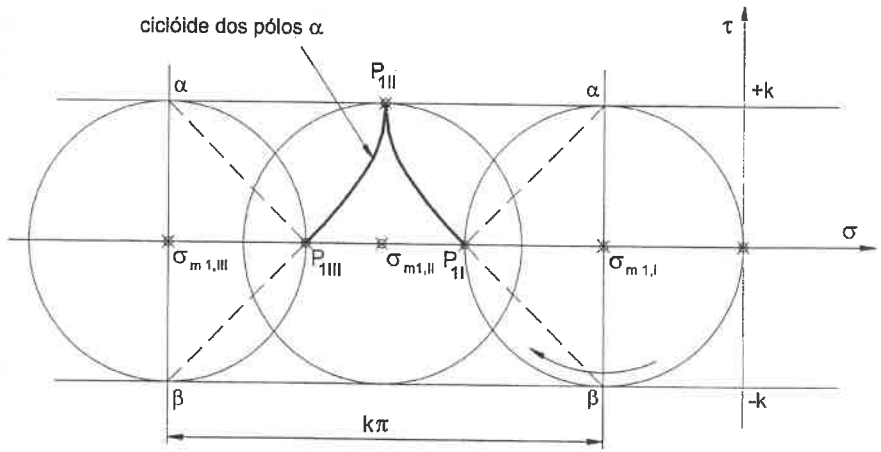
$$\sigma_{m_{1,I}} = -k \tag{5.2.2}$$

A determinação do estado de tensão dos pontos (1,II) e (1,III) situados sobre a linha de escorregamento α_1 efectua-se aplicando as equações de Hencky. Conhecendo-se a tensão média do ponto (1,I) e uma vez que as tangentes à linha de escorregamento α nestes pontos diferem de um ângulo $d\phi = -\pi/4$ e $d\phi = -\pi/2$, respectivamente, relativamente à tangente no ponto (1,I), a equação de Hencky para uma linha α permite determinar as tensões médias nos pontos (1,II) e (1,III) do seguinte modo,

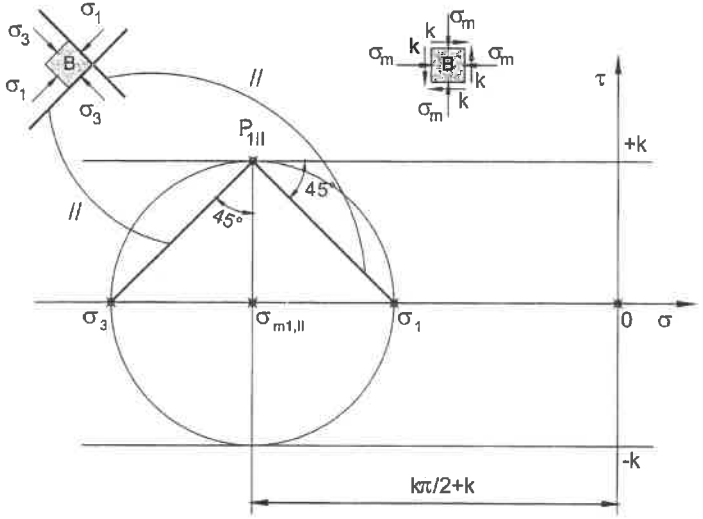
$$\begin{aligned} &\Delta\sigma_{m_{1,II-1,I}} = \sigma_{m_{1,II}} - \sigma_{m_{1,I}} = 2k\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma_{m_{1,II}} = \sigma_{m_{1,I}} - k\frac{\pi}{2} = -k - k\frac{\pi}{2} = -k\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

$$\begin{aligned} &\Delta\sigma_{m_{1,III-1,I}} = \sigma_{m_{1,III}} - \sigma_{m_{1,I}} = 2k\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma_{m_{1,III}} = \sigma_{m_{1,I}} - k\pi = -k - k\pi = -k\left(1+\pi\right) \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

O conhecimento das tensões médias ao longo da linha α permite representar o campo de tensões no plano de Möhr para esta operação de extrusão, em condições de deformação plástica plana, conforme se encontra representado na figura seguinte. Encontra-se igualmente representada a respectiva ciclóide dos pólos representativa do lugar geométrico dos pólos dos diferentes estados de tensão situados entre (1,I) e (1,III) sobre a linha α. Esta ciclóide resulta do círculo de Möhr 'rolar sem escorregar' sobre a recta $\tau = k$.



c) O ponto B encontra-se sobre a linha radial do campo de linhas de escorregamento em forma de leque que passa no ponto (1,II). Como de acordo com as equações de Hencky, ao longo das linhas radiais de um leque, a tensão média é constante (porque o declive da tangente à linha não varia) então o círculo de Möhr representativo do estado de tensão no ponto B é o mesmo que o do ponto (1,II) cuja tensão média tinha sido determinada por intermédio de (5.2.3). As tensões que actuam no ponto B segundo as direcções das linhas de escorregamento são as tensões de corte máximas, $\tau = \pm k$ e as tensões normais tomam o valor da tensão média σ_m, conforme se encontra ilustrado na figura seguinte. O sentido de actuação das tensões de corte representadas segue a convenção que estabelece que às linhas de escorregamento da família α estão associadas tensões de corte máximas que provocam distorções no sentido horário, enquanto que às linhas de escorregamento da família β, pelo contrário, estão associadas distorções anti-horárias.



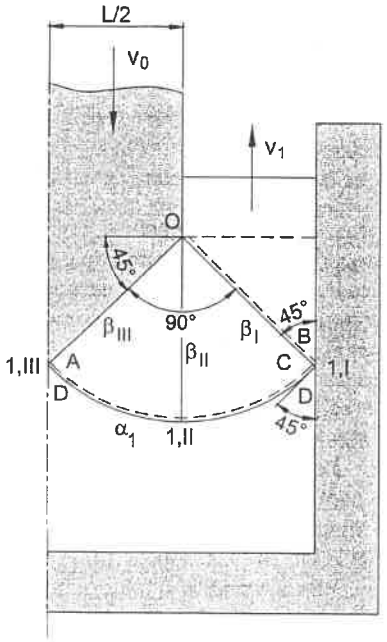
De acordo com a posição do círculo de Möhr representativo do estado de tensão no ponto B conclui-se que as tensões principais máxima e mínima que actuam no ponto P são,

$$\sigma_1 = \sigma_{m_{1,II}} + k = -k - k\frac{\pi}{2} + k = -k\frac{\pi}{2}$$
$$\sigma_3 = \sigma_{m_{1,II}} - k = -k - k\frac{\pi}{2} - k = -k\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (5.2.5)$$

A posição do pólo no círculo de Möhr deste ponto permite concluir que as direcções de actuação das tensões se encontram rodadas 45°, no sentido anti-horário, relativamente às direcções das linhas de escorregamento α e β, respectivamente. O canto superior esquerdo da figura seguinte apresenta igualmente as solicitações que actuam no ponto B no referencial principal.

d) Para determinar o campo de velocidades e traçar o hodógrafo é necessário tornar a solução de linhas de escorregamento num campo de velocidades cinematicamente admissível. A análise cinemática do problema permite concluir que o material adjacente ao punção dever-se-á deslocar com uma velocidade cuja componente normal à interface de contacto seja igual à respectiva componente normal da velocidade da ferramenta. Sabe-se também que o material localizado abaixo da linha de escorregamento α_1 se encontra sem movimento devido a esta região já não sofrer a acção do punção e tratar-se de uma zona rígida (que não alcança a deformação plástica). Pode-se então concluir que o ponto (1,III) apresenta velocidades diferentes infinitamente acima e abaixo da linha de escorregamento α_1 pelo que para assegurar a compatibilidade cinemática do campo de velocidades e a satisfação integral das condições de fronteira torna-se necessário introduzir a linha de descontinuidade de velocidade (LDV) com a direcção da linha de escorregamento α_1 que se encontra assinalada a tracejado no plano físico representado na figura seguinte. Consequentemente o ponto (1,III) irá ter duas representações distintas no hodógrafo, consoante o quadrante em que é considerado, sendo por isso, a sua posição referenciada no hodógrafo adicionando à designação do ponto as letras A e D para identificar o quadrante em que este se situa (ver plano físico da figura seguinte).

Adicionalmente, de acordo com as propriedades das LDV sendo a linha de escorregamento α_1 uma linha de descontinuidade de velocidade, ao encontrar a fronteira rígida do contentor irá sofrer uma reflexão numa linha da outra família, neste caso β_{III}. Deste modo, também o ponto (1,I) irá ter três representações distintas no hodógrafo consoante o quadrante em que é considerado, sendo por isso, a sua posição no hodógrafo referenciada adicionando à designação do ponto as letras B, C e D para identificar o quadrante em que este se situa (ver plano físico da figura seguinte).

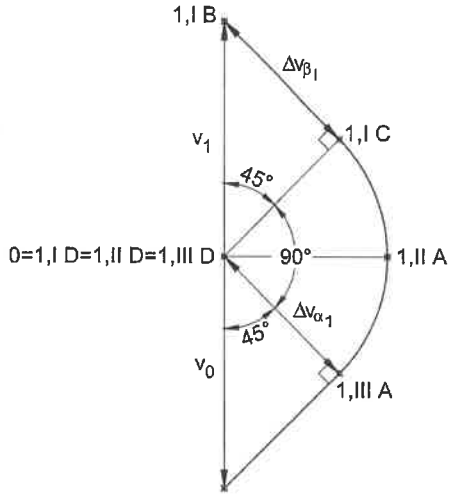


Introduzidas as linhas de descontinuidade de velocidade que tornam a solução de linhas de escorregamento cinematicamente admissível pode dar-se início à representação vectorial do campo de velocidades no hodógrafo da figura seguinte. Conforme já foi referido o ponto (1,III) situado infinitamente abaixo da linha da LDV tem velocidade nula devido ao facto desta região da peça já não sofrer a acção do cunho e, por isso, ser uma zona rígida. Por outro lado o ponto (1,III) localizado infinitamente acima da linha da LDV e no interior do leque, tem de possuir uma velocidade total cuja componente normal à interface de contacto seja igual à respectiva componente normal da velocidade da ferramenta. Sabendo ainda que a componente normal da velocidade é igual de ambos os lados de uma linha de descontinuidade de velocidade, então o ponto material (1,III) situado no interior do leque, tem que ter velocidade total tangente à linha α_1 no referido ponto, cuja intensidade é,

$$v_{1,III\,A} = v_0 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \qquad (5.2.6)$$

A velocidade deste ponto representa-se no hodógrafo por intermédio do vector velocidade cujo extremo está em (1,III A). A intensidade da descontinuidade de velocidade Δv_{α_1}, da linha α_1, é a que se encontra representada no hodógrafo.

Uma vez que todos os pontos materiais situados abaixo da linha de descontinuidade de velocidade α_1 se encontram isentos de qualquer tipo de movimento, para assegurar que a componente normal da velocidade seja igual de ambos os lados da linha, os pontos materiais acima da linha α_1 e localizados no interior do leque, devem possuir uma velocidade total tangente à linha. Como o valor da descontinuidade de velocidade se mantém constante ao longo de qualquer linha de descontinuidade de velocidade, então, uma vez que já se determinou a intensidade da descontinuidade de velocidade Δv_{α_1}, para determinar no hodógrafo as velocidades dos pontos que se localizam sobre esta linha, basta traçar um arco de circunferência cujo ângulo ao centro é 90° e que ligue os pontos (1,III A) e (1,I C).



Finalmente, para representar no hodógrafo o vector velocidade de qualquer ponto material situado no interior do campo uniforme situado acima da linha de descontinuidade de velocidade β_1, sabe-se que a existência da parede vertical do contentor impõe que a velocidade no interior deste campo seja paralela à superfície da ferramenta. Partindo do conhecimento da velocidade no interior do leque no ponto material (1,I) abaixo de β_1 e sabendo que ao atravessar uma linha de descontinuidade de velocidade a descontinuidade de velocidade tem a direcção da respectiva linha, basta traçar a partir do

ponto (1,I C) uma recta paralela à linha de descontinuidade de velocidade β_1 para obter no hodógrafo a extremidade do vector velocidade alinhado com a parede vertical do contentor no ponto (1,I B). Note-se que em virtude do campo triangular ser uniforme a velocidade do ponto material (1,I B), situado acima da linha de descontinuidade de velocidade, coincide com a velocidade de qualquer ponto material situado no interior do campo uniforme que lhe é adjacente.

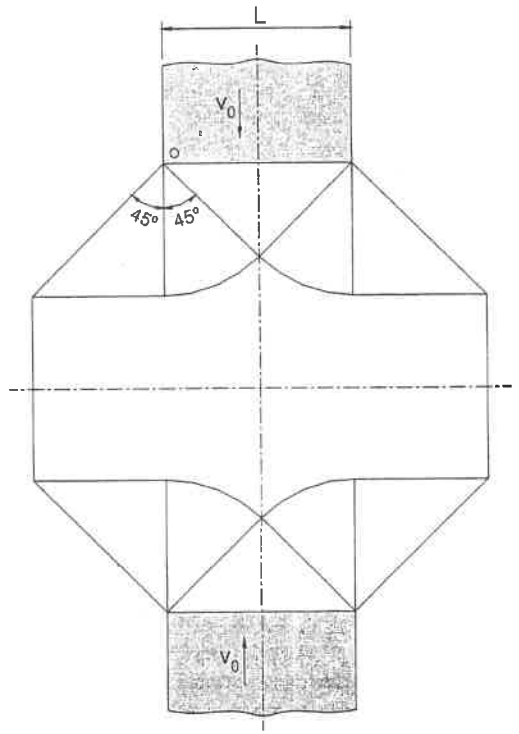
Alternativamente, conhecida a direcção do vector velocidade no interior do campo triangular uniforme imposta pela condição fronteira da ferramenta, a respectiva intensidade poderia ter sido obtida através da conservação de volume característica da deformação plástica dos materiais metálicos, que em condições de deformação plana se escreve do seguinte modo para esta operação,

$$\begin{aligned} v_0\, L &= v_1\, L \\ v_0 &= v_1 \end{aligned} \qquad (5.2.7)$$

em que L é a largura do punção de extrusão, v_0 é a sua velocidade e v_1 é a velocidade do material à saída da operação de extrusão, cuja relação de extrusão é $R = 2$.

Problema 5.3

Considere o campo de linhas de escorregamento (não representado na sua totalidade) para a operação de compressão sem atrito de uma barra de secção octogonal, em condições de deformação plástica plana, que se encontra ilustrado na figura.



a) Determine o campo de tensões e proceda à sua representação no plano de Möhr.

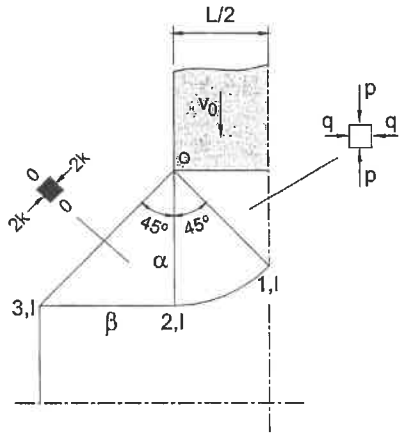
b) Calcule o valor da pressão de compressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material $p/2k$ que é aplicada pelo cunho.

c) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

d) Proceda à representação das linhas de fluxo.

Resolução

a) Devido à simetria do problema apenas um quarto da geometria irá ser considerado na resolução do mesmo. Considerando o plano físico que está ilustrado na figura seguinte, e que corresponde ao segundo quadrante da geometria total, o campo de linhas de escorregamento proposto é constituído por dois campos uniformes de geometria triangular e por um leque centrado no ponto singular O. Importa salientar que as condições de fronteira relativas ao campo de tensões se encontram asseguradas por este campo de linhas de escorregamento na superfície da ferramenta (sem atrito), na superfície livre da barra e junto à linha de simetria vertical da operação.



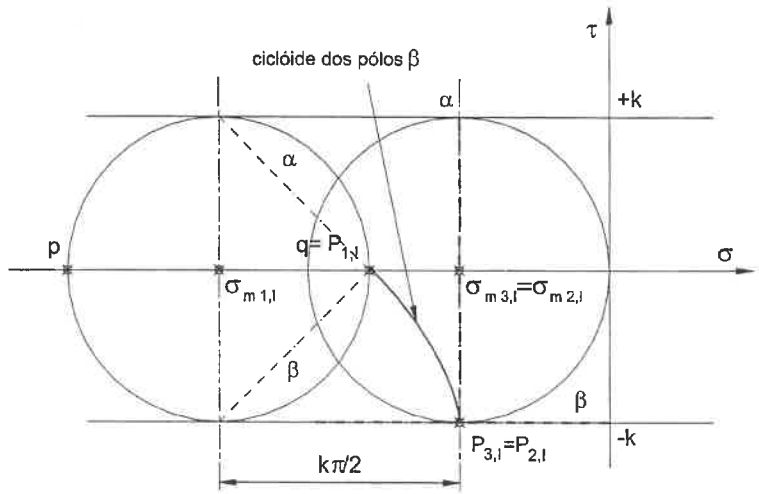
A representação do campo de tensões no plano de Möhr inicia-se através da marcação do círculo de Möhr, representando o estado de tensão da zona triangular rígida que contém a superfície livre da peça. A condição fronteira deste campo triangular associada ao facto deste campo ser uniforme determina que o estado de tensão desta região seja um único círculo, cuja tensão média é $\sigma_m = -k$, tangente ao eixo das tensões corte do lado das compressões, conforme ilustra a figura seguinte. A posição do pólo no círculo de Möhr desta zona, associado à convenção que define o sentido da distorção das linhas α e β determina que, no interior deste campo, as linhas de escorregamento horizontais sejam do tipo β e as linhas de escorregamento horizontais sejam do tipo α. A tensão média campo triangular referido e por isso nos pontos (3,I) e (2,I) vale,

$$\sigma_{m_{3,I}} = \sigma_{m_{2,I}} = -k \qquad (5.3.1)$$

A determinação do estado de tensão do ponto (1,I), situado na intercepção da linha de escorregamento β com o eixo de simetria vertical da operação, efectua-se aplicando as equações de Hencky. Conhecendo-se a tensão média do ponto (2,I) e uma vez as tangentes à linha de escorregamento β nestes pontos diferem de um ângulo $d\phi = \pi/4$, a equação de Hencky para uma linha β permite determinar a tensão média no ponto (1,I) do seguinte modo,

$$\begin{aligned} &\Delta\sigma_{m_{1,I-2,I}} = \sigma_{m_{1,I}} - \sigma_{m_{2,I}} = -2k\left(\frac{\pi}{4}\right) = -k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma_{m_{1,I}} = \sigma_{m_{2,I}} - k\frac{\pi}{2} = -k - k\frac{\pi}{2} = -k\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \qquad (5.3.2)$$

O conhecimento das tensões médias nos pontos (1,I), (2,I) e (3,I) permite representar o campo de tensões no plano de Möhr (ver figura seguinte). Encontra-se igualmente representada a respectiva ciclóide dos pólos representativa dos diferentes estados de tensão situados entre (2,I) e (1,I) sobre a linha β.



b) A pressão de compressão a aplicar pela ferramenta (cunho), determina-se a partir do círculo de Möhr do ponto (1,I), uma vez que o estado de tensão calculado para o ponto (1,I) é igual ao estado de tensão no interior do campo uniforme situado debaixo do cunho.

Tendo sido determinada a localização do pólo associado a este estado de tensão e tendo em consideração que a direcção da base do cunho é horizontal, é possível determinar a pressão de compressão. A metodologia consiste em determinar o valor da tensão principal, do correspondente círculo de Möhr, onde intersecta a recta paralela à direcção da base do cunho (horizontal) traçada a partir do pólo ($P_{1,I}$). Em face do exposto conclui-se que a pressão de compressão necessária para realizar a operação é,

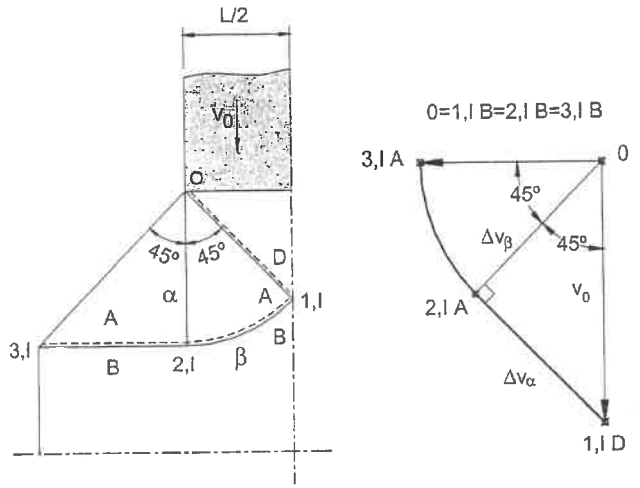
$$p = \sigma_y = \sigma_{3_{1,I}} = \sigma_{m_{1,I}} - k = -k\left(1+\frac{\pi}{2}\right) - k = -2k\left(1+\frac{\pi}{4}\right) \qquad (5.3.3)$$

O resultado obtido permite obter a pressão de compressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade,

$$\frac{p}{2k} = 1+\frac{\pi}{4} \qquad (5.3.4)$$

c) Para determinar o campo de velocidades e traçar o hodógrafo é necessário tornar a solução de linhas de escorregamento num campo de velocidades cinematicamente admissível. A análise cinemática do problema permite concluir que a região rígida adjacente ao cunho se desloca com uma velocidade igual à velocidade do cunho, v_0, sem qualquer componente de velocidade horizontal, uma vez que esta zona é atravessada por uma linha de simetria vertical. Adicionalmente sabe-se que o material localizado abaixo da linha de escorregamento β encontra-se sem movimento porque se trata de uma zona rígida onde não se alcança deformação plástica. Pode-se então concluir que o ponto (1,I) apresenta velocidades diferentes acima da linha de escorregamento α e abaixo da linha de escorregamento β, pelo que para assegurar a compatibilidade cinemática do campo de velocidades e a satisfação integral das condições de fronteira torna-se necessário introduzir as linhas de descontinuidade de velocidade (LDV) assinaladas a tracejado no plano físico representado na figura seguinte. Deste modo o ponto 1,I, localizado na intersecção das duas linhas de descontinuidade de velocidade, irá ter três representações distintas no hodógrafo, consoante o quadrante em que é considerado, sendo por isso, a sua designação acrescida das letras A, B, e D para identificar o quadrante em que este se situa.

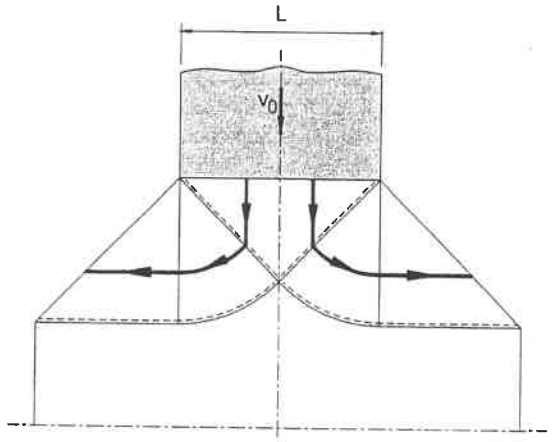
Em face do exposto e atendendo a que a componente normal da velocidade é igual de ambos os lados de uma linha de descontinuidade de velocidade e ainda que o valor da intensidade da descontinuidade de velocidade é constante ao longo de cada linha de descontinuidade de velocidade, obtém-se o hodógrafo que se encontra representado na figura seguinte.



Importa ainda salientar que o campo de velocidades respeita a condição de incompressibilidade do material, uma vez que em condições de deformação plástica plana,

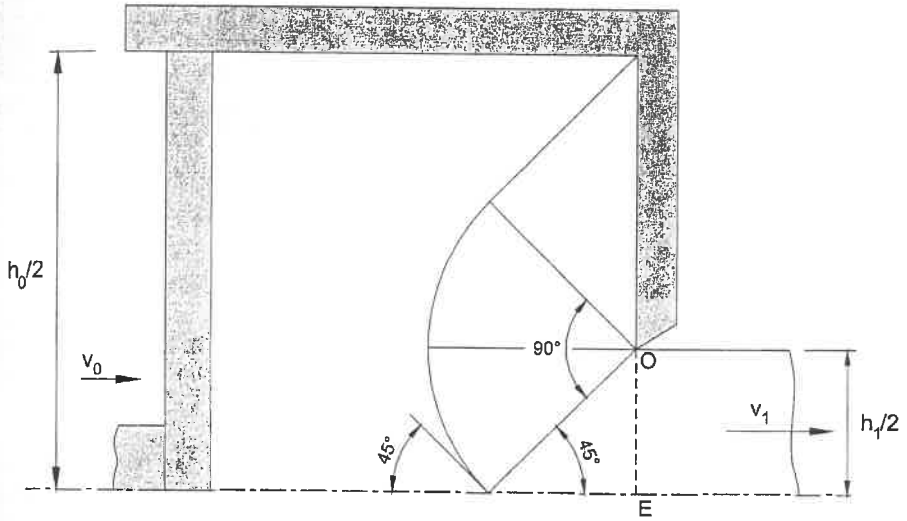
$$v_0 \frac{L}{2} = v_s \cos 45 \frac{h_1}{2} \overline{OS} \qquad (5.3.5)$$

d) A figura seguinte ilustra duas linhas de fluxo características do escoamento do material durante a operação de compressão da barra. Estas linhas foram obtidas a partir do campo de velocidades, acima determinado, e são tangentes ao vector velocidade em cada ponto. Importa mencionar que estas linhas não devem ser confundidas com as linhas de escorregamento, já que estas últimas são linhas de tensão de corte máxima que caracterizam o problema estaticamente, mas não fornecem qualquer tipo de informação relativa ao movimento do material.



Problema 5.4

Considere a solução de linhas de escorregamento incompleta para a extrusão directa sem atrito, em condições de deformação plástica plana, com uma relação de extrusão $R = 3$, que se encontra representada na figura.



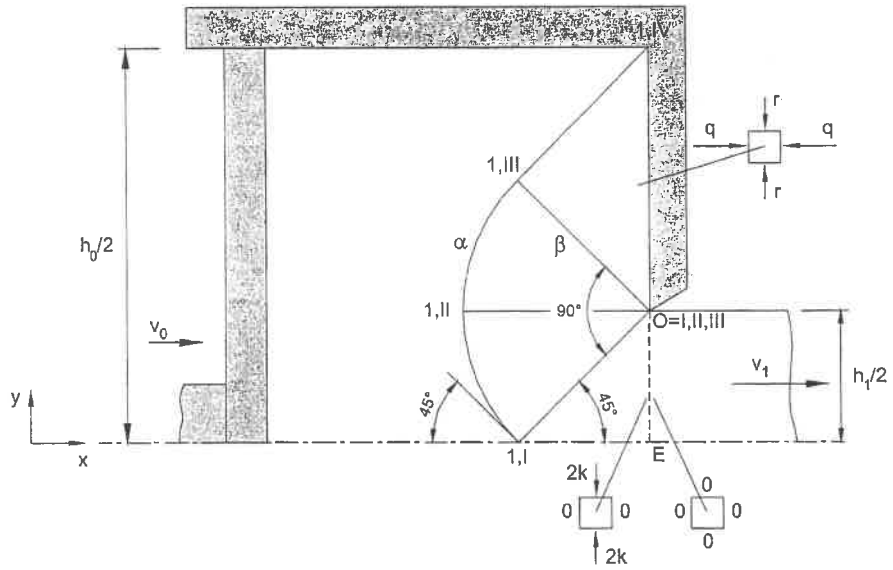
a) Determine o campo de tensões e proceda à sua representação no plano de Möhr.

b) Calcule o valor da pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $p_e/2k$.

c) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

Resolução

a) O campo de linhas de escorregamento proposto é constituído por dois campos uniformes de geometria triangular e por um leque centrado no ponto singular O, respeitando as condições de fronteira relativas ao campo de tensões na superfície da ferramenta (sem atrito) e junto à linha de simetria da operação. A linha a tracejado ($\overline{OE}$) representa uma descontinuidade de tensão (LDT) que foi necessário introduzir, para separar a zona em deformação plástica da zona rígida localizada à saída do contentor de extrusão, por forma a tornar o campo estaticamente admissível já que as restantes condições de fronteira relativas ao campo de tensões se encontravam asseguradas.



A construção do campo de tensões no plano de Möhr inicia-se com a marcação do círculo de Möhr tangente à origem, representativo do estado de tensão da zona triangular que faz fronteira com a LDT já que a presença da LDT determina que o estado de tensão em qualquer ponto pertencente ao campo triangular uniforme, seja um estado de compressão simples, cuja tensão média é $\sigma_m = -k$. Para facilitar a exposição, representaram-se na figura anterior estados de tensão que actuam em ambos os lados da LDT. A posição do pólo no círculo de Möhr característico desta zona que está representado na figura seguinte, associado à convenção que define o sentido da distorção das linhas α e β, determina que o arco de círculo do leque seja uma linha de escorregamento do tipo α, enquanto que as linhas radiais, com origem no ponto singular, O, sejam linhas de escorregamento do tipo β. Seguindo a metodologia de identificação das linhas de escorregamento α e β através da numeração árabe e romana, respectivamente, a tensão média no triângulo rígido referido e por isso no ponto (1,I) vale,

$$\sigma_{m_{1,I}} = -k \tag{5.4.1}$$

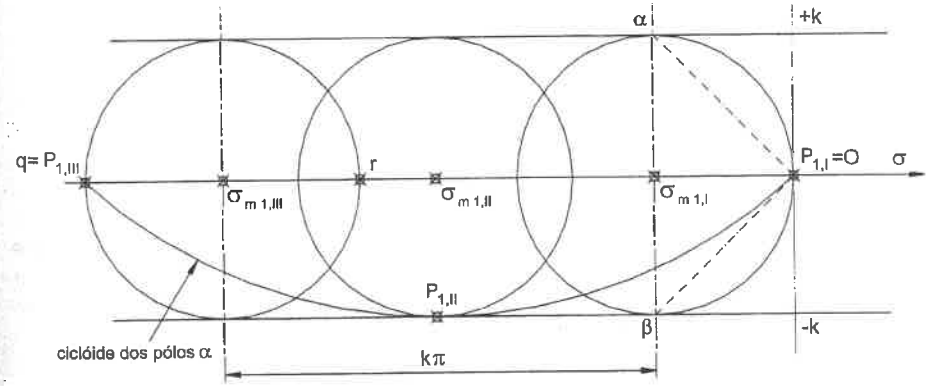
A determinação do estado de tensão dos pontos (1,II) e (1,III) situados sobre a linha de escorregamento α efectua-se aplicando as equações de Hencky. Conhecendo-se a tensão média do ponto (1,I) e uma vez que as tangentes à linha de escorregamento α

nestes pontos diferem de um ângulo $d\phi = -\pi/4$ e $d\phi = -\pi/2$, respectivamente, relativamente à tangente no ponto (1,I), a equação de Hencky para uma linha α permite determinar as tensões médias nos pontos (1,II) e (1,III) do seguinte modo,

$$\Delta\sigma_{m_{1,II-1,I}} = \sigma_{m_{1,II}} - \sigma_{m_{1,I}} = 2k\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_{m_{1,II}} = \sigma_{m_{1,I}} - k\frac{\pi}{2} = -k - k\frac{\pi}{2} = -k\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.4.2}$$

$$\Delta\sigma_{m_{1,III-1,I}} = \sigma_{m_{1,III}} - \sigma_{m_{1,I}} = 2k\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_{m_{1,III}} = \sigma_{m_{1,I}} - k\pi = -k - k\pi = -k\left(1+\pi\right) \tag{5.4.3}$$

O conhecimento das tensões médias ao longo da linha α permite representar o campo de tensões no plano de Möhr e a respectiva ciclóide dos pólos para esta operação de extrusão em condições de deformação plástica plana, com $R = 3$, conforme se encontra representado na figura seguinte.



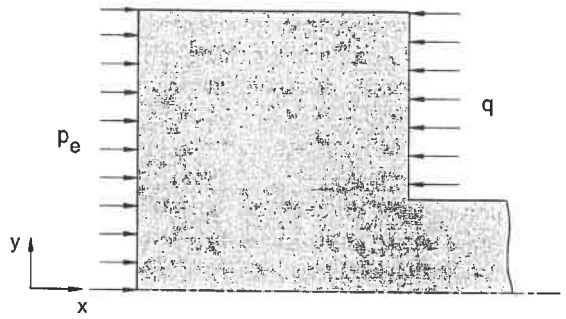
b) Para determinar a pressão de extrusão, p_e, é necessário determinar o valor da pressão, q, que o material exerce sobre a parede vertical do contentor de extrusão. O valor desta pressão calcula-se tendo em consideração que o estado de tensão no campo triangular uniforme (rígido) adjacente ao contentor é o mesmo do ponto (1,III), cujas tensões principais nas direcções horizontal (x) e vertical (y) são,

$$\sigma_x = q = \sigma_{3_{I,III}} = \sigma_{m_{I,III}} - k = -k(1+\pi) - k = -2k\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.4.4}$$

$$\sigma_y = r = \sigma_{1_{I,III}} = \sigma_{m_{I,III}} + k = -k(1+\pi) + k = -k\pi \tag{5.4.5}$$

Determinado o valor da pressão, q, a pressão de extrusão aplicada pelo êmbolo, p_e, determina-se através do equilíbrio de forças que actuam no material na direcção horizontal (ver figura seguinte),

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow p_e \frac{h_0}{2} w_0 = q\left(\frac{h_0}{2} - \frac{h_1}{2}\right) w \tag{5.4.6}$$



Como a deformação plástica ocorre em condições de deformação plástica plana a largura do componente, na direcção perpendicular ao plano xy, mantém-se constante durante a operação, $w = w_0 = w_1$. Nestas condições, a equação anterior determina que o valor da pressão de extrusão se relaciona com a pressão aplicada na parede do contentor do seguinte modo,

$$p_e = q\frac{(h_0 - h_1)}{h_0} \tag{5.4.7}$$

Adicionalmente, conhecendo a relação de extrusão, R, é possível estabelecer a seguinte relação entre a altura inicial, h_0, e final, h_1, do componente,

$$R = \frac{h_o w_o}{h_1 w_1} = \frac{h_o w}{h_1 w} = \frac{h_o}{h_1} = 3 \Rightarrow h_o = 3h_1 \tag{5.4.8}$$

Nestas condições, de acordo com (5.4.7), o valor da pressão de extrusão é,

$$p_e = q\frac{(h_0 - h_1)}{h_0} = \frac{2}{3}q \tag{5.4.9}$$

Substituindo o valor da pressão sobre a parede vertical do contentor de extrusão, q, obtido em (5.4.4), na equação anterior, obtém-se o seguinte valor para a pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material,

$$\frac{p_e}{2k} = -\frac{2}{3}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.4.10}$$

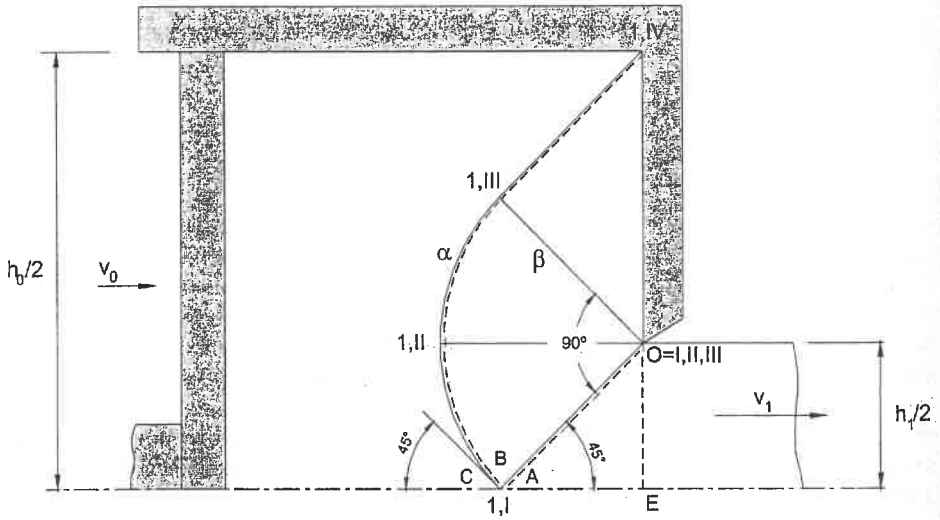
c) Antes de determinar o campo de velocidades e traçar o hodógrafo torna-se necessário tornar a solução de linhas de escorregamento num campo de velocidades cinematicamente admissível. Para tal começamos por analisar a cinemática do problema. O material adjacente ao êmbolo move-se com uma velocidade igual à velocidade do êmbolo, v_0, sem qualquer componente de velocidade vertical, uma vez que esta zona é atravessada por uma linha de simetria horizontal. Por outro lado, o material situado no interior do campo uniforme que se encontra delimitado pela linha de descontinuidade de tensão $\overline{OE}$ e pela linha de escorregamento β_I, tem que se deslocar com uma velocidade horizontal, v_1, respeitando simultaneamente a existência da linha de simetria horizontal e assegurando a condição de incompressibilidade do material, ou seja,

$$v_0 \frac{h_0}{2} w_1 = v_1 \frac{h_1}{2} w_1 \tag{5.4.11}$$

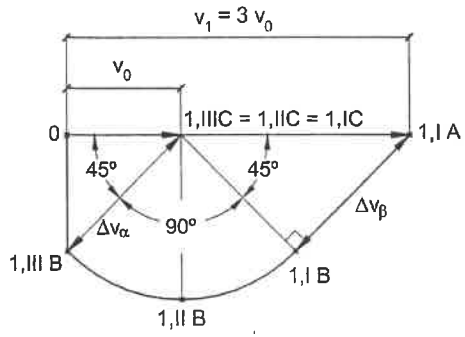
Considerando que a deformação ocorre em condições de deformação plástica plana e tendo em consideração o valor da relação de extrusão, R, que foi obtido na alínea anterior, a velocidade do material à saída do contentor de extrusão vale,

$$v_1 = v_0 \frac{h_0}{h_1} = 3\,v_0 \tag{5.4.12}$$

Pode-se então concluir que o ponto (1,I) apresenta velocidades diferentes infinitamente antes da linha de escorregamento α e infinitamente depois da linha de escorregamento β_I, pelo que para assegurar a compatibilidade cinemática do campo de velocidades e a satisfação integral das condições de fronteira torna-se necessário introduzir as linhas de descontinuidade de velocidade (LDV) assinaladas a tracejado no plano físico da figura seguinte. Deste modo o ponto (1,I), localizado na intersecção das duas linhas de descontinuidade de velocidade, irá ter três representações distintas no hodógrafo, consoante o quadrante em que é considerado (as letras A, B e C identificam o quadrante em que este se situa).



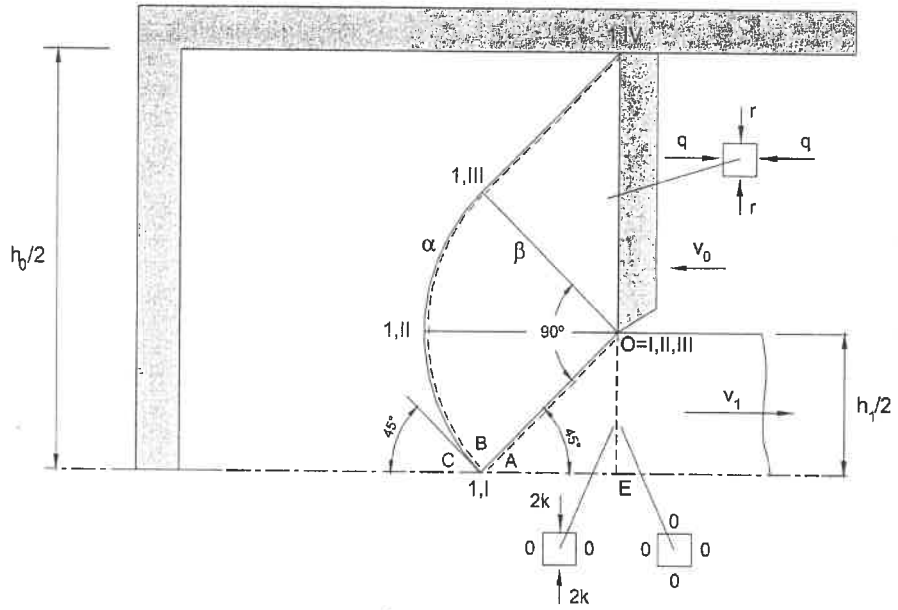
Conhecidas as velocidades do material à entrada e saída do contentor de extrusão e atendendo a que a componente normal da velocidade é igual de ambos os lados de uma linha de descontinuidade de velocidade e ainda que o valor da intensidade da descontinuidade de velocidade é constante ao longo de cada linha de descontinuidade de velocidade, obtém-se o hodógrafo que está representado na figura seguinte.



Para finalizar, importa salientar que o campo de velocidades respeita a condição fronteira, não referida anteriormente, que é imposta pela parede vertical do contentor, na medida em que o interior do campo uniforme delimitado pela linha de escorregamento α, pela linha de escorregamento β_{III} e pela parede do contentor se desloca somente com velocidade vertical, ou seja, alinhado com a parede.

Problema 5.5

Considere a solução de linhas de escorregamento para a extrusão inversa sem atrito, em condições de deformação plástica plana, com uma relação de extrusão $R = 3$, que se encontra representada na figura.



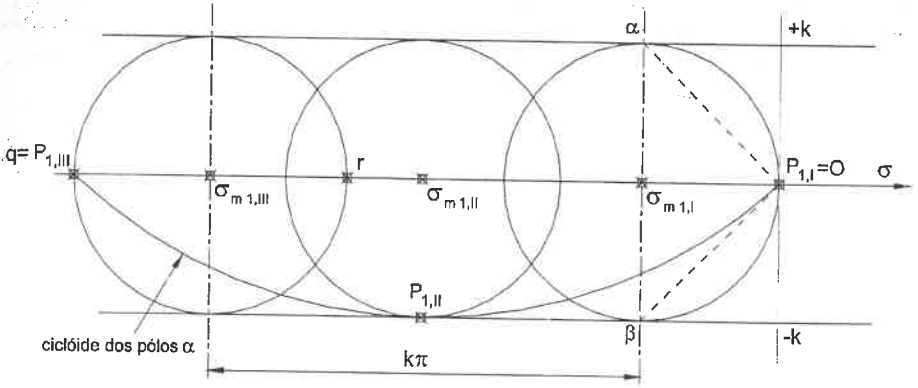
a) Determine o campo de tensões e proceda à sua representação no plano de Möhr.

b) Calcule o valor da pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $p_e/2k$.

c) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

Resolução

a) A determinação do campo de tensões para esta operação efectua-se de um modo análogo à do problema 5.4. Neste sentido a representação do campo de tensões no plano de Möhr e a respectiva ciclóide dos pólos para esta operação é a que se encontra representada na figura seguinte.



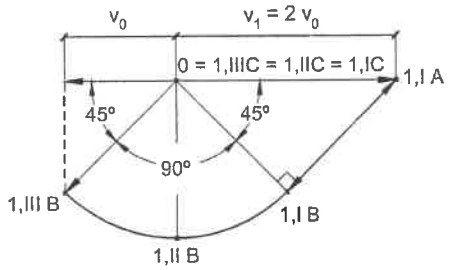
b) Neste caso a pressão de extrusão aplicada pelo êmbolo, p_e, é a pressão q que actua na parede vertical do êmbolo (ver figura do enunciado), cujo valor se obtém a partir do estado de tensão no campo triangular uniforme (rígido) adjacente ao êmbolo (ver plano de Möhr, na figura anterior), e que já tinha igualmente sido determinado no problema 5.4. Assim sendo, a intensidade da pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade vale,

$$\frac{q}{2k} = 1 + \frac{\pi}{2} \qquad (5.5.1)$$

Este resultado, quando comparado com o resultado obtido no problema anterior, permite concluir que, na ausência de atrito, a pressão que é necessário aplicar para realizar a operação de extrusão que conduz à mesma alteração de geometria no componente é idêntica independentemente do sentido de actuação do punção, i.e., por extrusão directa ou inversa.

c) As linhas de descontinuidade de velocidade (LDV) representadas a tracejado permitem assegurar que o campo de velocidades é cinematicamente admissível.

Sabe-se que para respeitar a condição de fronteira cinemática imposta pelo êmbolo, o material adjacente ao êmbolo, e no interior do campo triangular uniforme, dever-se-á mover com uma velocidade cuja componente normal à interface com o êmbolo é igual à velocidade do êmbolo, v_0. Respeitando as propriedades que caracterizam as LDV, ou seja, levando em consideração que a componente normal da velocidade é igual de ambos os lados de uma linha de descontinuidade de velocidade e que o valor da intensidade da descontinuidade de velocidade, tangente à linha, é constante ao longo de cada linha de descontinuidade de velocidade, obtém-se o hodógrafo representado na figura seguinte, que descreve a cinemática da deformação desta operação de extrusão inversa.



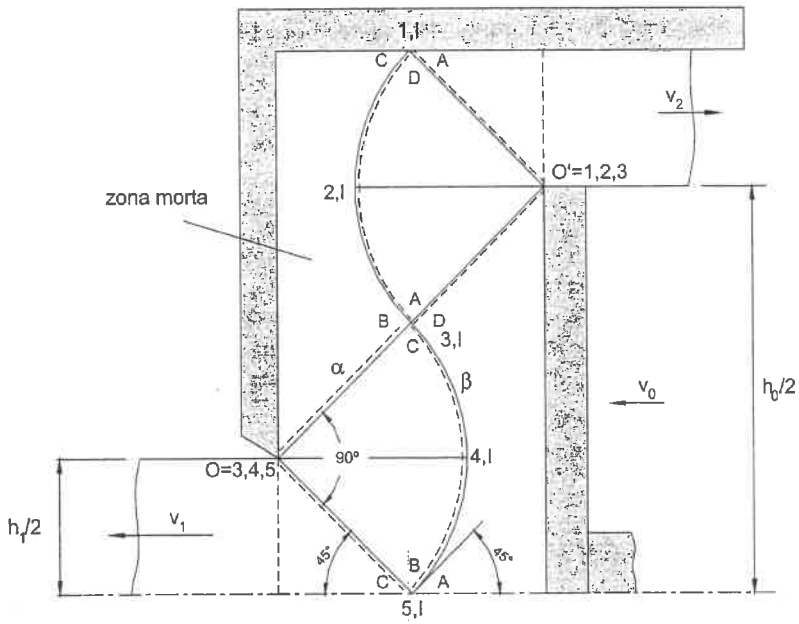
O campo de velocidades obtido respeita a condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos, uma vez que o volume de material por unidade de tempo à entrada da operação de extrusão é igual ao volume de material por unidade de tempo à saída do êmbolo,

$$v_0\left(\frac{h_0}{2}-\frac{h_1}{2}\right)w = v_1\frac{h_1}{2}w$$
$$v_0\left(3h_1-h_1\right) = v_1\,h_1 \qquad (5.5.2)$$
$$2v_0 = v_1$$

Este resultado está de acordo a velocidade de saída do material que foi obtida durante a construção do hodógrafo (ver figura anterior).

Problema 5.6

Considere a solução de linhas de escorregamento para a operação de deformação plástica sem atrito, em condições de deformação plástica plana, que se encontra representada na figura.



a) Determine o campo de tensões e proceda à sua representação no plano de Möhr.

b) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

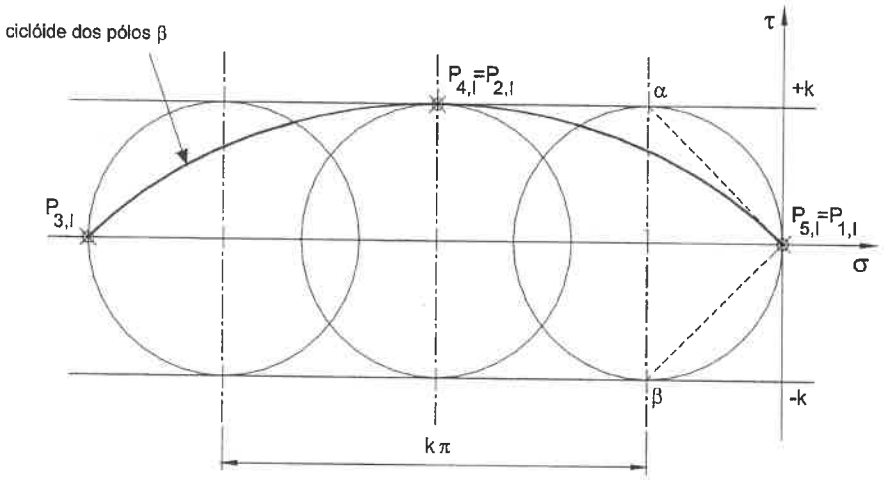
Resolução

a) O campo de linhas de escorregamento é constituído por dois campos uniformes de geometria triangular e por dois leques. As linhas a tracejado representam descontinuidades de tensão (LDT) que separaram a zona em deformação plástica das zonas rígidas de material à saída do contentor.

A representação do campo de tensões no plano de Möhr pode ser iniciada através da marcação do círculo de Möhr tangente à origem, que representa o estado de tensão da zona triangular que faz fronteira com a LDT na parte inferior da geometria, junto à linha de simetria, da qual faz parte o ponto singular O. A presença da LDT separara a zona em

deformação plástica da zona rígida de material à saída do contentor determina que o estado de tensão em qualquer ponto pertencente ao campo triangular uniforme, seja um estado de compressão simples, cuja tensão média é $\sigma_m = -k$. A posição do pólo no círculo de Möhr desta zona, associado à convenção que define o sentido da distorção das linhas α e β, determina que o arco de círculo que constituiu o leque inferior seja uma linha de escorregamento do tipo β, enquanto que as linhas rectas, com origem no ponto singular, O, são linhas de escorregamento do tipo α. Seguindo a metodologia de identificação das linhas de escorregamento α e β através da numeração árabe e romana, respectivamente, a tensão média no referido campo triangular uniforme, e consequentemente no ponto (5,I) é,

$$\sigma_{m_{5,I}} = -k \tag{5.6.1}$$



A determinação do estado de tensão do ponto (3,I) efectua-se aplicando as equações de Hencky, conhecendo-se a tensão média do ponto (5,I). Se caminharmos ao longo da linha de escorregamento β_I do ponto (5,I) para o ponto (3,I) a variação angular das tangentes à linha é $d\phi = \pi/2$, pelo que, de acordo com a equação de Hencky para uma linha β, a tensão média no ponto (3,I) vale,

$$\sigma_{m_{3,I}} = -k - 2k\left(\frac{\pi}{2}\right) = -k(1+\pi) \tag{5.6.2}$$

Seguindo a mesma metodologia, conhecendo-se a tensão média do ponto (3,I) e uma vez as tangentes à linha de escorregamento β_I neste pontos diferem de um ângulo $d\phi = -\pi/2$, a equação de Hencky para uma linha β determina que a tensão média no ponto (1,I) seja,

$$\sigma_{m_{1,I}} = -k(1+\pi) - 2k\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -k \tag{5.6.3}$$

Este resultado poderia ser igualmente obtido se partíssemos do conhecimento do estado de tensão da zona triangular que faz fronteira com a LDT na parte superior da geometria, da qual faz parte o ponto singular O'.

O conhecimento das tensões médias ao longo da linha β_I permite representar o campo de tensões no plano de Möhr e a respectiva ciclóide dos pólos para esta operação de acordo com a figura anterior.

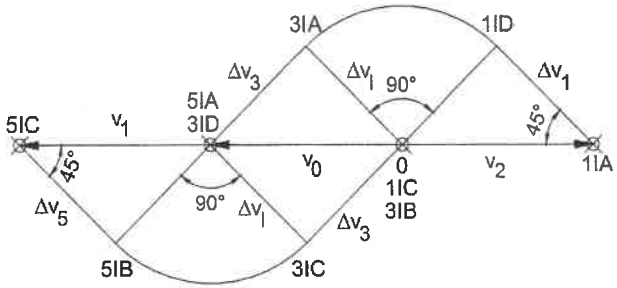
b) Analisando a cinemática da deformação, constata-se que o material adjacente ao cunho irá mover-se com a sua velocidade, v_0, pelo que qualquer ponto material situado no interior da zona delimitada à direita pelo cunho e à esquerda pela linha de escorregamento β_I terá obrigatoriamente uma velocidade igual a v_0. Por questões de compatibilidade cinemática, imposta pelas paredes do contentor, os pontos materiais situados no interior da zona delimitada pela linha de escorregamento β_I e pelas paredes do contentor possuem velocidade nula (zona morta).

Pontos materiais situados no interior dos dois campos uniformes devem possuir velocidades horizontais compatíveis com a conservação de volume. De modo a que, em condições de deformação plástica plana,

$$v_0 \frac{h_0}{2} = v_1 \frac{h_0}{6} + v_2 \frac{h_0}{6} \tag{5.6.4}$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades de saída do material.

Para traçar o hodógrafo torna-se necessário tornar a solução de linhas de escorregamento num campo de velocidades cinematicamente admissível, o que se consegue através da introdução das LDV assinaladas a tracejado no plano físico representado na figura do enunciado. Aplicando a metodologia descrita nos problemas anteriores para a representação vectorial do campo de velocidades, obtém-se o hodógrafo representado na figura seguinte.



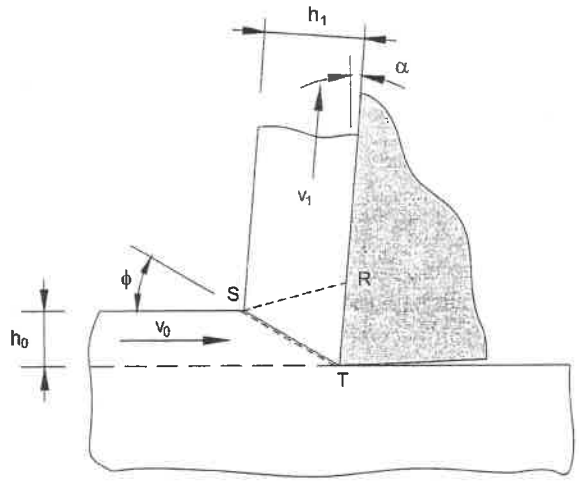
De acordo com o hodógrafo obtêm-se os seguintes valores para as velocidades de saída do material,

$$v_1 = 2v_0$$
$$v_2 = v_0 \qquad (5.6.5)$$

Importa salientar que estas velocidades de saída do material respeitam a condição de incompressibilidade expressa pela equação (5.6.4).

Problema 5.7

Considere a solução de linhas de escorregamento para a operação de corte por arranque de apara em condições de deformação plana (corte ortogonal) que se encontra representada na figura. Admita que existe atrito entre a apara e a face de ataque da ferramenta e que o coeficiente de atrito é igual a μ.



a) Determine o campo de tensões e proceda à sua representação no plano de Möhr.

b) Obtenha a relação matemática $\phi - \alpha + \theta = \pi/4$ correspondente ao modelo de corte ortogonal de Lee-Shaffer.

c) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

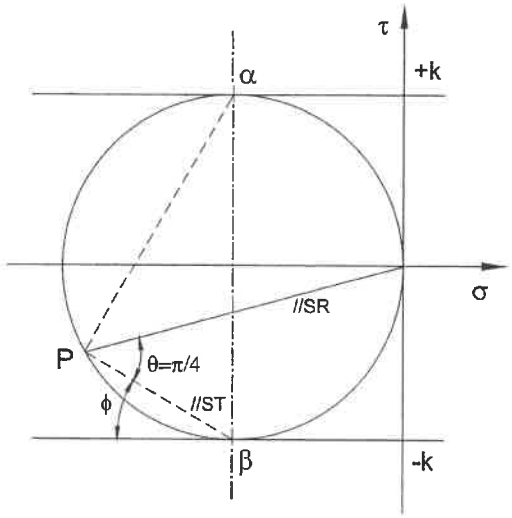
d) Obtenha uma expressão que permita calcular o valor do comprimento de contacto, $\overline{RT}$, da apara com a face de ataque da ferramenta.

Resolução

a) O campo de linhas de escorregamento é constituído um campo uniforme de geometria triangular em que a linha $\overline{SR}$ representa uma descontinuidade de tensão (LDT) que separa a zona em deformação plástica da zona rígida da apara.

A representação do campo de tensões no plano de Möhr efectua-se, de acordo com a figura seguinte, através da marcação do círculo de Möhr tangente à origem que representa o estado de tensão da zona triangular. A presença da LDT determina que o

estado de tensão em qualquer ponto pertencente ao campo triangular uniforme, seja um estado de compressão simples, cuja tensão média é $\sigma_m = -k$.



A posição do pólo e a convenção que estabelece que às linhas de escorregamento da família β estão associadas tensões de corte máximas que provocam distorções no sentido anti-horário, determina que linha $\overline{ST}$, que define o plano de corte, seja uma linha de escorregamento do tipo β.

b) Uma vez que o coeficiente de atrito μ na interface entre a apara e a ferramenta relaciona a força tangencial e a força normal, de acordo com a teoria de Amonton-Coulomb, da seguinte forma,

$$\mu = \frac{F_T}{F_N} \tag{5.7.1}$$

consequentemente, de acordo com a mesma teoria, é também possível relacioná-lo com a tensão de corte, τ_a, e a tensão normal, σ_a, que actuam ao longo de $\overline{RT}$ do seguinte modo,

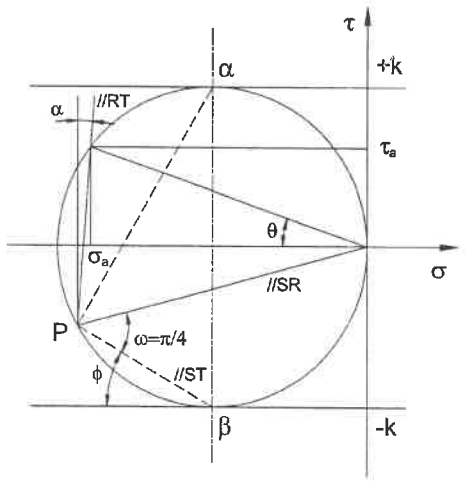
$$\mu = \operatorname{tg}\theta = \frac{\tau_a}{\sigma_a} \tag{5.7.2}$$

em que θ se designa por ângulo de atrito. Torna-se assim possível representar no plano de Möhr as tensões normal e de corte que actuam na interface apara/ferramenta, conforme indica a figura seguinte.

Considerando o 2º quadrante do círculo de Möhr, representado na figura seguinte, é possível estabelecer a seguinte relação angular,

$$2\phi - 2\alpha + 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \phi - \alpha + \theta = \frac{\pi}{4} \tag{5.7.3}$$

entre os ângulos do plano de corte ϕ, ângulo de ataque α e de atrito θ. Esta relação foi estabelecida em 1951 por Lee - Shaffer.



c) A conservação de volume, característica da deformação plástica dos materiais metálicos, determina que, em condições de deformação plástica plana, a velocidade de corte v_0 e a velocidade de saída da apara v_1 se relacionem da seguinte forma,

$$v_0 h_0 = v_1 h_1 \Leftrightarrow v_1 = v_0 \frac{h_0}{h_1} \tag{5.7.4}$$

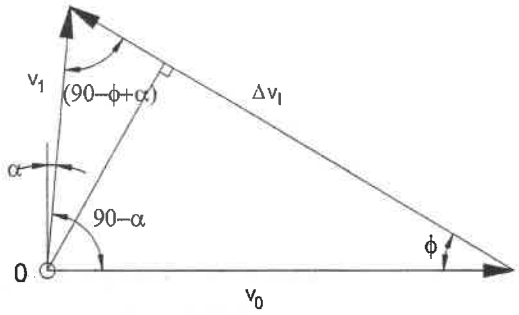
O quociente entre a espessura da apara h_1 e a espessura de corte h_0, é habitualmente designado por grau de encalque, R_c. Considerando a geometria de corte é possível obter a seguinte expressão que o relaciona com o ângulo do plano de corte ϕ e com o ângulo de ataque α,

$$R_c = \frac{h_1}{h_0} = \frac{\overline{ST}\cos(\phi-\alpha)}{\overline{ST}\,\mathrm{sen}\,\phi} = \frac{\cos(\phi-\alpha)}{\mathrm{sen}\,\phi} \tag{5.7.5}$$

Substituindo a expressão anterior na equação (5.7.4) obtêm-se a seguinte expressão que permite relacionar a velocidade de saída da apara v_1 com a velocidade de corte v_0,

$$v_1 = \frac{\mathrm{sen}\,\phi}{\cos(\phi-\alpha)} v_0 \tag{5.7.6}$$

Para traçar o hodógrafo torna-se necessário tornar a solução de linhas de escorregamento num campo de velocidades cinematicamente admissível, o que se consegue através da introdução de uma linha de descontinuidade de velocidade segundo a direcção do plano de corte, $\overline{ST}$, assinalada no plano físico. Desta forma o campo de velocidades do corte ortogonal fica determinado tornando-se possível proceder à respectiva representação vectorial da figura seguinte.



Para determinar a descontinuidade de velocidade, Δv_l, segundo o plano de corte, $\overline{ST}$, sabe-se a partir do hodógrafo que,

$$\frac{v_0}{\mathrm{sen}(90-\phi+\alpha)} = \frac{\Delta v_l}{\mathrm{sen}(90-\alpha)} = \frac{v_1}{\mathrm{sen}\,\phi} \tag{5.7.7}$$

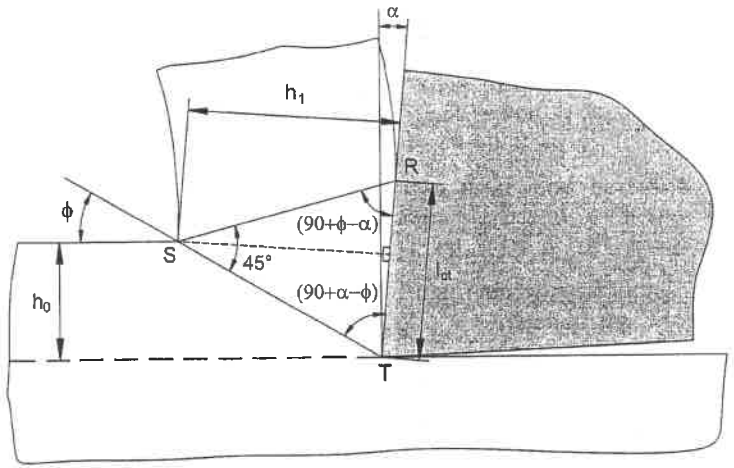
ou,

$$\frac{v_0}{\cos(\phi-\alpha)} = \frac{\Delta v_l}{\cos\alpha} = \frac{v_1}{\mathrm{sen}\,\phi} \tag{5.7.8}$$

Obtendo-se, finalmente, para a descontinuidade de velocidade, Δv_l, segundo o plano de corte,

$$\Delta v_l = v_0 \frac{\cos\alpha}{\cos(\phi-\alpha)} \tag{5.7.9}$$

d) A linha de descontinuidade de tensão, $\overline{SR}$, que separa a zona em deformação plástica da zona rígida, surge devido ao facto de deixar de existir contacto entre a apara e a face de ataque da ferramenta. Para determinar o comprimento de contacto da apara sobre a face, l_{ct}, considere-se a figura seguinte onde se encontra representado o plano físico da operação de corte por arranque de apara.

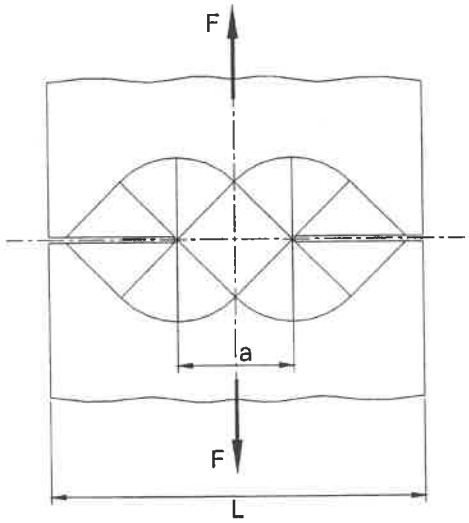


A análise da geometria operação permite determinar os ângulos que definem a geometria do campo triangular que se encontram identificados na figura, de onde é possível concluir que,

$$\begin{aligned} l_{ct} &= AB\cos(90-\phi+\alpha)+AC\cos(45+\phi-\alpha) \\ &= h_0\frac{\operatorname{sen}(\phi-\alpha)}{\operatorname{sen}\phi}+h_1\frac{1}{\operatorname{tg}(45+\phi-\alpha)} \\ &= h_0\left(\frac{\operatorname{sen}(\phi-\alpha)}{\operatorname{sen}\phi}+\frac{\cos(\phi-\alpha)}{\operatorname{tg}(45+\phi-\alpha)\operatorname{sen}\phi}\right) \end{aligned} \qquad (5.7.10)$$

Problema 5.8

Considere a figura, na qual se apresenta um ensaio de tracção uniaxial do provete entalhado de um material metálico com um comportamento rígido-perfeitamente plástico, com uma tensão limite de elasticidade igual a σ_e.



Admitindo que as dimensões do provete permitem considerar que o ensaio se processa em condições de deformação plana e que $L >> a$ propõe-se para resolução do problema o campo de linhas de escorregamento que se apresenta na figura anterior.

Nestas condições, para o instante considerado:

a) Caracterize o estado de tensão que se desenvolve na secção resistente do provete, ou seja, na zona que separa as fendas. Determine o valor da força necessária à deformação.

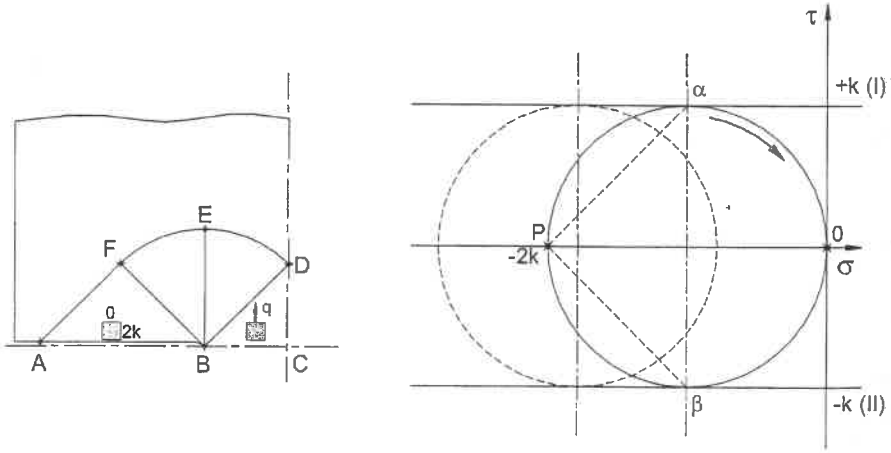
b) Discuta os limites geométricos que determinam a validade da solução proposta considerando para o efeito a relação L/a. Proponha um campo de linhas de escorregamento que permita resolver casos com relações geométricas inferiores à do limite mínimo encontrado anteriormente.

c) Construa o hodógrafo, admitindo que as duas amarras se deslocam em sentidos opostos com velocidade v_0. Esboce as linhas de fluxo.

Resolução

a) Para caracterizar o estado de tensão que se desenvolve na zona resistente do provete torna-se necessário construir o plano das tensões. Uma vez que o problema apresenta simetria segundo os dois eixos (vertical e horizontal), apenas se irá considerar um quarto do provete para análise.

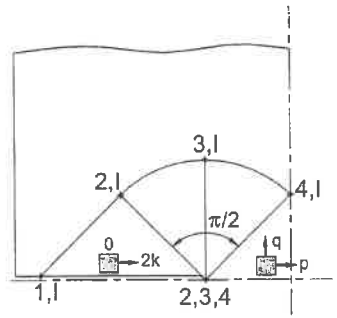
Para se definir completamente o campo de linhas de escorregamento proposto, tem que se identificar as linhas α e β. Para tal, sabe-se que a condição de fronteira na superfície livre $\overline{AB}$ determina que apenas pode haver tensão aplicada em superfícies perpendiculares a $\overline{AB}$ e que na zona triangular ΔBCD a tensão q que actua na direcção da força terá que ser de tracção (ver figura seguinte do lado esquerdo, onde se identificam no plano físico as solicitações conhecidas).

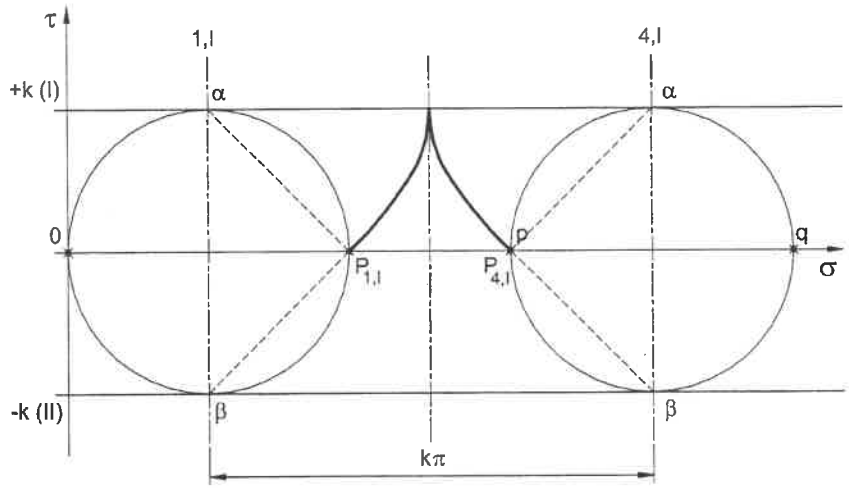


Supondo que no ΔABF a tensão na superfície vertical é de compressão (-2k), então a linha $\overline{AF}$ seria uma linha α (conforme se pode observar no plano de Möhr da figura anterior) e o estado de tensão do ΔBCD resultaria compressivo. Este facto, contraria a natureza da tensão q que actua no ΔBCD, pelo que a linha $\overline{AF}$ terá que ser uma linha β e a tensão que actua em superfícies perpendiculares à superfície livre $\overline{AB}$ deverá ser de tracção.

Determinada a natureza das linhas de escorregamento apresenta-se na figura seguinte a respectiva identificação através da sua numeração no plano físico seguida do plano das tensões associado a este plano físico. A determinação do estado de tensão do ponto (4,I), ou melhor, da zona triangular de deformação homogénea definida pelo ponto (4,I), ponto singular e intersecção dos dois eixos de simetria, faz-se aplicando as equações de

Hencky, uma vez que do ponto 2I para o ponto (4,I), caminha-se ao longo de uma linha α, com uma variação angular de $d\phi = \pi/2$.





Deste modo, na zona resistente do provete (entre fendas) desenvolve-se um estado de tensão triaxial caracterizado por,

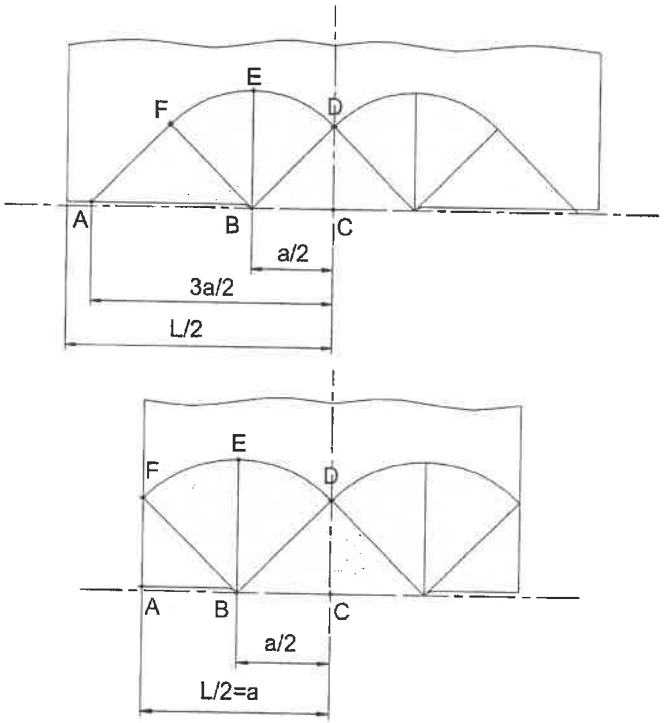
$$\sigma_1 = q = 2k\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sigma_3 = p = k\pi \qquad (5.8.1)$$
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} = k(1+\pi)$$

Então, a força necessária a este instante do ensaio será dada por,

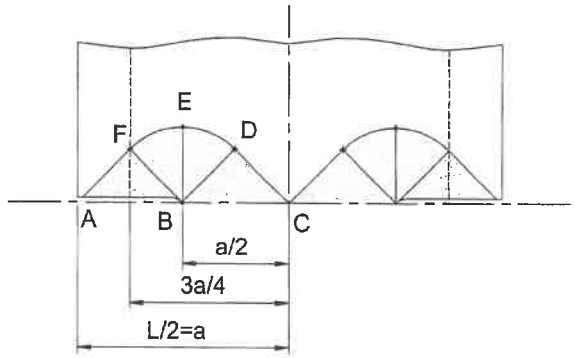
$$F = q\,a\,b = 2k\left(1+\frac{\pi}{2}\right)a\,b \qquad (5.8.2)$$

em que b representa o comprimento do provete.

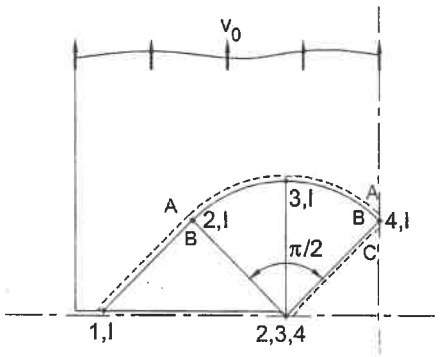
b) Analisando o campo de linhas de escorregamento verifica-se que não existe limite superior para a relação L/a que condicione a aplicação desta solução, uma vez que esta se torna independente de L a partir de $L/a = 3$, conforme se constata na figura seguinte em cima.



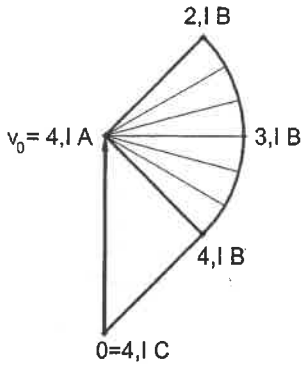
Por outro lado, a relação geométrica mínima que permite aplicar a solução proposta sem contrariar as condições de fronteira do problema corresponde a uma relação de $L/a = 2$, conforme se ilustra na figura anterior em baixo. Para relações $L/a < 2$ este campo de linhas de escorregamento deixa de se poder aplicar, surgindo então o campo que se mostra na figura seguinte como uma solução que permite resolver problemas até uma relação limite inferior de $L/a < 3/2$.

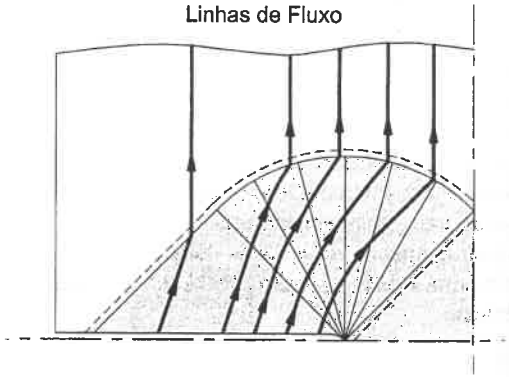


c) Antes de se passar à construção do hodógrafo tem que se tornar o problema cinematicamente admissível analisando as condições de fronteira características da deformação. Para tal, considere-se o plano físico representado na figura seguinte. Tomando o ponto (4,I) situado sobre a linha de simetria vertical, verifica-se que se o mesmo for considerado infinitamente acima (4,I A), ou seja, pertencente à região rígida do provete (zona sombreada na figura) a sua velocidade deverá ser v_0, enquanto que se for considerado infinitamente abaixo (4,I C), no interior do triângulo delimitado pela linha de escorregamento α_4 e pelas duas linhas de simetria, a sua velocidade deverá ser nula, por forma a assegurar em simultâneo as restrições de velocidade impostas pelas linhas de simetria.



Então, para compatibilizar estas condições em torno do ponto (4,I) a linha de escorregamento α_4 tem que ser também uma linha de descontinuidade de velocidade (LDV). Por outro lado, a condição de fronteira das velocidades no ponto 4I determina que esta LDV tenha que reflectir numa LDV da outra família, ou seja, a linha β_I é também ela uma LDV. Uma vez compatibilizado o plano físico em termos de velocidades, o hodógrafo pode ser construído a partir das condições do ponto (4,I), conforme se ilustra na figura seguinte do lado esquerdo.





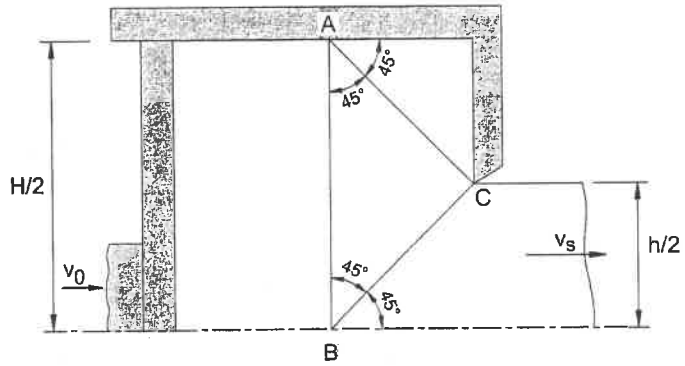
Resta apenas traçar as linhas de fluxo instantâneas que, como se sabe, são linhas que permitem visualizar o modo como se processa a deformação no instante considerado e que se obtêm através da tangencia ao vector velocidade total em cada ponto (ver figura anterior do lado esquerdo). Ainda a este propósito deve assinalar-se que as descontinuidades que surgem nas linhas de fluxo devem-se ao facto de nesse ponto existir uma LDV.

6. MÉTODO DO LIMITE SUPERIOR

Este capítulo apresenta problemas de aplicação do método do limite superior a processos tecnológicos de deformação plástica. São apenas considerados problemas bidimensionais e soluções de blocos rígidos.

Problema 6.1

Considere a operação de extrusão com matrizes direitas, em condições de deformação plana, com uma relação de extrusão $R = 2$ ($R = H/h$) representada na figura seguinte.



Para a solução limite superior proposta determine:

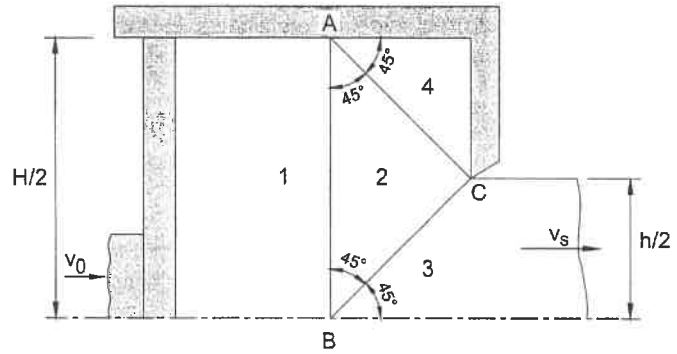
a) O campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

b) O valor da pressão, adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade $2k$, necessário para realizar a operação de extrusão, admitindo que não existe atrito entre o material e as paredes do contentor.

c) Repita a alínea anterior admitindo que existe atrito máximo entre o material e as paredes do contentor. Considere que a tensão de corte devida ao atrito pode ser expressa através do modelo de atrito de Prandtl, $\tau_a = mk$.

Resolução

a) A solução limite superior que é proposta para a resolução do problema baseia-se na utilização de blocos rígidos com velocidade constante. Os blocos são delimitados por superfícies de descontinuidade de velocidade e numerados de acordo com a figura seguinte. A solução limite superior apresentada considera que a região em deformação plástica (zona 2) é definida por um triângulo delimitado pela zona de entrada (zona 1), pela zona de saída (zona 3) e pela zona no canto do contentor (zona 4).



A cinemática do problema determina que o material adjacente ao êmbolo de extrusão (zona 1) se mova com a velocidade v_0 do êmbolo e que o material localizado na saída (zona 3) tenha a velocidade que resulta da condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos,

$$v_0 H/2b = v_s h/2b \Leftrightarrow v_0 R = v_s \Leftrightarrow v_s = 2v_0 \qquad (6.1.1)$$

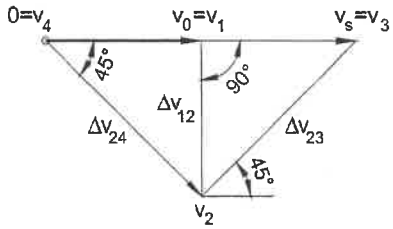
em que b é a largura do componente na direcção perpendicular ao plano da figura anterior.

O material situado na zona 4 possui velocidade nula por questões de compatibilidade cinemática impostas pelas paredes vertical e horizontal do contentor de extrusão. Esta ausência de movimento justifica a denominação que lhe é habitualmente atribuída, zona morta.

Conhecidas as velocidades dos blocos rígidos,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \\ v_3 &= v_s = 2v_0 \\ v_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (6.1.2)$$

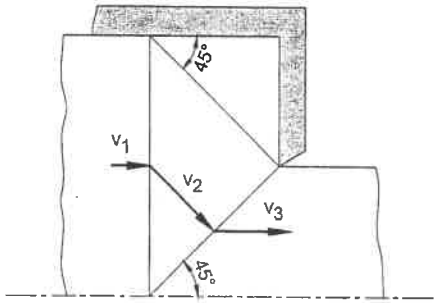
torna-se possível proceder à representação vectorial do campo de velocidades através do hodógrafo que se encontra ilustrado na figura seguinte. O hodógrafo foi obtido tendo presente as propriedades que caracterizam as linhas de descontinuidade de velocidade que delimitam os blocos rígidos, ou seja, levando em consideração que a componente normal da velocidade é igual de ambos os lados de uma linha de descontinuidade de velocidade e que o valor da intensidade da descontinuidade de velocidade, tangente à linha, é constante ao longo da mesma.



A intensidade das descontinuidades de velocidade, Δv_i, que representa a diferença entre os módulos das velocidades de dois blocos contíguos ao longo da superfície que os separa, pode ser determinada a partir do hodógrafo, obtendo-se,

$$\begin{aligned} \Delta v_{24}\cos 45^\circ &= v_0 \Leftrightarrow \Delta v_{24} = \sqrt{2}v_0 \\ \Delta v_{24}\,\text{sen}\,45^\circ &= \Delta v_{12} \Leftrightarrow \Delta v_{12} = v_0 \\ \Delta v_{23} &= \Delta v_{24} \Leftrightarrow \Delta v_{23} = \sqrt{2}v_0 \end{aligned} \qquad (6.1.3)$$

A representação vectorial do campo de velocidades permite ainda proceder à representação das linhas de fluxo do material. As linhas de fluxo indicam as direcções de escoamento do material em deformação plástica e são tangentes ao vector velocidade em cada ponto.



b) A aplicação do método do limite superior a soluções de blocos rígidos estabelece que, no caso do atrito ser nulo, a potência necessária à deformação plástica é consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade. Deste modo, o balanço de potências dado por,

$$\int_{S_U} t_i v_i \, dS = \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* \, dV + \int_{S_D} k \left| \Delta v^* \right| dS \tag{6.1.4}$$

em que v_i^* representa um campo de velocidades cinematicamente admissível, $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ é o campo de velocidades de deformação derivado de v_i^*, $\left|\Delta v^*\right|$ é a descontinuidade de velocidade ao longo da superfície S_D e σ_{ij}^* satisfaz o critério de plasticidade reduz-se a,

$$\int_{S_U} t_i v_i \, dS = \int_{S_D} k \left| \Delta v^* \right| dS \tag{6.1.5}$$

e os integrais podem ser substituídos por somatórios. De facto, considerando as três superfícies de descontinuidade de velocidade da solução proposta para a resolução do problema, a potência necessária para realizar a operação de extrusão determina-se através de,

$$p \, Hb \, v_0 = 2 \times \sum_{i=1}^{3} k \left| \Delta v_i \right| S_i \tag{6.1.6}$$

em que o primeiro membro da equação é a potência fornecida pelo êmbolo de extrusão,

$$\left(\frac{dW}{dt} \right)_{ext} = p \, Hb \, v_0 \tag{6.1.7}$$

o símbolo p representa a pressão aplicada pelo êmbolo de extrusão e b é a largura do componente na direcção perpendicular ao plano da figura. O termo do segundo membro de (6.1.6) é a potência consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade,

$$\left(\frac{dW}{dt} \right)_{ldv} = 2 \times \sum_{i=1}^{3} k \left| \Delta v_i \right| S_i \tag{6.1.8}$$

em que $\left|\Delta v_i\right|$ é o valor da descontinuidade de velocidade ao longo da superfície S_i.

Como o cálculo da potência dissipada nas descontinuidades de velocidade (6.1.8) exige a determinação das respectivas superfícies, procede-se à sua obtenção da forma a seguir indicada,

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{Hb}{2} \\ S_{23} &= S_{24} = \frac{\sqrt{2}}{4} Hb \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Nestas condições, a aplicação do balanço (6.1.6) permite obter o valor da potência consumida na operação,

$$\begin{aligned} p \, Hb \, v_0 &= 2k \left(\Delta v_{12} S_{12} + \Delta v_{23} S_{23} + \Delta v_{24} S_{24} \right) \\ &= 2 \times k \left(v_0 \frac{Hb}{2} + \sqrt{2} v_0 \frac{\sqrt{2}}{4} Hb + \sqrt{2} v_0 \frac{\sqrt{2}}{4} Hb \right) \\ &= 3 k v_0 Hb \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

que é indispensável para obter uma estimativa da pressão de extrusão,

$$p = 3k \tag{6.1.11}$$

O valor da pressão de extrusão adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade do material, $\sigma_e = 2k$, vale,

$$\frac{p}{2k} = \frac{3}{2} \tag{6.1.12}$$

Como seria de esperar este valor é superior ao que se obtém através da aplicação do método das linhas de escorregamento,

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \cong 1.285 \qquad (6.1.13)$$

c) O balanço de potências expresso pelas equações (6.1.5) e (6.1.6) estabelece que a potência necessária para realizar a operação de extrusão é totalmente consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade. No caso de existir atrito torna-se necessário contabilizar a potência consumida por atrito nas paredes do contentor acrescentando essa contribuição ao segundo membro das referidas equações. Sendo a tensão de corte devida ao atrito dada por $\tau_a = mk$, a equação (6.1.6) pode reescrever-se do seguinte modo,

$$p\,Hb\,v_0 = 2\times\sum_{i=1}^{3} k\,|\Delta v_i|S_i + 2\times\sum_{j=1}^{1}\tau_a\,|\Delta v_j|S_j \qquad (6.1.14)$$

em que em que $|\Delta v_j|$ é a velocidade relativa de escorregamento na superfície S_j de interface entre o material e o contentor, onde existe atrito.

Uma vez que a zona 4 é uma zona morta ($v_4 = 0$), só existe potência consumida por atrito na interface de contacto da zona 1 ($v_1 = v_0$) com a parede do contentor de extrusão ao longo do comprimento de contacto, L. A parcela relativa ao atrito da equação anterior escreve-se do seguinte modo,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_a = 2\times\sum_{j=1}^{1}\tau_a\,|\Delta v_j|S_j = 2mk\,v_1 Lb = 2mk\,v_0 Lb \qquad (6.1.15)$$

Nestas condições a potência que é necessário fornecer para realizar a operação de extrusão (6.1.14) obtém-se através da adição da potência consumida por atrito (6.1.15) à potência consumida nas descontinuidades de velocidade calculada na alínea anterior (termo do segundo membro de (6.1.10)),

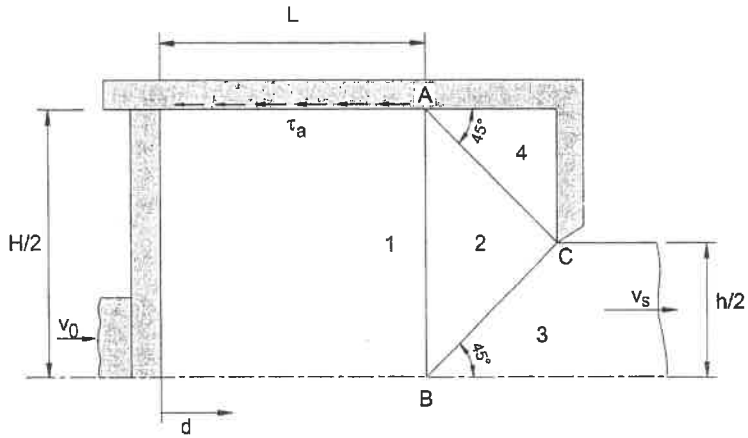
$$p\,Hb\,v_0 = 3kv_0 Hb + 2mkv_0 Lb \qquad (6.1.16)$$

que permite obter a seguinte estimativa para a pressão de extrusão em função do factor de atrito, m, e do comprimento de contacto, L (ilustrado na figura seguinte),

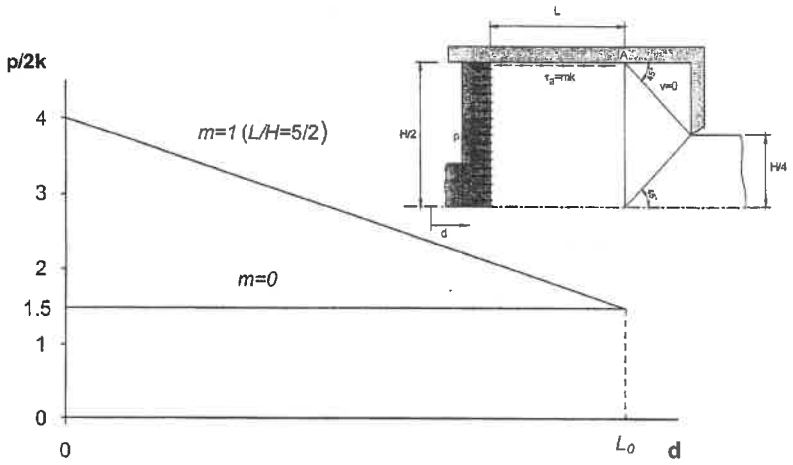
$$p = 3k + 2mk\frac{L}{H} \qquad (6.1.17)$$

a que corresponde a seguinte pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material em função do comprimento de contacto em condições de atrito máximo ($m = 1$),

$$\frac{p}{2k} = \frac{3}{2} + \frac{L}{H} \qquad (6.1.18)$$

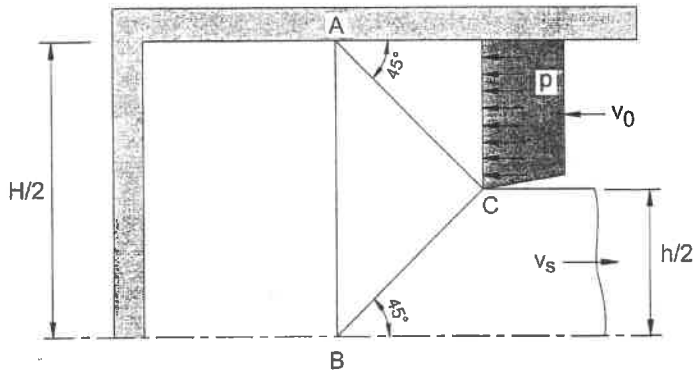


Estes resultados permitem concluir que na ausência de atrito ($m = 0$) a pressão de extrusão é constante. Quando porém existir atrito na interface do componente com o contentor de extrusão a pressão, e consequentemente a força, necessárias para realizar a operação de extrusão são superiores e decrescem de forma linear com o deslocamento do êmbolo, d, em virtude do comprimento de contacto, L, diminuir linearmente com o mesmo. Na figura seguinte encontram-se representados os resultados obtidos para a evolução da pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material em função do deslocamento do êmbolo sem atrito ($m = 0$, equação (6.1.12)) e em condições de atrito máximo ($m = 1$, equação (6.1.18)) para uma relação geométrica do componente no início da operação de $L_0/H = 5/2$.



Problema 6.2

Considere a operação de extrusão inversa com matrizes direitas, em condições de deformação plana, com uma relação de extrusão $R = 2$ ($R = H/h$) representada na figura seguinte.



Para a solução limite superior proposta determine:

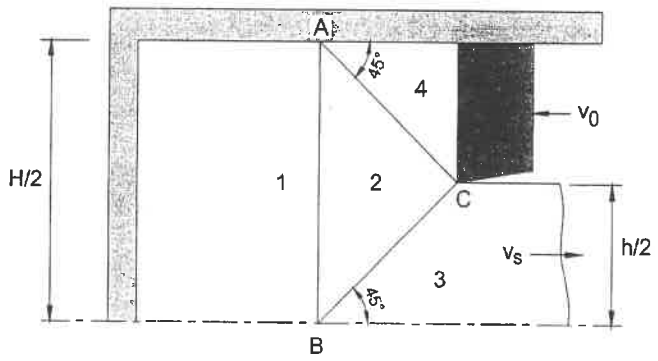
a) O campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

b) O valor da pressão necessária para realizar a operação de extrusão, adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade $2k$, admitindo que não existe atrito entre o material e as paredes do contentor.

c) Repita a alínea anterior admitindo que existe atrito máximo entre o material e as paredes do contentor. Considere que a tensão de corte devida ao atrito pode ser expressa através de $\tau_a = mk$.

Resolução

a) Seguindo a metodologia adoptada no problema anterior começa-se por numerar as zonas resultantes da subdivisão da região em deformação plástica através dos blocos rígidos delimitados por superfícies de descontinuidade de velocidade, de acordo com a figura seguinte. A solução limite superior apresentada considera que a região em deformação plástica (zona 2) é definida por um triângulo delimitado pela zona de actuação do êmbolo (zona 4), pela zona de saída (zona 3) e pela zona no interior do contentor (zona 1).



A cinemática do problema determina que o material adjacente ao êmbolo de extrusão (zona 4) se mova com a velocidade v_0 do êmbolo e que à saída (na zona 3) o material tenha a velocidade que resulta da condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos. Em condições de deformação plana, esta condição de incompressibilidade aplicada à operação de fabrico em estudo escreve-se do seguinte modo,

$$v_0\left(\frac{H}{2}-\frac{h}{2}\right)b = v_s\frac{h}{2}b \Leftrightarrow v_s = v_0 \qquad (6.2.1)$$

em que b é a largura do componente na direcção perpendicular ao plano da figura anterior.

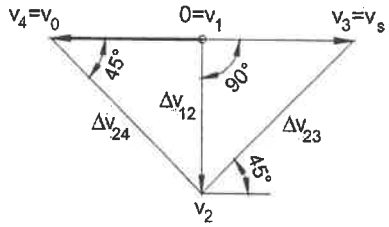
Tal como no problema anterior, por questões de compatibilidade cinemática imposta pelas paredes vertical e horizontal do contentor de extrusão, o bloco rígido da zona 1 possui velocidade nula.

Conhecidas as velocidades dos blocos rígidos,

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_3 &= v_s = v_0 \\ v_4 &= v_0 \end{aligned} \qquad (6.2.2)$$

e tendo presente as propriedades que caracterizam as linhas de descontinuidade de velocidade que delimitam os blocos rígidos, torna-se possível proceder à representação

vectorial do campo de velocidades através do hodógrafo que se encontra ilustrado na figura seguinte.



A intensidade das descontinuidades de velocidade, Δv_i, que representa a diferença entre os módulos das velocidades de dois blocos contíguos ao longo da superfície que os separa, pode ser determinada a partir do hodógrafo, obtendo-se,

$$\begin{aligned} &\Delta v_{24}\cos 45^\circ = v_0 \Leftrightarrow \Delta v_{24} = \sqrt{2}v_0 \\ &\Delta v_{24}\,\text{sen}\,45^\circ = \Delta v_{12} \Leftrightarrow \Delta v_{12} = v_0 \\ &\Delta v_{23} = \Delta v_{24} \Leftrightarrow \Delta v_{23} = \sqrt{2}v_0 \end{aligned} \qquad (6.2.3)$$

b) Em face do exposto no problema anterior, da aplicação do método do limite superior a soluções de blocos rígidos, considerando as três superfícies de descontinuidade de velocidade existentes, a potência necessária para realizar a operação de extrusão inversa calcula-se através do seguinte balanço,

$$p\,hb\,v_0 = 2\times\sum_{i=1}^{3} k\,|\Delta v_i|S_i \qquad (6.2.4)$$

em que p representa a pressão aplicada pelo êmbolo de extrusão, b a largura do componente na direcção perpendicular ao plano da figura e $|\Delta v_i|$ o valor da descontinuidade de velocidade ao longo da superfície S_i.

Para determinar a pressão de extrusão, através do balanço de potências anterior (6.2.4), é necessário calcular a área de cada superfície de descontinuidade de velocidade,

$$S_{12} = \frac{Hb}{2}$$
$$S_{23} = S_{24} = \frac{\sqrt{2}}{4} Hb \qquad (6.2.5)$$

Nestas condições, a potência consumida nas descontinuidade de velocidade existentes entre os blocos rígidos 1 e 2, 2 e 3, e 2 e 4, calcula-se através do termo do segundo membro de (6.2.4), considerando a intensidade das descontinuidades de velocidade determinadas em (6.2.3),

$$\begin{aligned}\left(\frac{dW}{dt}\right)_{Idv} &= 2\times\sum_{i=1}^{3} k\,|\Delta v_i|S_i = k(\Delta v_{12}S_{12} + \Delta v_{23}S_{23} + \Delta v_{24}S_{24}) \\ &= 2\times k\left(v_0\frac{Hb}{2} + \sqrt{2}v_0\frac{\sqrt{2}}{4}Hb + \sqrt{2}v_0\frac{\sqrt{2}}{4}Hb\right) \\ &= 3kv_0Hb\end{aligned} \qquad (6.2.6)$$

Uma vez que a potência a fornecer pelo êmbolo de extrusão é determinada através do primeiro membro de (6.2.4),

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{ext} = pv_0\frac{H}{2}b \qquad (6.2.7)$$

estabelecendo o balanço (6.2.4) através da igualdade entre (6.2.6) e (6.2.7) obtém-se a pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $\sigma_e = 2k$,

$$\frac{p}{2k} = 3 \qquad (6.2.8)$$

Este resultado, quando comparado com o resultado da alínea b) do problema anterior, permite concluir que, na ausência de atrito, a pressão que é necessário aplicar para realizar a operação de extrusão e que conduz à mesma alteração de geometria no componente é mais elevada na extrusão inversa do que na extrusão directa (6.1.12). Este resultado deve-se à diferença das áreas dos êmbolos através dos quais se efectua a aplicação da força durante a operação. Note-se porém que a força de extrusão é a mesma independentemente do sentido de actuação do punção.

c) Seguindo a metodologia adoptada na resolução da alínea c) do problema anterior, e em virtude de existir atrito na interface material/contentor, o balanço das potências envolvidas na operação exige que seja contabilizada a potência consumida por atrito nas paredes do contentor. A cinemática da solução de blocos rígidos analisada na alínea a) permitiu concluir que dos dois blocos rígidos em contacto com o contentor de extrusão (blocos 1 e 4) somente o bloco 4 apresenta velocidade relativa de escorregamento na superfície do contentor, $v_4 = v_0$.

Nestas condições, atendendo a que o comprimento de contacto C do bloco 4 com a parede do contentor se mantém constante ao longo da operação de extrusão (como ilustra a figura seguinte), a parcela da potência consumida por atrito calcula-se do seguinte modo,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_a = 2\times\sum_{j=1}^{1}\tau_a\,|\Delta v_j|S_j = 2mkv_4Cb = 2mkv_0Cb \qquad (6.2.9)$$

e a potência necessária à operação de extrusão obtém-se adicionando esta parcela relativa ao atrito (6.2.9) à potência consumida nas descontinuidades de velocidade (6.2.6),

$$p\frac{H}{2}b\,v_0 = 3kv_0Hb + 2mkv_0Cb \qquad (6.2.10)$$

Este balanço permite obter a seguinte estimativa de pressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, em função do factor de atrito, m,

$$\frac{p}{2k} = 3 + 2m\frac{C}{H} \qquad (6.2.11)$$

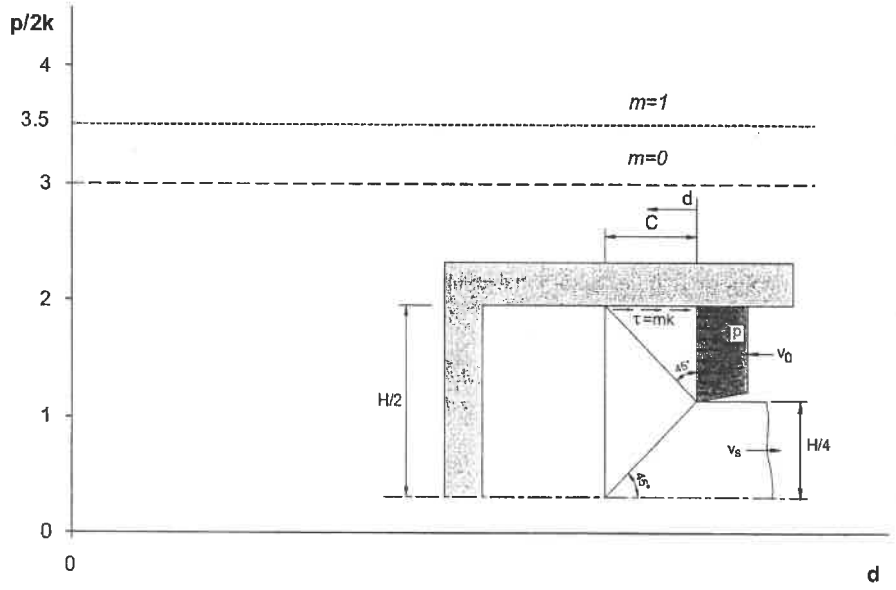
Atendendo à geometria da operação de extrusão e da respectiva solução limite superior proposta conclui-se que o quociente entre o comprimento de contacto e a altura do componente é,

$$\frac{C}{H} = \frac{1}{4} \qquad (6.2.12)$$

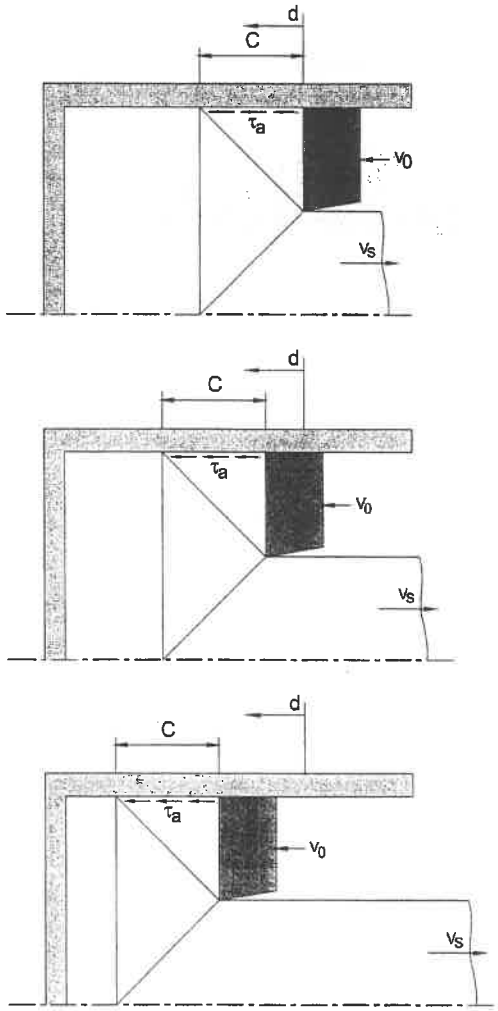
Então, de acordo com a equação (6.2.11) a pressão que é necessário aplicar para realizar a operação de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material em condições de atrito máximo, $m = 1$, vale,

$$\frac{p}{2k} = \frac{7}{2} \qquad (6.2.13)$$

É particularmente interessante verificar, que de acordo os resultados obtidos, nas operações de extrusão inversa com atrito, onde grande parte da pré-forma não apresenta movimento relativamente ao contentor, a pressão de extrusão é constante e independente do deslocamento do êmbolo, d. Para melhor se compreender os resultados obtidos, as figuras seguintes apresentam a evolução pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material em duas condições limite de atrito (correspondentes às equações (6.2.8) e (6.2.13)) em função do deslocamento do êmbolo e ilustrações de três instantes consecutivos da operação de extrusão inversa.

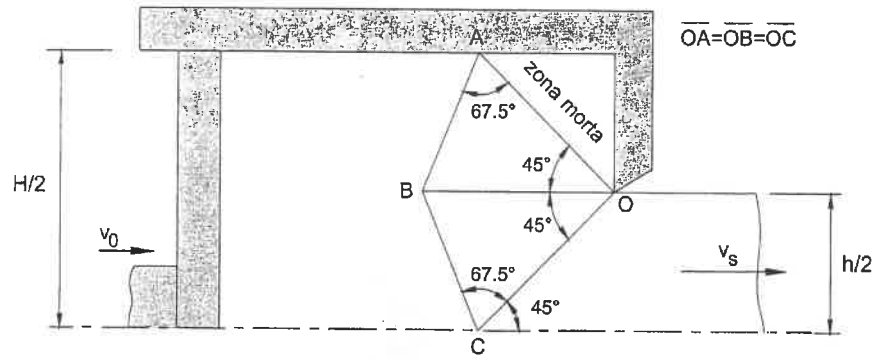


Pelo contrário na extrusão directa, conforme foi analisado no problema anterior, onde a superfície de escorregamento da pré-forma sobre o contentor é elevada, a existência de atrito tem consequências relevantes no processo derivadas do aumento da pressão de extrusão e da respectiva evolução com o deslocamento do êmbolo.



Problema 6.3

Considere a solução limite superior para a extrusão directa sem atrito, em condições de deformação plana, com uma relação de extrusão $R = 2$, que se encontra representada na figura.



a) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

b) Calcule o valor da pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material $p/2k$, que é aplicada pelo êmbolo.

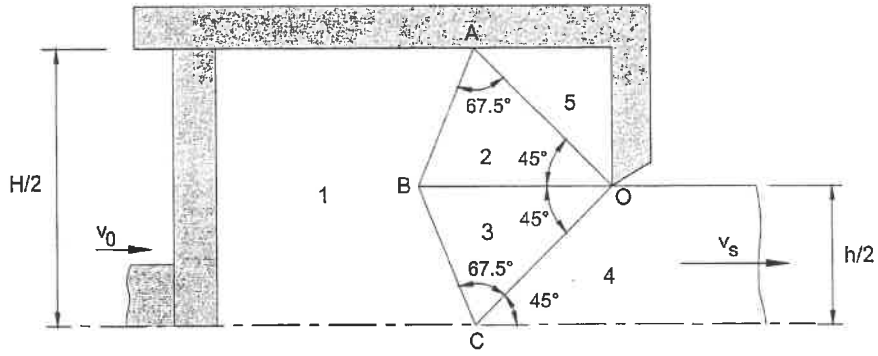
Resolução

a) A solução limite superior proposta para a resolução do problema baseia-se na utilização de blocos rígidos com velocidade constante. Os blocos são delimitados por superfícies de descontinuidade de velocidade e numerados de acordo com a figura seguinte. A solução limite superior apresentada considera que a região em deformação plástica é definida por dois triângulos isósceles (zona 2 e 3) delimitados pela zona de entrada (zona 1), pela zona de saída (zona 4) e pela zona no canto do contentor (zona 5).

Para construir o hodógrafo começa por aplicar-se a condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos,

$$v_0 H/2b = v_s h/2b \Leftrightarrow v_0 R = v_s \Leftrightarrow v_s = 2v_0 \qquad (6.3.1)$$

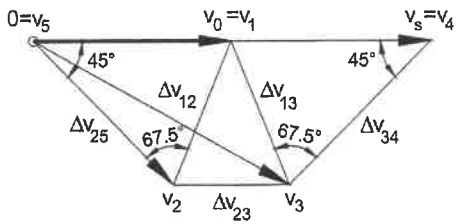
Adicionalmente, por questões de compatibilidade cinemática imposta pelas paredes vertical e horizontal do contentor de extrusão, o material situado na zona 5 possui velocidade nula, $v_5 = 0$.



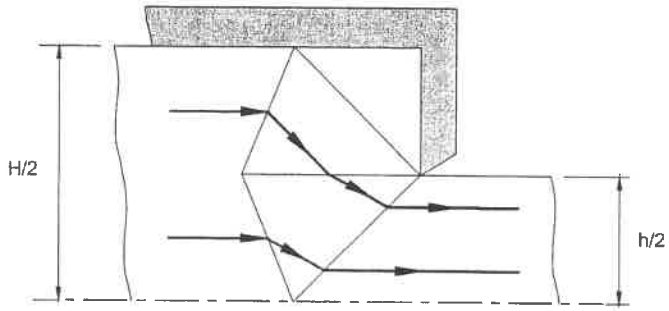
Seguindo a metodologia aplicada nos problemas anteriores, a construção do hodógrafo inicia-se através da representação dos vectores de velocidade conhecidos, nas zonas rígidas 1, 4, e 5,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \\ v_4 &= v_s = 2v_0 \\ v_5 &= 0 \end{aligned} \qquad (6.3.2)$$

Considerando as propriedades que caracterizam as linhas de descontinuidade de velocidade, obtém-se a seguinte representação vectorial do campo de velocidades através do hodógrafo que se encontra ilustrado na figura seguinte.



Esta representação do campo de velocidades permite proceder à representação das linhas de fluxo do material. As duas linhas de fluxo representadas na figura seguinte indicam as direcções de escoamento do material em deformação plástica e são tangentes ao vector velocidade em cada ponto.



Para determinar completamente o campo de velocidades é necessário calcular a intensidade das descontinuidades de velocidade, tendo em consideração que devido à imposição geométrica da solução do limite superior, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, e os ângulos $O\hat{A}B = A\hat{O}C = O\hat{B}C = B\hat{C}O = 67.5°$,

$$\begin{aligned} \Delta v_{25} &= \Delta v_{34} = v_0 \\ \Delta v_{12} &= \Delta v_{13} = \frac{1-\cos 45}{\cos 67.5} v_0 \\ \Delta v_{23} &= 2v_0 \left(1-\cos 45\right) \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

b) Uma vez que a solução limite superior é constituída por blocos rígidos e que não existe atrito nas paredes do contentor, apenas haverá consumo de energia nas superfícies de descontinuidade de velocidade. Aplicando a metodologia descrita nos problemas anteriores, a metade da geometria da operação, estabelece-se a seguinte igualdade entre a potência fornecida pelo êmbolo de extrusão e a potência consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade,

$$p\, H/2\, b\, v_0 = \sum_{i=1}^{5} k \left|\Delta v_i\right| S_i \tag{6.3.4}$$

A intensidade das descontinuidades de velocidade, Δv_i, foi determinada na alínea anterior. Torna-se agora necessário determinar a área de cada superfície de descontinuidade de velocidade, S_i,

$$\begin{aligned} S_{23} = S_{34} = S_{25} &= \frac{Hb}{4 \operatorname{sen} 45} \\ S_{12} = S_{13} &= \frac{Hb}{4 \operatorname{sen} 67.5} \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Nestas condições o balanço (6.3.4) pode escrever-se do seguinte modo,

$$p\frac{H}{2} b\, v_0 = 2kv_0 \frac{Hb}{4 \operatorname{sen} 45} + 2kv_0 \left(1-\cos 45\right) \frac{Hb}{4 \operatorname{sen} 45} + 2kv_0 \frac{1-\cos 45}{\cos 67.5} \frac{Hb}{4 \operatorname{sen} 67.5} \tag{6.3.6}$$

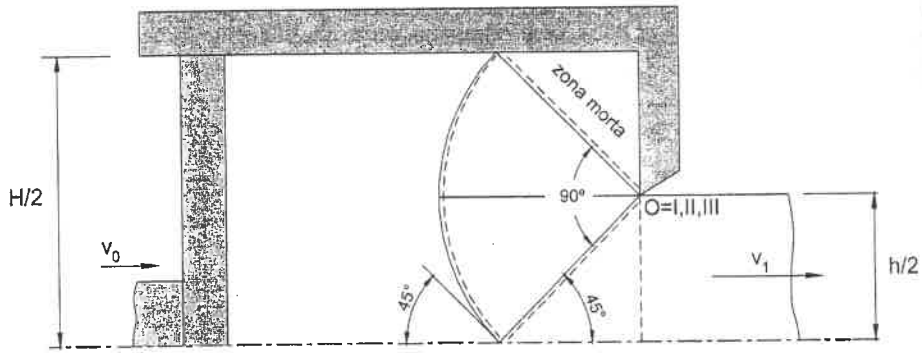
de onde se obtém a seguinte estimativa da pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $\sigma_e = 2k$,

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} 45} + \frac{1-\cos 45}{2 \operatorname{sen} 45} + \frac{1-\cos 45}{\cos 67.5} \frac{1}{2 \operatorname{sen} 67.5} \cong 1.33 \tag{6.3.7}$$

Se alternativamente, se tivesse aplicado o método das linhas de escorregamento considerando o campo de linhas de escorregamento representado na figura seguinte para analisar a operação de extrusão obter-se-ia o seguinte valor de pressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material,

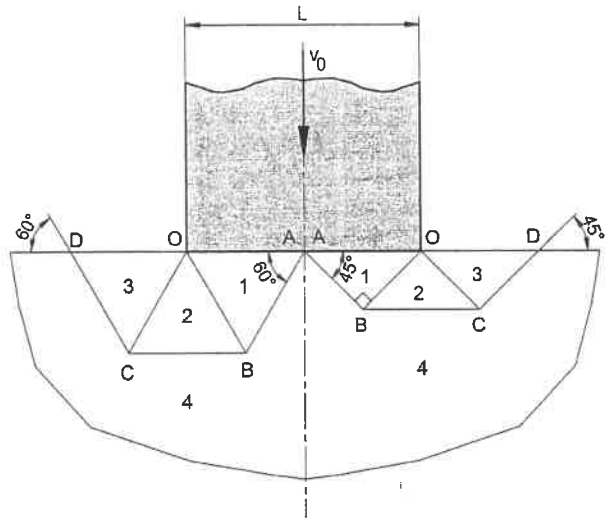
$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{2} + \left(1+\frac{\pi}{2}\right) \cong 1.285 \tag{6.3.8}$$

A comparação deste valor com o que foi determinado em (6.3.7) permite concluir que a solução obtida através do método do limite superior corresponde a uma estimativa da pressão de extrusão cujo valor é superior ao valor exacto que se obtém através do método das linhas de escorregamento. Estes resultados vão de encontro às soluções obtidas através do método do limite superior em que tanto os valores de potência como os valores de pressão são iguais ou superiores aos valores reais do processo. Note-se que a obtenção destes valores majorados é bastante útil, por exemplo, na selecção de equipamentos ou no projecto e dimensionamento de ferramentas.



Problema 6.4

Considere a operação de indentação ($H/L > 8.74$) sem atrito, em condições de deformação plástica plana, representada na figura seguinte. São apresentadas duas soluções limite superior que assentam na subdivisão da região em deformação plástica através blocos rígidos com geometrias diferentes, triângulos equiláteros e triângulos rectângulos, do lado esquerdo e direito da linha de simetria, respectivamente.



Para cada solução limite superior proposta determine:

a) O valor da pressão necessário à deformação plástica, adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade do material.

b) Compare os valores de pressão obtidos na alínea anterior com o determinado a partir do método das linhas de escorregamento e discuta as eventuais diferenças.

c) Admita, agora, que existe atrito na interface cunho/material. Sendo o coeficiente de atrito $\mu = 0.15$ (atrito de Coulomb), calcule o acréscimo de pressão que é necessário fornecer para realizar a deformação plástica.

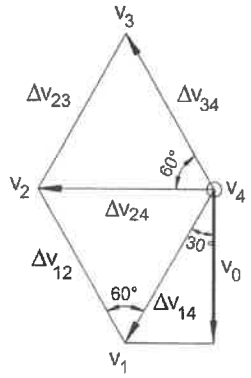
Resolução

a) Para efeitos de simplicidade de exposição as soluções limite superior propostas, passarão a ser designadas de campo com linhas a 60° (MLS60) e campo com linhas a 45° (MLS45) em correspondência ao lado esquerdo e direito da linha de simetria da operação.

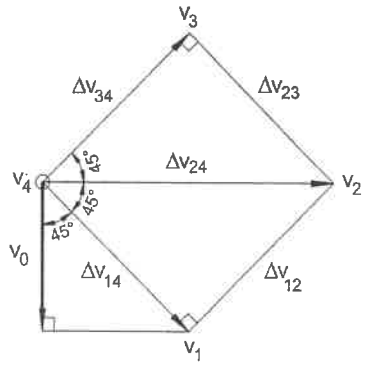
Seguindo a metodologia de cálculo anteriormente estabelecida para a aplicação do método do limite superior a soluções de blocos rígidos, considerando metade da geometria da operação e não existindo atrito na interface com a ferramenta, é possível escrever a seguinte igualdade entre a potência a fornecer através do êmbolo de extrusão e a potência consumida nas 5 superfícies de descontinuidade de velocidade que delimitam os blocos triangulares,

$$p\, S_c\, v_0 = \sum_{i=1}^{5} k\, |\Delta v_i| S_i \qquad (6.4.1)$$

em que p representa a pressão aplicada pelo êmbolo de extrusão, S_c é a área da interface de contacto material/cunho, k é a tensão limite de elasticidade ao corte do material e $|\Delta v_i|$ é o valor da descontinuidade de velocidade ao longo da superfície S_i.



Campo com linhas a 60° (MLS60)



Campo com linhas a 45° (MLS45)

O cálculo da potência consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade torna necessário determinar a intensidade das descontinuidades de velocidade e a área das descontinuidades de velocidade para cada uma das soluções propostas. Seguindo a

metodologia descrita nos problemas anteriores obtêm-se os hodógrafos correspondentes aos campos de velocidades das soluções limite superior que se encontram representados na figura anterior.

Os valores das descontinuidades de velocidade para cada uma das respectivas soluções podem ser expressos em função da velocidade de deslocamento do cunho, v_0, através de manipulação trigonométrica ao nível do hodógrafo, obtendo-se,

1) Campo com linhas a 60° (MLS60):

$$\Delta v_{14} = \Delta v_{34} = \Delta v_{23} = \Delta v_{12} = \frac{v_0}{\cos 30} = \frac{2}{\sqrt{3}} v_0$$
$$\Delta v_{24} = 2\Delta v_{14} \cos 60 = \Delta v_{14} \qquad (6.4.2)$$

2) Campo com linhas a 45° (MLS45):

$$\Delta v_{14} = \Delta v_{34} = \Delta v_{23} = \Delta v_{12} = \frac{v_0}{\cos 45} = \frac{2}{\sqrt{2}} v_0$$
$$\Delta v_{24} = 2\Delta v_{14} \cos 45 = 2\frac{2}{\sqrt{2}} v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2v_0 \qquad (6.4.3)$$

A área de cada superfície de descontinuidade de velocidade pode ser expressa em função da largura do cunho L e do comprimento do componente b do seguinte modo,

1) Campo com linhas a 60° (MLS60):

$$S_{14} = S_{34} = S_{23} = S_{12} = S_{24} = \frac{L}{2} b \qquad (6.4.4)$$

2) Campo com linhas a 45° (MLS45):

$$S_{14} = S_{34} = S_{23} = S_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{L}{2} b \qquad \text{e} \qquad S_{24} = \frac{L}{2} b \qquad (6.4.5)$$

Nestas condições, o balanço expresso pela equação (6.4.1) que permite determinar a pressão que é aplicada pelo cunho adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $\sigma_e = 2k$, em cada um dos casos escreve-se do seguinte modo,

1) Campo com linhas a 60° (MLS60):

$$p\frac{L}{2}bv_0 = k5\frac{L}{2}b\frac{2}{\sqrt{3}}v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{2k} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89 \qquad (6.4.6)$$

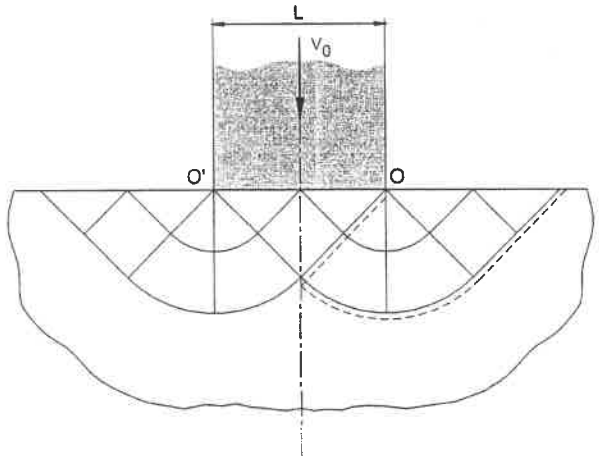
2) Campo com linhas a 45° (MLS45):

$$p\frac{L}{2}bv_0 = kb\left(2v_0\frac{L}{2} + 4\frac{2}{\sqrt{2}}v_0\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{L}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{2k} = 3 \qquad (6.4.7)$$

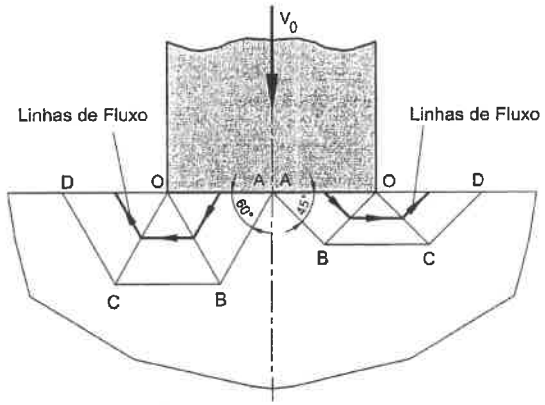
b) Para se compreender as diferenças obtidas através das duas soluções usadas para resolver o problema da indentação e ainda através do método das linhas de escorregamento (MLE), considere-se a tabela seguinte, onde se apresentam os valores de pressão e das áreas das LDV associadas a cada uma das soluções estudadas.

Solução	$\frac{p}{2k}$	Área das descontinuidades de velocidade por unidade de comprimento ($b=1$)
MLE	$(1+\pi/2)=2.57$	-
MLS60	2.89	$5\frac{L}{2}=2.5L$
MLS45	3	$4\sqrt{2}\frac{L}{4}+\frac{L}{2}=1.91L$

O resultado obtido através do método das linhas de escorregamento resulta do campo de linhas de escorregamento ilustrado na figura seguinte, aplicável em operações em que a relação geométrica entre a altura da peça e a largura do cunho é $H/L > 8.74$.

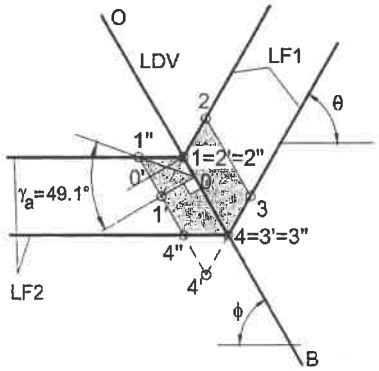


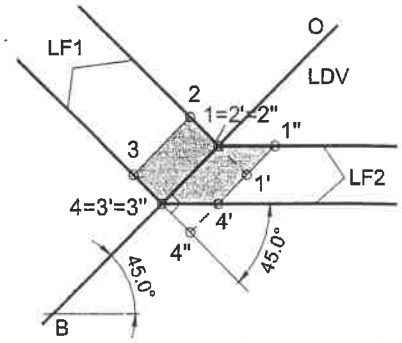
É de notar que embora a área total das superfícies de descontinuidade de velocidade seja superior na solução MLS60 à da solução MLS45, a pressão necessária à deformação é menor e, por isso, mais próxima da exacta (MLE). Este facto significa que embora a solução MLS60 movimente mais material a distorção média nas descontinuidades de velocidade é menor, conforme se pode verificar através das linhas de fluxo representadas na figura seguinte.



Este mesmo aspecto pode ser confirmado calculando o valor da distorção γ associada às linhas de descontinuidade de velocidade de cada uma das soluções. Para tal

considere-se a figura seguinte onde se ilustra o ângulo de distorção γ_a na descontinuidade OB para cada uma das soluções propostas.





Analisando o modo como se processa a deformação numa LDV na solução MLS60 (na figura anterior do lado esquerdo) é possível escrever através de manipulação trigonométrica a seguinte expressão que permite contabilizar o valor da distorção γ,

$$\gamma = \operatorname{tg}\gamma_a = \frac{\overline{1'1''}}{\overline{01'}} = \frac{\overline{1'0'}}{\overline{01'}} + \frac{\overline{0'1''}}{\overline{01'}} = \operatorname{tg}(\theta+\phi-90) + \operatorname{cotg}\phi \qquad (6.4.8)$$

Aplicando a cada uma das soluções, obtém-se,

1) Campo com linhas a 60° (MLS60):

$$\gamma = \operatorname{tg}\gamma_a = \operatorname{tg}(60+60-90) + \operatorname{cotg}60 = 1.155 \;\Rightarrow\; \gamma_a = 49.1° \qquad (6.4.9)$$

2) Campo com linhas a 45° (MLS45):

$$\gamma = \operatorname{tg}\gamma_a = \operatorname{tg}(45+45-90) + \operatorname{cotg}45 = 1 \;\Rightarrow\; \gamma_a = 45° \qquad (6.4.10)$$

c) Existindo atrito na base do cunho torna-se necessário contabilizar a potência dissipada por atrito acrescentando essa contribuição ao segundo membro do balanço de potências (6.4.1). Sendo a tensão de corte devida ao atrito expressa através do modelo de atrito de Coulomb, $\tau_a = \mu p$, a equação (6.4.1) reescreve-se do seguinte modo,

$$p\,S_c\,v_0 = \sum_{i=1}^{5} k\,|\Delta v_i|\,S_i + \mu p\,v_{1h}\,\frac{L}{2}b \qquad (6.4.11)$$

em que p é a pressão ou tensão normal que actua na superfície da base do cunho, μ o coeficiente de atrito, v_{1h} a componente horizontal de velocidade do bloco 1 (tangente à base do cunho) e $bL/2$ a área da interface de atrito. Deste modo, obtém-se para cada um dos casos em análise,

1) Campo com linhas a 60° (MLS60):

$$p\frac{L}{2}bv_0 = k5\frac{L}{2}b\frac{2}{\sqrt{3}}v_0 + \mu p\frac{v_0}{\sqrt{3}}\frac{L}{2}b \;\Rightarrow\; p\left(1-\frac{0.15}{\sqrt{3}}\right) = 2k\frac{5}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \frac{p}{2k} = 3.16 \qquad (6.4.12)$$

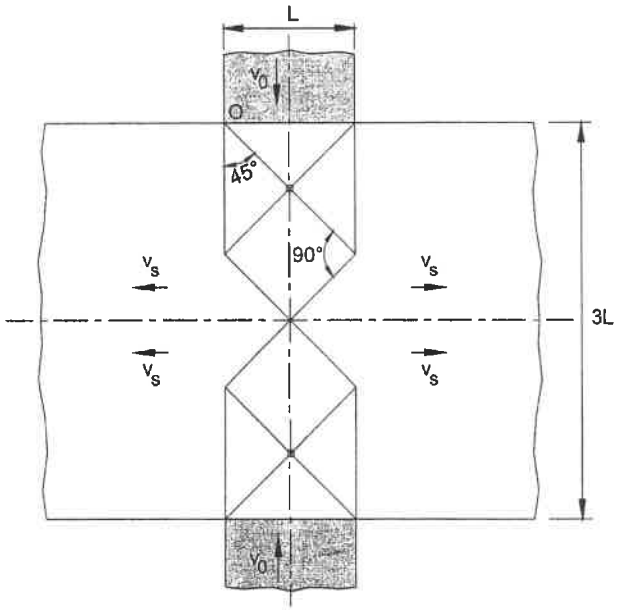
2) Campo com linhas a 45° (MLS45):

$$p\frac{L}{2}bv_0 = K\,bv_0\frac{L}{2}\left(2+4\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \mu p v_0\frac{L}{2}b \;\Rightarrow\; \frac{p}{2k} = 3.53 \qquad (6.4.13)$$

É de particular interesse verificar que também a solução proposta afecta a contribuição da parcela de atrito no valor da pressão necessária à deformação plástica. Assim, enquanto que o aumento de pressão no caso do MLS60 é de 9.5%, no caso do MLS45 é de 17.6%.

Problema 6.5

Considere a solução limite superior para a operação de compressão sem atrito, em condições de deformação plástica plana, que se encontra representada na figura.

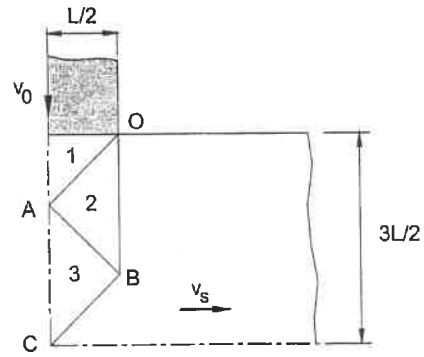


a) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

b) Calcule o valor da pressão de compressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, $p/2k$, que é aplicada pelo cunho.

Resolução

a) A análise da geometria do problema permite concluir acerca da existência de duas linhas de simetria cinemáticas, vertical e horizontal, pelo que a resolução deste problema pode ser efectuada num quadrante da geometria. Considere-se o primeiro quadrante da operação representado na figura seguinte onde se encontram identificados os blocos rígidos da solução limite superior.



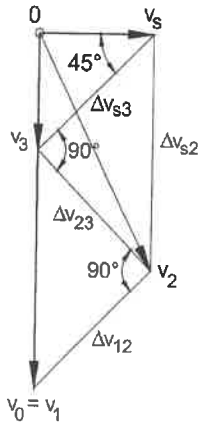
Para construir o hodógrafo sabe-se que a incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos impõe que,

$$v_0 \frac{L}{2} b = v_s \frac{3L}{2} b \Leftrightarrow v_s = \frac{v_0}{3} \tag{6.5.1}$$

Em virtude da linha de simetria vertical passar nos blocos 1 e 3 os vectores velocidade no seu interior têm de estar alinhados com a direcção vertical. Como adicionalmente o bloco 1 tem uma zona de contacto com a ferramenta, a componente normal da velocidade deste bloco tem de ser igual à da ferramenta, então $v_1 = v_0$. A cinemática do problema associada às propriedades que caracterizam as linhas de descontinuidade de velocidade permite obter a representação vectorial do campo de velocidades através do hodógrafo representado na figura seguinte.

Para determinar completamente o campo de velocidades é necessário calcular a intensidade das descontinuidades de velocidade. Estes valores podem ser expressos em função da velocidade de deslocamento da ferramenta, v_0, através de manipulação trigonométrica ao nível do hodógrafo,

$$\begin{aligned} \Delta v_{12} = \Delta v_{23} = v_{s3} &= \frac{v_s}{\cos 45} = \frac{\sqrt{2}}{3} v_0 \\ \Delta v_{s2} &= 2v_s = \frac{2}{3} v_0 \end{aligned} \tag{6.5.2}$$



b) De acordo com o método do limite superior, uma vez que a solução de limite superior é constituída por blocos rígidos e não existindo atrito na interface com a ferramenta, apenas há consumo de energia nas descontinuidades de velocidade que delimitam os blocos. A potência consumida nas quatro descontinuidades de velocidade calcula-se do seguinte modo,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{idv} = \sum_{i=1}^{4} k\,|\Delta v_i| S_i \tag{6.5.3}$$

onde que k é a tensão limite de elasticidade do material em corte puro e $|\Delta v_i|$ é o valor da descontinuidade de velocidade ao longo da superfície S_i.

A potência fornecida pelo cunho para a compressão de um quarto da geometria pode ser calculada através de,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{ext} = p\,\frac{L}{2}\,b\,v_0 \tag{6.5.4}$$

em que p é a pressão aplicada pelo cunho compressor e L e b são a largura e comprimento do cunho, respectivamente.

Igualando as duas potências (6.5.3) e (6.5.4) obtém-se a seguinte equação,

$$p\,\frac{L}{2}\,b\,v_0 = \sum_{i=1}^{4} k\,|\Delta v_i| S_i \tag{6.5.5}$$

Para determinar a pressão aplicada pelo cunho compressor, p, é então necessário proceder à determinação das áreas das descontinuidades de velocidade. Considerando a geometria da solução do limite superior, $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{AC}$,

$$S_{OA} = S_{AB} = S_{BC} = \frac{Lb}{2\cos 45} = \frac{\sqrt{2}}{2} Lb$$
$$S_{OB} = Lb \tag{6.5.6}$$

Substituindo estes resultados na equação (6.5.5),

$$p\,\frac{L}{2}\,b\,v_0 = 3k\,\frac{\sqrt{2}}{3} v_0\,\frac{\sqrt{2}}{2} Lb + k\,\frac{2}{3} v_0 Lb \tag{6.5.7}$$

obtém-se o valor da pressão de compressão aplicada pelo cunho adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade do material, $\sigma_e = 2k$,

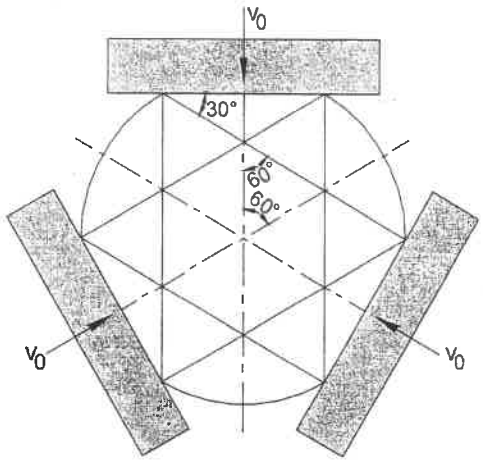
$$\frac{p}{2k} = \frac{5}{3} \cong 1.67 \tag{6.5.8}$$

Importa salientar que este resultado é uma estimativa da pressão de compressão, sendo o valor obtido superior ao valor exacto que se poderia obter, por exemplo, através da aplicação do método das linhas de escorregamento,

$$\frac{p}{2k} = \frac{3}{2} = 1.5 \tag{6.5.9}$$

Problema 6.6

Considere a solução limite superior para a operação de forjamento em condições de deformação plástica plana sem atrito que se encontra representada na figura.

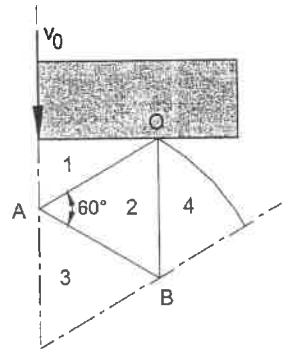


a) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

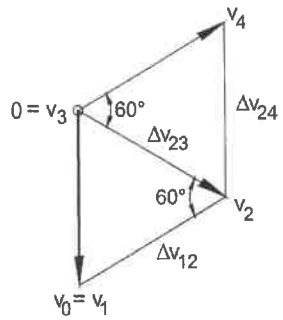
b) Calcule o valor da pressão de compressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material $p/2k$, que é aplicada por cada um dos pratos compressores.

Resolução

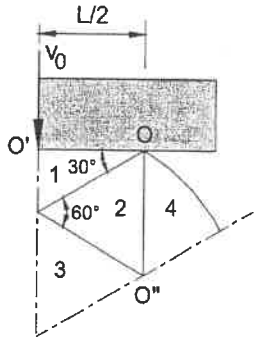
a) A análise do problema permite concluir acerca da existência de três linhas de simetria geométrica e cinemática, que dividem o componente em seis partes iguais, conforme se pode observar na figura anterior. Neste sentido a resolução deste problema pode ser efectuada considerando um sexto da geometria. Para simplificar a exposição identificam-se os blocos rígidos da solução do limite superior conforme se encontra ilustrado na figura seguinte.



A cinemática do problema determina que a velocidade do bloco rígido 1 seja igual à velocidade do prato compressor, v_0, uma vez que este se encontra em contacto com a ferramenta e é simultaneamente atravessado por uma linha de simetria vertical. Adicionalmente o material situado no bloco rígido 3 possui velocidade nula por questões de compatibilidade cinemática impostas pelas duas linhas de simetria (vertical e oblíqua). Conhecidas as velocidades dos blocos rígidos 1 e 3 e considerando as propriedades definidas para as linhas de descontinuidade de velocidade torna-se possível proceder à representação vectorial do campo de velocidades através do hodógrafo que se encontra ilustrado na figura seguinte.



Note-se, que tendo em conta a geometria da solução limite superior, o comprimento de contacto entre o prato compressor e o material $\overline{OO'} = L/2$ é igual ao comprimento $\overline{OO''}$, conforme ilustra a figura seguinte.



Deste modo a condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos encontra-se assegurada já que o fluxo de material que atravessa a secção definida pelo comprimento $\overline{OO'}$ e a largura da peça é exactamente o mesmo que atravessa a secção definida pelo comprimento $\overline{OO''}$ e a largura da peça. Esta condição pode escrever-se, por unidade de largura da peça, do seguinte modo,

$$v_0 \frac{L}{2} = v_4 \frac{L}{2} \Leftrightarrow v_0 = v_4 \tag{6.6.1}$$

em que v_4 é a velocidade do bloco rígido 4. Este resultado está de acordo com a representação vectorial obtida para o campo de velocidades (hodógrafo).

Para determinar o campo de velocidades falta calcular a intensidade das descontinuidades de velocidade e a velocidade do bloco rígido 2. Estes valores podem ser expressos em função da velocidade de deslocamento da ferramenta, v_0, através de manipulação trigonométrica ao nível do hodógrafo,

$$\begin{aligned} \Delta v_{12} &= \Delta v_{23} = \Delta v_{24} = v_0 \\ v_2 &= v_0 \end{aligned} \tag{6.6.2}$$

b) Como a solução de limite superior proposta assenta na subdivisão da região em deformação plástica em blocos rígidos e como adicionalmente não existe atrito, a potência fornecida pelo prato compressor para realizar a operação de forjamento é igual à potência consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade que delimitam os blocos,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{ext} = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{idv} \tag{6.6.3}$$

Este balanço efectuado num sexto da geometria, onde existem três superfícies de descontinuidade de velocidade, pode ser reescrito do seguinte modo,

$$p \frac{L}{2} b\, v_0 = k\Delta v_{12} S_{12} + k\Delta v_{23} S_{23} + k\Delta v_{24} S_{24} \tag{6.6.5}$$

em que b é a largura da peça, Δv_i são as intensidades das descontinuidades de velocidade e S_i as áreas das superfícies de descontinuidade de velocidade.

A contabilização das parcelas de potência consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade exige que se proceda à determinação das áreas das superfícies. Atendendo à geometria da solução de limite superior proposta obtém-se,

$$S_{12} = S_{23} = S_{24} = \frac{Lb}{2\cos 30} = \frac{\sqrt{3}}{3} Lb \tag{6.6.6}$$

Substituindo este resultado e os valores das descontinuidades de velocidade, determinados em (6.6.2), na equação (6.6.5) obtém-se,

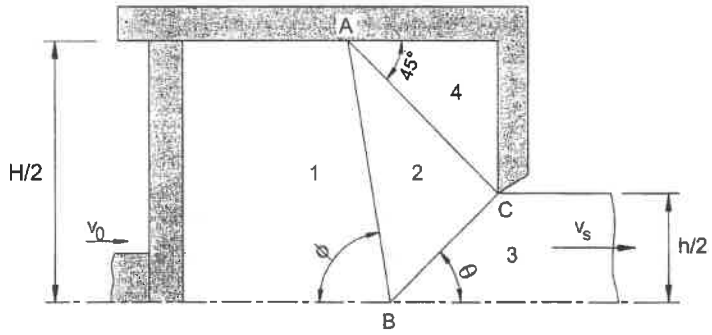
$$p \frac{L}{2} b\, v_0 = 3k v_0 \frac{\sqrt{3}}{3} Lb \tag{6.6.7}$$

a que corresponde o seguinte valor da pressão aplicada pelos pratos compressores adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade do material, $\sigma_e = 2k$,

$$\frac{p}{2k} = \sqrt{3} \tag{6.6.8}$$

Problema 6.7

Considere a operação de extrusão com matrizes direitas com formação de zona morta, sem atrito, em condições de deformação plana, com uma relação de extrusão R ($R = H/h$) representada na figura seguinte.



Para a solução limite superior proposta determine:

a) Determine o campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

b) O valor mínimo da pressão, adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade $2k$, necessário para realizar a operação de extrusão.

Resolução

a) A solução limite superior apresentada considera que a região em deformação plástica (zona 2) é definida por um triângulo rígido (de velocidade constante) delimitado por três linhas de descontinuidade de velocidade que o separam das zonas rígidas de entrada (zona 1), de saída (zona 3) e da zona morta no canto do contentor (zona 4). A geometria do triângulo é definida através dos ângulos θ e ϕ.

A cinemática do problema determina que o material adjacente ao êmbolo de extrusão (zona 1) se mova com a velocidade v_0 do êmbolo e que o material localizado na saída (zona 3) tenha a velocidade que resulta da condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos,

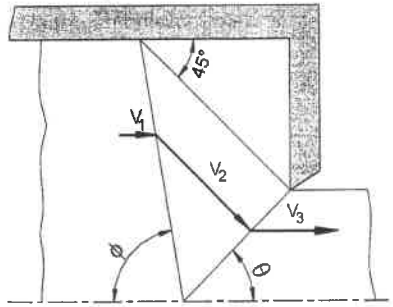
$$v_0 H/2b = v_s h/2b \Leftrightarrow v_s = Rv_0 \qquad (6.7.1)$$

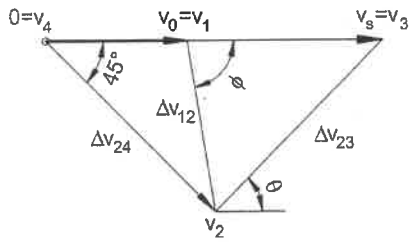
em que R é a relação de extrusão, $R = H/h$, e b é a largura do componente na direcção perpendicular ao plano da figura anterior.

O material situado na zona 4 possui velocidade nula por questões de compatibilidade cinemática impostas pelas paredes vertical e horizontal do contentor de extrusão. A cinemática do problema determina que as velocidades dos blocos rígidos 1, 3 e 4 sejam,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \\ v_3 &= v_s = Rv_0 \\ v_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (6.7.2)$$

A figura seguinte ilustra o campo de velocidades, representado por uma linha de fluxo, do lado esquerdo e o respectivo hodógrafo, do lado direito. A construção do hodógrafo foi realizada a partir dos vectores velocidade conhecidos (6.7.2) tendo presente as propriedades que caracterizam as descontinuidades de velocidade que delimitam o bloco rígido da zona 2.





Para que o campo de velocidades seja completamente conhecido, interessa calcular a intensidade das descontinuidades de velocidade em função dos ângulos θ e ϕ que caracterizam a solução proposta. A sua determinação efectua-se através de manipulação trigonométrica ao nível do hodógrafo,

$$\begin{cases}\Delta v_{24}\cos 45^\circ - \Delta v_{12}\cos\phi = v_0 \\ \Delta v_{24}\operatorname{sen} 45^\circ = \Delta v_{12}\operatorname{sen}\phi\end{cases} \Leftrightarrow \Delta v_{12}(\operatorname{sen}\phi - \cos\phi) = v_0 \Leftrightarrow \Delta v_{12} = \frac{v_0}{\operatorname{sen}\phi - \cos\phi}$$

$$\Delta v_{12}\operatorname{sen}\phi = \Delta v_{23}\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow \Delta v_{23} = \frac{v_0}{\operatorname{sen}\phi - \cos\phi}\frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta} \tag{6.7.3}$$

$$\Delta v_{24}\operatorname{sen} 45^\circ = \Delta v_{12}\operatorname{sen}\phi \Leftrightarrow \Delta v_{24} = \Delta v_{12}\frac{\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}\frac{v_0\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\phi - \cos\phi}$$

b) A aplicação do método do limite superior a soluções de blocos rígidos, não existindo atrito na interface com a ferramenta, determina que a potência necessária à deformação plástica é consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade. Seguindo a metodologia de cálculo estabelecida problemas anteriores, é possível escrever seguinte igualdade entre a potência a fornecida pelo êmbolo de extrusão e a potência consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade, em metade da geometria da operação,

$$p\,H/2\,b\,v_0 = \sum_{i=1}^{3} k\,|\Delta v_i|S_i \tag{6.7.4}$$

O valor das descontinuidades de velocidade, Δv_i, foi determinado em (6.7.3). Torna-se agora necessário determinar a área de cada descontinuidade de velocidade, S_i, em função dos ângulos θ e ϕ da solução, para poder contabilizar a potência consumida nas descontinuidades de velocidade,

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{Hb}{2\operatorname{sen}\phi} \\ S_{23} &= \frac{hb}{2\operatorname{sen}\theta} = \frac{H/R.b}{2\operatorname{sen}\theta} = \frac{Hb}{2R\operatorname{sen}\theta} \\ S_{24} &= \frac{(H-h)b}{2\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{(H-h)b}{\sqrt{2}} = \frac{Hb(R-1)}{\sqrt{2}R} \end{aligned} \tag{6.7.5}$$

Substituindo este resultado no segundo membro do balanço (6.7.4) obtém-se a potência consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade em metade da geometria da operação,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{dt}\right)_{Idv} &= kb(\Delta v_{12}S_{12} + \Delta v_{23}S_{23} + \Delta v_{24}S_{24}) = \\ &= kHb\frac{v_0}{\operatorname{sen}\phi - \cos\phi}\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}\phi} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{1}{2R\operatorname{sen}\theta} + \operatorname{sen}\phi\frac{(R-1)}{R}\right) \end{aligned} \tag{6.7.6}$$

que permite determinar a pressão que é necessário aplicar para realizar a operação de extrusão em função dos ângulos θ e ϕ que caracterizam a solução limite superior proposta,

$$\begin{aligned} p &= k\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi - cos\,\phi}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{R\operatorname{sen}^2\theta} + 2\operatorname{sen}\phi\frac{(R-1)}{R}\right) \\ &= k\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi - cos\,\phi}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi} + \frac{\operatorname{sen}\phi}{R}\left(\operatorname{cotg}^2\theta + 2R - 1\right)\right) \end{aligned} \tag{6.7.7}$$

Através da análise da geometria da solução limite superior proposta é possível estabelecer uma seguinte relação, entre a relação de extrusão, R, e os ângulos θ e ϕ,

$$\begin{cases} \frac{H}{2} - \frac{h}{2} = \overline{AB}\cos\phi + \overline{BC}\cos\theta \\ \overline{AB}\operatorname{sen}\phi = \frac{H}{2} \\ \overline{BC}\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{H}{2} - \frac{h}{2} = \frac{H}{2\operatorname{tg}\phi} + \frac{h}{2\operatorname{tg}\theta} \Leftrightarrow R - 1 = \frac{R}{\operatorname{tg}\phi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \tag{6.7.8}$$

Substituindo este resultado na equação (6.7.7) obtém-se o valor da pressão de extrusão adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade do material, em função do ângulo ϕ,

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{2(\operatorname{sen}\phi - \cos\phi)}\left(\frac{R+1}{\operatorname{sen}\phi} - 2(R-1)\cos\phi\right) \tag{6.7.9}$$

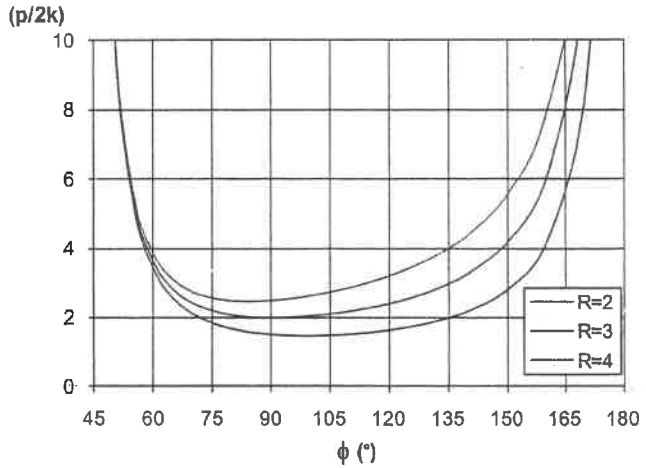
cujo valor mínimo é obtido quando,

$$\operatorname{cotg}\phi = 1 - \frac{2}{\sqrt{R+1}} \tag{6.7.10}$$

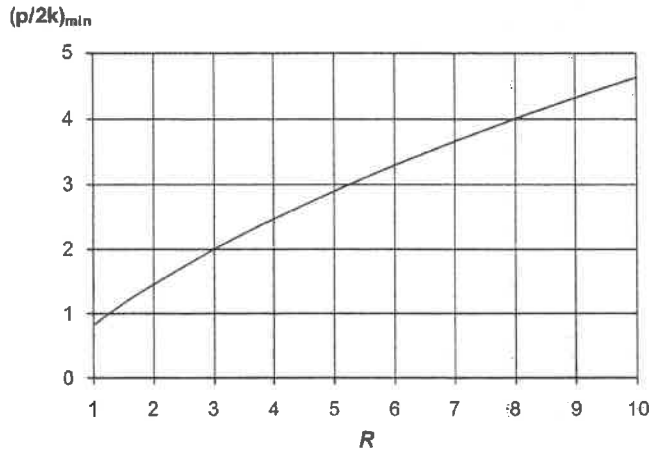
e a que corresponde a seguinte pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material,

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_{min} = 2\left(\sqrt{R+1}-1\right) \qquad (6.7.11)$$

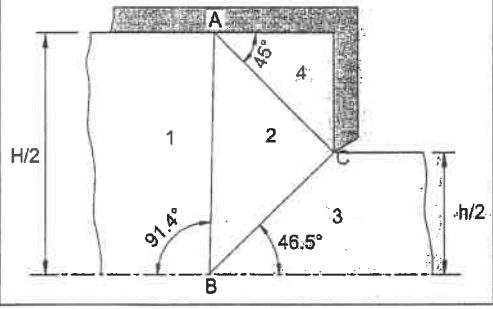
A figura seguinte mostra a variação da pressão de extrusão com o ângulo ϕ da solução limite superior, para três relações de extrusão, dada por (6.7.9). A análise desta figura permite identificar o ângulo ϕ da solução limite superior proposta para o qual ocorre o valor mínimo de pressão de extrusão para cada uma das três relações de extrusão consideradas.

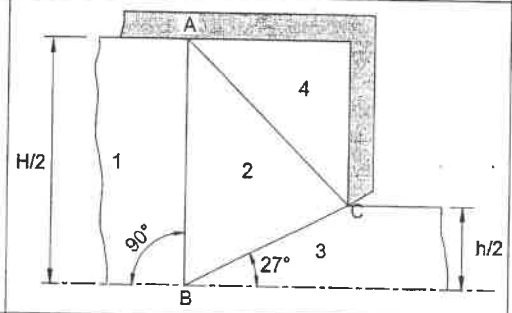
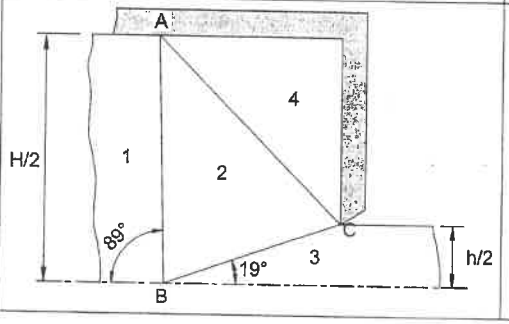


Na figura seguinte apresenta-se a variação da pressão mínima de extrusão, adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade, com a relação de extrusão, R, dada pela equação (6.7.11).



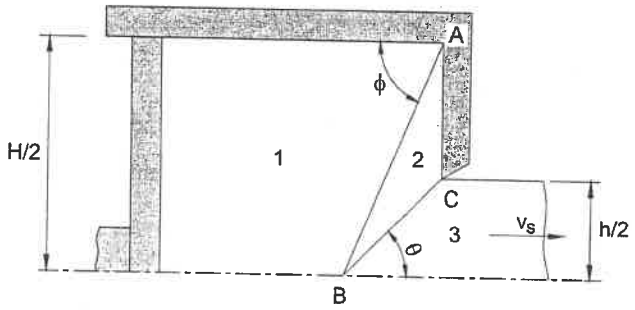
Para melhor se compreender os resultados obtidos, na tabela seguinte encontram-se calculados os valores de ϕ e θ que conduzem à menor pressão de extrusão para três operações com diferentes relações de extrusão, R, bem como o respectivo valor de pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material. Importa referir que os valores mínimos de pressão estão de acordo com a figura anterior onde se ilustra a variação da pressão de extrusão com o ângulo ϕ para as mesmas relações de extrusão.

Relação de extrusão, R	ϕ (°)	θ (°)	Solução limite superior que conduz ao valor de pressão de extrusão mínima	$\left(\frac{p}{2k}\right)_{min}$
2	91.4	46.5		1.46

Relação de extrusão, R	ϕ (°)	θ (°)	Solução limite superior que conduz ao valor de pressão de extrusão mínima	$\left(\frac{p}{2k}\right)_{min}$
3	90	26.6		2.0
4	88.5	19		2.47

Problema 6.8

Considere a operação de extrusão com matrizes direitas, sem atrito, em condições de deformação plana, sem formação de zona morta, representada na figura seguinte.



Para a solução limite superior proposta determine:

a) Uma expressão que permita relacionar a relação de extrusão R com os ângulos θ e ϕ que determinam a geometria da solução limite superior.

b) O campo de velocidades e proceda à sua representação no hodógrafo.

c) O valor mínimo da pressão, adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade $2k$, necessário à realização da operação de extrusão.

Resolução

a) A análise da geometria da solução limite superior proposta permite estabelecer a seguinte igualdade entre a relação de extrusão, R, e os ângulos θ e ϕ.

$$R = \frac{H}{h} = \frac{\operatorname{tg}\phi}{\operatorname{tg}\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\phi = R \operatorname{tg}\theta \tag{6.8.1}$$

b) A solução limite superior apresentada considera que a região em deformação plástica (zona 2) é definida por um triângulo rígido com velocidade constante delimitado por duas linhas de descontinuidade de velocidade que o separam das zonas rígidas de entrada (zona 1) e de saída (zona 3). A geometria do triângulo é definida através dos ângulos θ e

ϕ representados na figura seguinte do lado esquerdo, onde se ilustra o campo de velocidades representado através de uma linha de fluxo.

Para construir o hodógrafo sabe-se que a incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos impõe que,

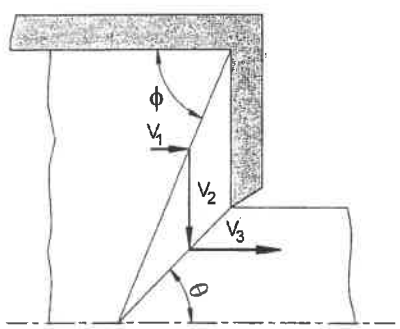
$$v_0 H/2b = v_s h/2b \quad \Leftrightarrow \quad v_s = v_0 R \tag{6.8.2}$$

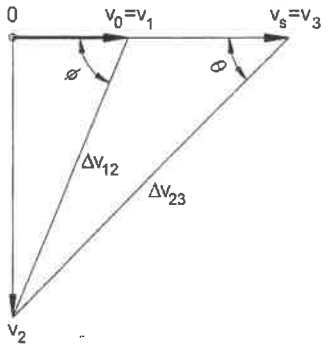
em que R é a relação de extrusão e b é a largura do componente na direcção perpendicular ao plano da figura anterior.

A cinemática do problema determina então que as velocidades dos blocos rígidos 1 e 3 possam ser expressas em função da velocidade do êmbolo v_0 do seguinte modo,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \\ v_3 &= v_s = R v_0 \\ v_4 &= 0 \end{aligned} \tag{6.8.3}$$

Nestas condições é possível proceder à representação vectorial do campo de velocidades através do hodógrafo que se encontra ilustrado na figura seguinte, do lado direito, tendo presente as propriedades que caracterizam as linhas de descontinuidade de velocidade.





Para determinar completamente o campo de velocidades importa agora calcular os valores das descontinuidades de velocidade em função dos ângulos θ e ϕ, que definem a solução limite superior proposta, através de manipulação trigonométrica ao nível do hodógrafo,

$$\begin{aligned} \Delta v_{12} &= \frac{v_0}{\cos\phi} \\ \Delta v_{23} &= \frac{v_s}{\cos\theta} = \frac{v_0 R}{\cos\theta} \end{aligned} \tag{6.8.4}$$

c) A aplicação do método do limite superior a soluções de blocos rígidos, não existindo atrito na interface com a ferramenta, estabelece que a potência necessária à deformação plástica é consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade. Seguindo a metodologia aplicada nos problemas anteriores, a potência necessária para efectuar a extrusão de metade da geometria determina-se do seguinte modo,

$$p\, H/2b\, v_0 = \sum_{i=1}^{2} k\, |\Delta v_i| S_i \tag{6.8.5}$$

O valor das descontinuidades de velocidade, Δv_i, foi determinado em (6.8.4) torna-se agora necessário determinar a área de cada superfície de descontinuidade de velocidade, S_i,

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{Hb}{2\mathrm{sen}\,\phi} \\ S_{23} &= \frac{hb}{2\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{H/R.b}{2\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{Hb}{2R\,\mathrm{sen}\,\theta} \end{aligned} \tag{6.8.6}$$

Nestas condições o balanço (6.8.5) que permite determinar a potência consumida de metade da geometria da operação, em função dos ângulos θ e ϕ que caracterizam a solução limite superior proposta, pode ser reescrito do seguinte modo,

$$p\,\frac{H}{2}\,b\,v_0 = k\,\frac{v_0}{\cos\phi}\,\frac{Hb}{2\mathrm{sen}\,\phi} + k\,\frac{v_0 R}{\cos\theta}\,\frac{Hb}{2R\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{6.8.7}$$

de onde se obtém o seguinte valor da pressão de extrusão,

$$p = k\,\frac{1}{\mathrm{sen}\,\phi\,\cos\phi} + k\,\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta} \tag{6.8.8}$$

Sabendo que,

$$\frac{1}{\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha + \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} \qquad (6.8.9)$$

a expressão que permite contabilizar a pressão de extrusão (6.8.8) reescreve-se do seguinte modo,

$$p = k\left(\text{tg}\,\phi + \frac{1}{\text{tg}\,\phi}\right) + k\left(\text{tg}\,\theta + \frac{1}{\text{tg}\,\theta}\right) \qquad (6.8.10)$$

Considerando a equação (6.8.1), é ainda possível reescrever a equação anterior e obter a pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, em função da relação de extrusão R e do ângulo θ que caracteriza a solução limite superior proposta,

$$\begin{aligned}\frac{p}{2k} &= \frac{1}{2}\left(R\,\text{tg}\,\theta + \frac{1}{R\,\text{tg}\,\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(\text{tg}\,\theta + \frac{1}{\text{tg}\,\theta}\right) \\ &= \frac{(R+1)}{2}\left(\text{tg}\,\theta + \frac{1}{R\text{tg}\,\theta}\right)\end{aligned} \qquad (6.8.11)$$

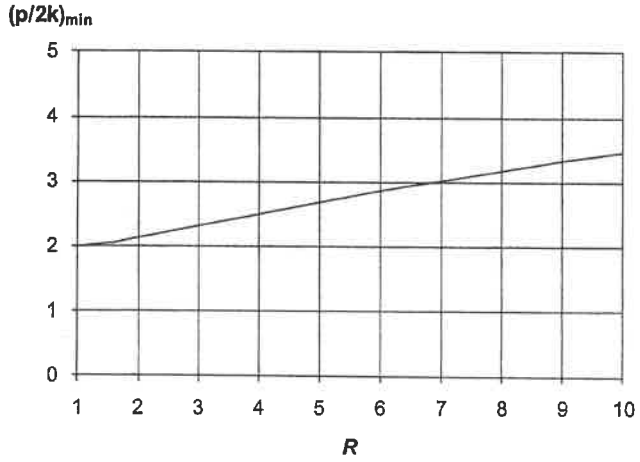
sendo o valor mínimo da pressão de extrusão atingido quando,

$$R = \frac{1}{\text{tg}^2\theta} \qquad (6.8.12)$$

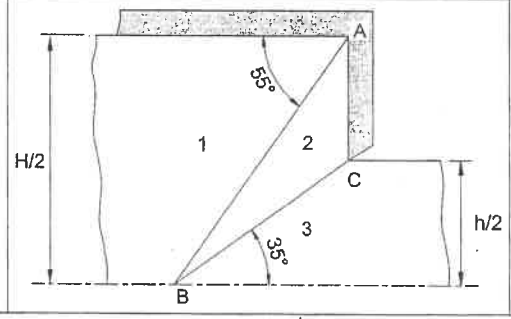
a que corresponde a seguinte pressão de extrusão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, em função da relação de extrusão R,

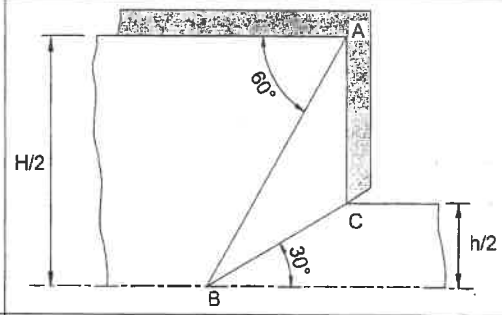
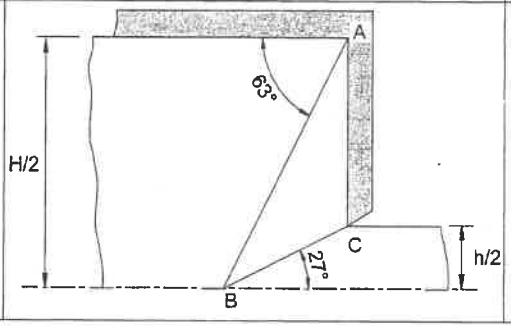
$$\left(\frac{p}{2k}\right)_{min} = \frac{R+1}{\sqrt{R}} \qquad (6.8.13)$$

Na figura seguinte apresenta-se a variação da pressão mínima de extrusão, adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade, com a relação de extrusão, R, dada pela equação anterior (6.8.13).

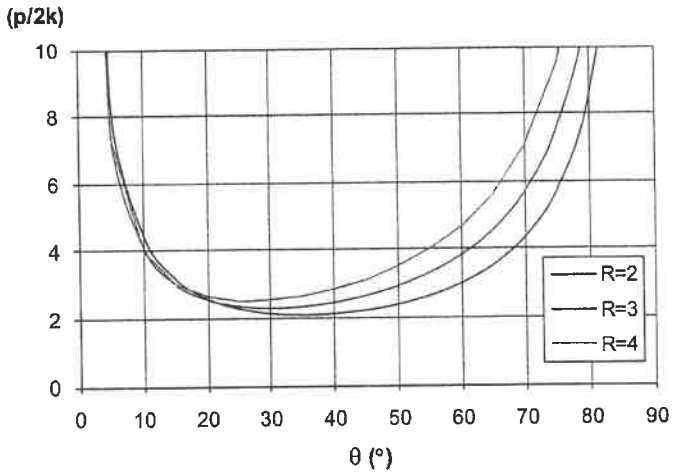


Para melhor se compreender os resultados obtidos, a tabela seguinte apresenta os valores de ϕ e θ que conduzem à menor pressão de extrusão para três operações com diferentes relações de extrusão, R, bem como o respectivo valor de pressão de extrusão adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade do material.

Relação de extrusão, R	ϕ (°)	θ (°)	Solução limite superior que conduz ao valor de pressão de extrusão mínima	$\left(\frac{p}{2k}\right)_{min}$
2	35.3	54.7		2.12

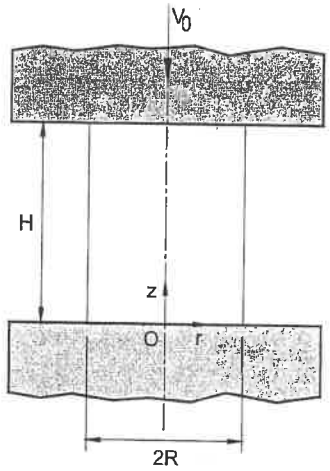
Relação de extrusão, R	ϕ (°)	θ (°)	Solução limite superior que conduz ao valor de pressão de extrusão mínima	$\left(\frac{p}{2k}\right)_{min}$
3	30	60		2.3
4	26.6	63.4		2.5

A figura seguinte mostra a variação da pressão de extrusão com o ângulo θ da solução limite superior (6.8.10), para as três relações de extrusão consideradas na tabela anterior. A análise desta figura permite identificar o ângulo θ da solução limite superior proposta para o qual ocorre o valor mínimo de pressão de extrusão para cada uma das três relações de extrusão consideradas na tabela anterior.



Problema 6.9

Considere a operação de compressão sem atrito de uma pré-forma cilíndrica de raio R e altura H, entre pratos de maior extensão que a peça em condições axissimétricas. A operação realiza-se com o prato compressor superior a movimentar-se com velocidade v_0 como ilustra figura seguinte.



a) Proponha um campo de velocidade contínuo que permita descrever o problema.

b) Determine o campo de velocidades de deformação.

c) Determine o valor da pressão, adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade $2k$, necessário para realizar a operação de compressão.

d) Repita a alínea anterior admitindo que existe atrito máximo entre o material e os pratos compressores. Considere que a tensão de corte devida ao atrito pode ser expressa através do modelo de atrito de Prandtl ($\tau = mk$).

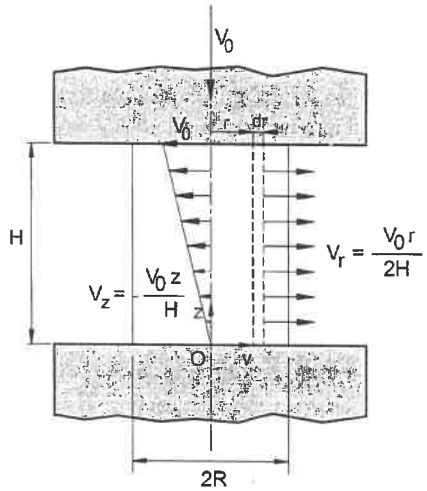
e) Determine a força necessária para realizar a operação em função do factor de atrito na interface com os pratos compressores, m.

Resolução

a) Admitindo que um anel de espessura infinitesimal dr e altura H situado a uma distância radial r da linha de simetria, apresenta deformação homogénea e proporcional à sua distância à linha de simetria na direcção radial, a incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos permite escrever a seguinte igualdade entre os fluxos de material na direcção z e na direcção r,

$$\pi r^2 v_0 = 2\pi r v_r H \Leftrightarrow v_r = \frac{r}{2H} v_0 \qquad (6.9.1)$$

em que v_r é a velocidade radial.



Por outro lado, na direcção axial, a velocidade v_z varia linearmente com a distância z satisfazendo as condições fronteira do problema,

$$\begin{aligned} v_z &= -v_0, \quad z = H \\ v_z &= 0, \quad z = 0 \end{aligned} \qquad (6.9.2)$$

ou seja,

$$v_z = -\frac{z}{H} v_0 \tag{6.9.3}$$

Como na direcção tangencial não há escoamento a velocidade nesta direcção é nula,

$$v_\theta = 0 \tag{6.9.4}$$

Então a cinemática do processo pode ser descrita através do seguinte campo de velocidades,

$$v_r = \frac{r}{2H} v_0 \qquad v_z = -\frac{z}{H} v_0 \qquad v_\theta = 0 \tag{6.9.5}$$

A evolução das componentes radial e axial da velocidade em função da coordenada z encontra-se representada na figura anterior.

b) O campo de velocidades de deformação em coordenadas polares cilíndricas, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, associado a este campo de velocidades determina-se do seguinte modo,

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_r &= \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{v_0}{2H} \\
\dot{\varepsilon}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = \frac{v_0}{2H} \\
\dot{\varepsilon}_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{v_0}{H} \\
\dot{\gamma}_{r\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0 \\
\dot{\gamma}_{rz} &= \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \\
\dot{\gamma}_{\theta z} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0
\end{aligned} \tag{6.9.6}$$

De onde conclui que só existem três componentes não nulas como seria de esperar. De facto, devido ao referencial (r, θ, z) ser o referencial principal, as velocidades de deformação de corte são nulas.

c) O campo de velocidades proposto é contínuo para a totalidade da peça em deformação plástica e não possui superfícies de descontinuidade de velocidade. Como adicionalmente não existe atrito na interface com os pratos compressores, a aplicação do método do limite superior determina que o balanço entre a potência que é fornecida através do prato compressor superior e a potência necessária à deformação plástica do material se efectue do seguinte modo,

$$p\,\pi R^2\, v_0 = \int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\, dV \tag{6.9.7}$$

em que p é a pressão de compressão. O segundo membro da equação anterior pode ser reescrito em função dos valores efectivos de tensão $\overline{\sigma}$ e velocidade de deformação $\dot{\overline{\varepsilon}}$ obtendo-se a seguinte equação,

$$p\,\pi R^2\, v_0 = \int_V \overline{\sigma}\,\dot{\overline{\varepsilon}}\, dV \tag{6.9.8}$$

Torna-se então necessário calcular o valor da tensão efectiva tendo presente que a peça está sujeita a um estado de tensão uniaxial,

$$\begin{aligned}
&\sigma_r = \sigma_\theta = 0 \qquad \sigma_2 = \sigma_z = -2k \\
&\overline{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2} = 2k
\end{aligned} \tag{6.9.9}$$

e da velocidade de deformação efectiva a partir do campo de velocidades de deformação determinado em (6.9.6),

$$\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{v_0}{2H} \qquad \dot{\varepsilon}_z = -\frac{v_0}{H} \\
&\dot{\overline{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta)^2 + (\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_z)^2} = \frac{v_0}{H}
\end{aligned} \tag{6.9.10}$$

Substituindo estes resultados na equação (6.9.8) obtém-se o valor da pressão de compressão adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade $2k$,

$$\frac{p}{2k} = 1 \tag{6.9.11}$$

Este resultado é igual ao valor exacto e não deve levantar qualquer tipo de surpresa, uma vez que a ausência de atrito e de encruamento determina que o campo de tensões seja uniforme no interior da peça em deformação plástica. Quer isto dizer que as condições estáticas deste problema são de tal modo particulares que é possível obter coincidência integral entre a solução cinematicamente admissível e a solução completa.

d) Existindo atrito na interface com os pratos compressores a aplicação do método do limite superior determina que no balanço de potências (6.9.7) seja contabilizada a potência consumida por atrito acrescentando essa contribuição ao segundo membro da referida equação. Sendo a tensão de corte devida ao atrito dada por $\tau_a = mk$, a potência consumida por atrito na interface com os pratos compressores determina-se do seguinte modo,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_a = 2\times\int_{S_a}\tau_a|\Delta v|dS \qquad (6.9.12)$$

em que $|\Delta v|$ representa a velocidade relativa de escorregamento na superfície S_a de interface entre o material e o prato compressor. Uma vez que a velocidade relativa de escorregamento do material nos pratos compressores corresponde à componente radial do campo de velocidades proposto, substituindo a velocidade radial da equação (6.9.1) na equação anterior obtém-se o seguinte valor para a potência consumida por atrito,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_a = 2\times\int_0^R mk\frac{r}{2H}v_0\,2\pi r\,dr = 2mk\pi\frac{R^3}{3H}v_0 \qquad (6.9.13)$$

Deste modo a potência fornecida através do prato compressor superior obtém-se adicionando esta parcela relativa ao atrito à potência necessária à deformação plástica do material e o balanço de potências (6.9.8) reescreve-se do seguinte modo,

$$p\,\pi R^2\,v_0 = 2k\frac{v_0}{H}\pi R^2 H + 2mk\pi\frac{R^3}{3H}v_0 \qquad (6.9.14)$$

Este balanço permite obter a seguinte estimativa de pressão adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade do material, em função do factor de atrito, m,

$$\frac{p}{2k} = 1 + m\frac{R}{3H} \qquad (6.9.15)$$

que em condições de atrito máximo, $m = 1$, vale,

$$\frac{p}{2k} = 1 + \frac{R}{3H} \qquad (6.9.16)$$

É interessante comparar este resultado com os resultados obtidos anteriormente através da aplicação do método da fatia elementar no problema 4.2, em condições de atrito máximo. Esta comparação permite concluir que existe equivalência entre o valor de pressão determinado na equação (6.9.16) e o valor médio de pressão calculado através do método da fatia elementar (4.2.12). Este facto resulta da existência de atrito sobre a interface de contacto entre o material e a ferramenta não ter sido acompanhada de uma modificação ao nível do campo de velocidades, o que correspondeu a admitir-se que a deformação do material era homogénea e que não existia efeito de barril. Importa ainda salientar que a distribuição da pressão aplicada nos pratos compressores apenas pode ser determinada através do método da fatia elementar (4.2.9), já que apenas este método entra em consideração com o equilíbrio estático resultante das tensões aplicadas na peça e na ferramenta.

e) A força necessária a cada instante da operação de compressão calcula-se através do produto entre a pressão determinada na equação (6.9.15) e a área de contacto entre a pré-forma cilíndrica e a ferramenta, A, no respectivo instante,

$$F = p\times A \cong 2k\,\pi R^2\left(1 + m\frac{R}{3H}\right) \qquad (6.9.17)$$

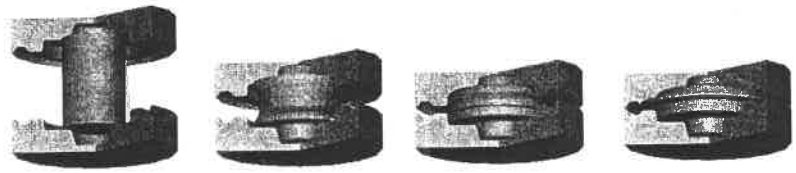
Importa referir que os cálculos anteriormente apresentados não consideraram a existência de encruamento durante a deformação plástica do componente, de acordo com os requisitos teóricos e as hipóteses simplificativas exigidas pelo teorema do limite superior. No entanto, caso o material apresente um comportamento rígido-plástico, é possível contabilizar o encruamento substituindo, nas equações anteriores, a tensão limite de elasticidade $2k$ pela respectiva tensão efectiva, $\overline{\sigma}$, a cada instante.

7. FORJAMENTO

Este capítulo apresenta um conjunto de problemas sobre forjamento e tecnologias afins que fazem intervir conceitos básicos da teoria da plasticidade e dos métodos de análise de processos de deformação plástica que foram abordados em capítulos anteriores.

Problema 7.1

Considere a operação de forjamento em matriz fechada, a quente (1000° C), de uma flange que se encontra representada na figura.



A pré-forma utilizada no fabrico da flange consiste num cilindro de aço AISI 1045 com 25 mm de diâmetro e 35 mm de altura.

a) Determine a força necessária para forjar a flange numa prensa hidráulica com uma velocidade de actuação constante $v = 10$ mm/s considerando que a área projectada da flange pode ser aproximada através de um círculo com 50 mm de diâmetro. Admita que $Q_p = 3$.

b) Determine a potência exigida à prensa no instante final da operação.

c) Determine o tempo necessário para forjar uma peça.

Lei de comportamento mecânico do aço AISI 1045 a 1000°C: $\overline{\sigma} = 244\ \dot{\overline{\varepsilon}}^{0.082}$ MPa.

Resolução

a) O cálculo de componentes forjados em matriz fechada de acordo com o método da energia uniforme exige a determinação da forma elementar cilíndrica equivalente. Considerando a conservação de volume durante a operação de forjamento a altura média da peça h_m no final da operação obtém-se da forma a seguir indicada,

$$V = 35 \times \frac{\pi \times 25^2}{4} = 17180.6 \text{ mm}^3$$
$$A_p = \frac{\pi \times 50^2}{4} = 1963.5 \text{ mm}^2 \quad \Rightarrow \quad h_m = \frac{V}{A_p} = \frac{17180.6}{1963.5} = 8.75 \text{ mm} \qquad (7.1.1)$$

em que A_p é a área projectada da flange no final da operação de forjamento (incluindo a rebarba).

A determinação da tensão efectiva no interior do componente faz-se através da lei de comportamento mecânico do material à temperatura de fabrico. Como se trata de uma operação a quente, é necessário conhecer a velocidade de deformação média no final da operação,

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_m = \frac{v}{h_m} = \frac{10}{8.75} = 1.14 \text{ s}^{-1} \qquad (7.1.2)$$

obtendo-se o seguinte valor de tensão efectiva no interior da flange no final da operação,

$$\bar{\sigma} = 244 \times (1.14)^{0.082} = 246.64 \text{ MPa} \qquad (7.1.3)$$

A pressão média p_{med} que é aplicada pela matriz superior calcula-se corrigindo o valor da tensão efectiva $\bar{\sigma}$ no interior da flange por intermédio do factor Q_p,

$$p_{med} = Q_p \bar{\sigma} = 3 \times 246.64 = 739.9 \text{ MPa} \qquad (7.1.4)$$

e a força necessária para forjar a peça calcula-se multiplicando a pressão média pela área projectada da flange no final da operação, obtendo-se,

$$F = p_{med} A_p = 739.9 \times 1963.5 = 1452.8 \text{ kN} \qquad (7.1.5)$$

b) A potência exigida à prensa no final da operação determina-se multiplicando a força de forjamento (7.1.5) pela velocidade de actuação da prensa no instante correspondente, obtendo-se,

$$P = F_{max} v = 1452.8 \times 10 \times 10^{-3} = 14.5 \text{ kW} \qquad (7.1.6)$$

c) O tempo necessário para forjar a peça obtém-se a partir da velocidade da matriz superior e do espaço que ela percorre durante o forjamento, obtendo-se,

$$t = \frac{h_0 - h_m}{v} = \frac{35 - 8.75}{10} = \frac{26.25}{10} \cong 2.6 \text{ s} \qquad (7.1.7)$$

Importa referir que este tempo não corresponde ao valor real em virtude de ter sido calculado com a forma elementar cilíndrica equivalente e não com a geometria real da flange. Na realidade o deslocamento que a matriz tem que fazer para forjar a peça é inferior a 26.25 mm e, portanto, o tempo necessário para realizar a operação é inferior ao valor calculado em (7.1.7).

Problema 7.2

Considere a compressão uniaxial sem atrito de uma pré-forma cilíndrica num martelo de queda por gravidade.

a) Estabeleça a relação entre a altura mínima a que se consegue deformar a pré-forma e a velocidade do martelo de queda no instante do impacto, admitindo que o material tem um comportamento rígido-perfeitamente plástico.

b) Admita que a pré-forma cilíndrica tem 50 mm de diâmetro e 50 mm de altura e que o martelo de queda tem uma massa de 2000 kg, uma altura de queda de 1.9 m e eficiências na queda e no impacto respectivamente iguais a $\eta_q = 70\%$ e $\eta_{imp} = 80\%$. Determine se é possível efectuar a operação de compressão unixial sem atrito de modo a reduzir a altura da pré-forma cilíndrica de 50 mm para 20 mm.

Na resolução da alínea b) admita que o comportamento mecânico do material é expresso por intermédio da seguinte relação tensão-extensão, $\overline{\sigma} = 130\ \overline{\varepsilon}^{0.12}$ MPa

Resolução

a) Em condições ideais, a energia total W do martelo de queda no instante do impacto é integralmente utilizada na compressão uniaxial sem atrito da pré-forma cilíndrica com comportamento rígido-perfeitamente plástico, obtendo-se,

$$W = V \int_0^{\overline{\varepsilon}} \overline{\sigma}\, d\overline{\varepsilon} = V\, \sigma_e \ln \frac{h_0}{h} \qquad (7.2.1)$$

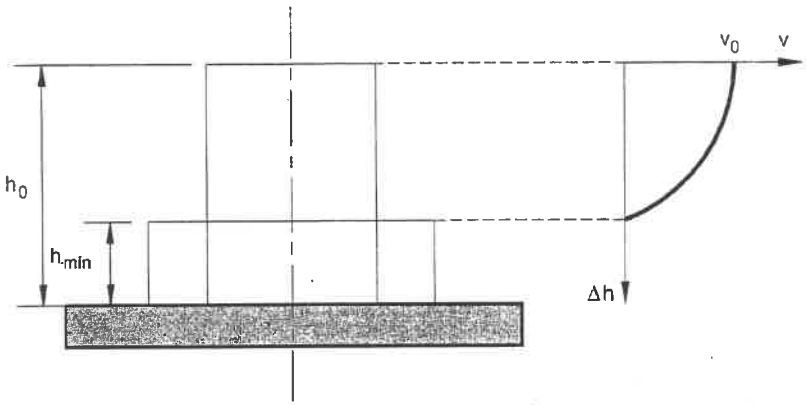
em que V é o volume da pré-forma, σ_e é a tensão limite de elasticidade e h_0 e h são, respectivamente, a altura inicial e a altura instantânea da pré-forma.

A energia cinética fornecida pelo martelo de queda até um determinado instante da deformação da pré-forma (correspondente a uma altura genérica h) é contabilizada em função da massa m do martelo, da sua velocidade v_0 no instante de impacto com a pré-forma e da sua velocidade instantânea v no instante em que a pré-forma cilíndrica tem uma altura h, através de,

$$W = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - v^2 \right). \qquad (7.2.2)$$

Igualando as expressões (7.2.1) e (7.2.2) obtém-se uma equação que permite calcular a velocidade instantânea v do martelo de queda em função da altura h do componente, (ver figura abaixo),

$$\frac{1}{2} m \left(v_0^2 - v^2 \right) = V\, \sigma_e \ln \frac{h_0}{h} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2V\sigma_e}{m} \ln \frac{h}{h_0}} \qquad (7.2.3)$$



Nestas condições, a altura mínima h_{min} até à qual se consegue deformar a pré-forma é aquela que corresponde à imobilização do martelo de queda ($v = 0$) ou seja, a que corresponde à situação em que toda a energia cinética do martelo no instante do impacto tenha sido utilizada na deformação plástica do material,

$$h_{min} = \exp\left(\ln h_0 - \frac{m}{2V\sigma_e} v_0^2 \right) \qquad (7.2.4)$$

b) Durante a queda da massa do martelo a sua energia potencial transforma-se em energia cinética mas, uma vez que existem perdas por atrito nas guias do martelo, a determinação da velocidade v_0 do martelo no instante do impacto efectua-se recorrendo a uma igualdade de energias que contabilize o valor da eficiência na queda,

$$\eta_q \times mgH = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{7.2.5}$$

Substituindo os dados do martelo de queda na expressão anterior, obtém-se a velocidade v_0 no instante do impacto,

$$v_0 = \sqrt{\eta_q \times 2gH} = \sqrt{0.7 \times 2 \times 9.8 \times 1.9} = 5.1 \text{ m/s} \tag{7.2.6}$$

Do ponto de vista energético, nem toda a energia do martelo no instante do impacto é utilizada na deformação plástica da pré-forma em virtude de também no impacto existirem perdas. Considerando a eficiência do martelo de queda no impacto η_{imp} a energia útil disponível para a compressão vale,

$$W_u = \eta_{imp} \times \frac{1}{2} m v_0^2 = 0.8 \times 0.5 \times 2000 \times 5.45^2 = 20808 \text{ N.m} \tag{7.2.7}$$

Quando a altura da pré-forma $h = 20$ mm a extensão efectiva (ou axial) que é alcançada no material em condições de deformação plástica uniforme vale,

$$\bar{\varepsilon} = \ln\left(\frac{h_0}{h}\right) = \ln\left(\frac{50}{20}\right) = 0.912 \tag{7.2.8}$$

e a energia necessária realizar a deformação plástica W_i obtém-se considerando o volume da peça V e o trabalho plástico por unidade de volume para a realizar w_i,

$$W_i = V \times w_i = 50 \times \pi \times \frac{50^2}{4} \times \int_0^{0.912} 130\, \bar{\varepsilon}^{0.12} d\bar{\varepsilon} = 10279 \text{ N.m} \tag{7.2.9}$$

Nestas condições pode-se concluir que o martelo de queda pode realizar a compressão da pré-forma uma vez que a energia necessária para realizar a deformação plástica W_i é inferior à energia útil do martelo de queda W_u,

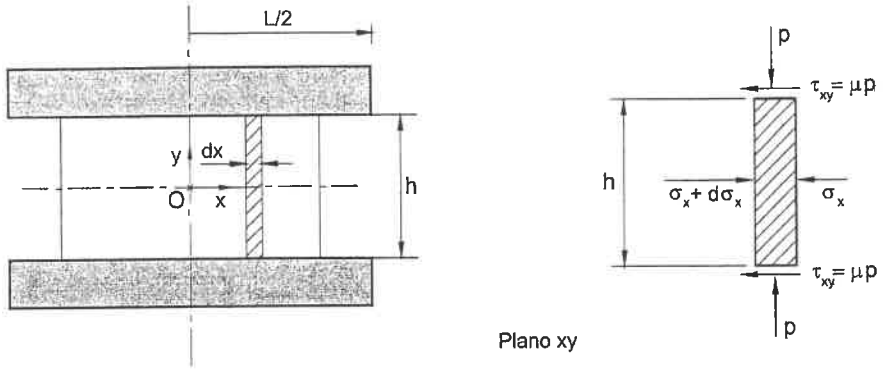
$$W_u - W_i = 20808 - 10279 = 10529 \text{ N.m} \tag{7.2.10}$$

O remanescente de energia é utilizado no ricochete do martelo e a altura que o martelo atinge após o ricochete obtém-se entrando em consideração com as perdas por atrito nas guias e com a noção de conservação de volume,

$$\eta_q \times (W_u - W_i) = mgh_{ricochete} \Leftrightarrow 0.8 \times 10529 = 2000 \times 9.8 \times h_{ricochete}$$
$$h_{ricochete} \cong 0.43 \text{ m} \tag{7.2.11}$$

Problema 7.3

Considere a operação de compressão em condições de deformação plástica plana da barra de secção rectangular que se encontra representada na figura.



a) Determine a distância x_0 à linha de simetria para a qual as condições de atrito passam de atrito máximo a atrito com escorregamento.

b) Estabeleça a pressão normal de contacto nas zonas de atrito máximo e de atrito com escorregamento.

c) Resolva as alíneas a) e b) admitindo que a barra possui uma secção rectangular com 10 mm de altura e 100 mm de largura, que a lei de comportamento do material pode ser aproximada por intermédio de um modelo rígido-perfeitamente plástico em que $\sigma_e = 100$ MPa e que o coeficiente de atrito $\mu = 0.25$.

d) Calcule a pressão média nas condições da alínea c).

Resolução

a) A condição de deformação plástica plana estabelece que a largura w da barra de secção rectangular permanece constante durante a totalidade da operação de compressão e que a tensão segundo esta direcção é principal $\sigma_z = \sigma_2$.

Admitindo que a tensão σ_x não varia ao longo dos planos perpendiculares à direcção de escoamento do material, qualquer modificação do valor desta tensão apenas poderá ser efectuada ao longo da direcção longitudinal x. Considerando o equilíbrio de forças na direcção longitudinal chega-se à seguinte equação diferencial,

$$(\sigma_x + d\sigma_x)hw - 2\tau_{xy}\,wdx - \sigma_x\,hw = 0 \qquad (7.3.1)$$

O efeito do atrito na interface de contacto entre o material e a ferramenta está contemplado por intermédio da tensão de corte $\tau_{xy} = \mu p$. Substituindo o valor da tensão de corte na equação (7.3.1) e eliminando a variável w obtém-se,

$$(\sigma_x + d\sigma_x)h - 2\mu p\,dx - \sigma_x\,h = 0 \qquad (7.3.2)$$

Admitindo que x e y são direcções principais e que σ_x e σ_y são tensões principais cujo valor se mantém constante no plano da fatia elementar, pode-se aplicar o critério de plasticidade de Tresca,

$$\sigma_x = \sigma_1 \qquad \sigma_y = -p = \sigma_3$$
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_x + p = 2k \qquad (7.3.3)$$

para obter a relação $d\sigma_x = -dp$ que, uma vez substituída na equação diferencial (7.3.2), permite eliminar uma das variáveis transformando-a numa forma diferencial de variáveis separáveis,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\mu}{h}dx \qquad (7.3.4)$$

A integração da equação (7.3.4) seguida pela substituição da condição de fronteira $x = L/2,\ p = 2k$ permite obter a distribuição de pressão normal na interface de contacto entre a barra e a ferramenta na metade correspondente aos valores $x = 0$ e $x = L/2$,

$$p = 2k\,\exp\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] \qquad (7.3.5)$$

Quando o coeficiente de atrito μ é elevado podem estar reunidas as condições para o desenvolvimento de dois tipos de regiões distintas na interface de contacto entre o material e a ferramenta; uma região junto à linha de simetria em que o atrito é máximo $\tau_{xy} = k$ e outra região na periferia da superfície em que o atrito permite o escorregamento do material $\tau_{xy} < k$.

Como a tensão de corte originada pelo atrito τ_{xy} pode ser expressa em função da pressão normal p e do coeficiente de atrito μ da forma a seguir indicada,

$$\tau_{xy} = \mu p = 2k\mu \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2}-x\right)\right]} \tag{7.3.6}$$

conclui-se que distância x_0 de transição entre as duas regiões de atrito na interface de contacto entre a barra e a ferramenta, vale,

$$\left(\tau_{xy}\right)_{max} = 2k\mu \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2}-x_0\right)\right]} = k \quad \Leftrightarrow \quad \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2}-x_0\right)\right]} = \frac{1}{2\mu}$$

$$x_0 = \frac{L}{2} - \frac{h}{2\mu} \ln\frac{1}{2\mu} \tag{7.3.7}$$

A tensão de corte devida ao atrito é máxima $\tau_{xy} = k$ na região $0 \le x \le x_0$ e igual a $\tau_{xy} = \mu p$ na periferia $x_0 \le x \le L/2$ da superfície de contacto da barra com a ferramenta.

b) A resolução desta alínea exige o conhecimento da distribuição de pressão normal em função da distância longitudinal x para a situação de atrito máximo. Para tal procede-se à alteração da equação (7.3.1) por substituição de $\tau_{xy} = k$,

$$(\sigma_x + d\sigma_x)hw - kw\,dx - \sigma_x\,h\,w = 0 \tag{7.3.8}$$

Seguindo um procedimento análogo ao da alínea a) obtém-se,

$$hp = -2kx + C \tag{7.3.9}$$

o qual, após substituição da condição de fronteira,

$$x = x_0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \mu p = k \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{k}{\mu} \tag{7.3.10}$$

na expressão (7.3.9), permite obter

$$C = h\frac{k}{\mu} + 2kx_0 \tag{7.3.11}$$

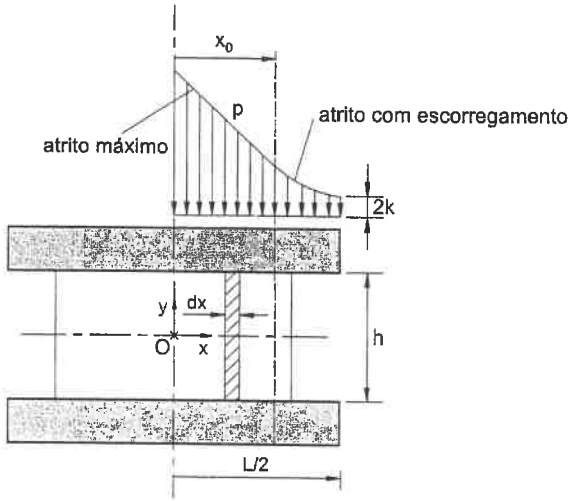
e, finalmente,

$$p = \frac{2k}{h}(x_0 - x) + \frac{k}{\mu} \tag{7.3.12}$$

Como a resolução da alínea a) permitiu identificar duas regiões de atrito distintas na interface de contacto entre o material e a ferramenta, a distribuição de pressão normal é expressa por intermédio da condição,

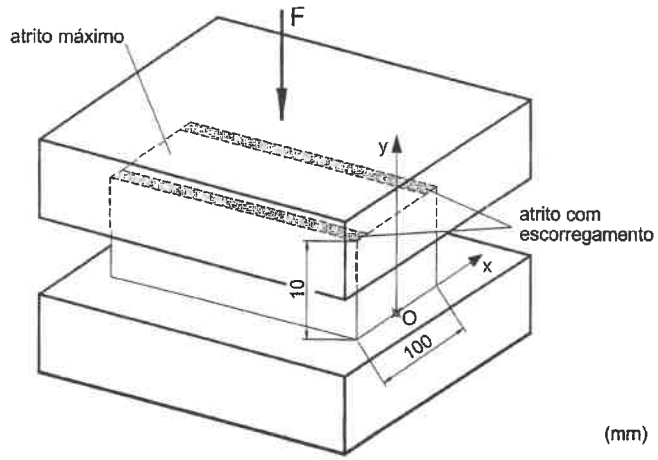
$$p = \begin{cases} 2k \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2}-x\right)\right]} & \text{quando} \quad x_0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{h}(x_0 - x) + \frac{k}{\mu} & \text{quando} \quad 0 \le x \le x_0 \end{cases} \tag{7.3.13}$$

Esta distribuição de pressão normal é simétrica em relação ao eixo y sendo a expressão matemática anterior apenas válida para o domínio longitudinal $0 \le x \le L/2$.



c) A distância x_0 correspondente à transição entre atrito máximo e atrito com escorregamento obtém-se por substituição na equação (7.3.7) dos dados de natureza geométrica e de atrito que constam do enunciado do problema,

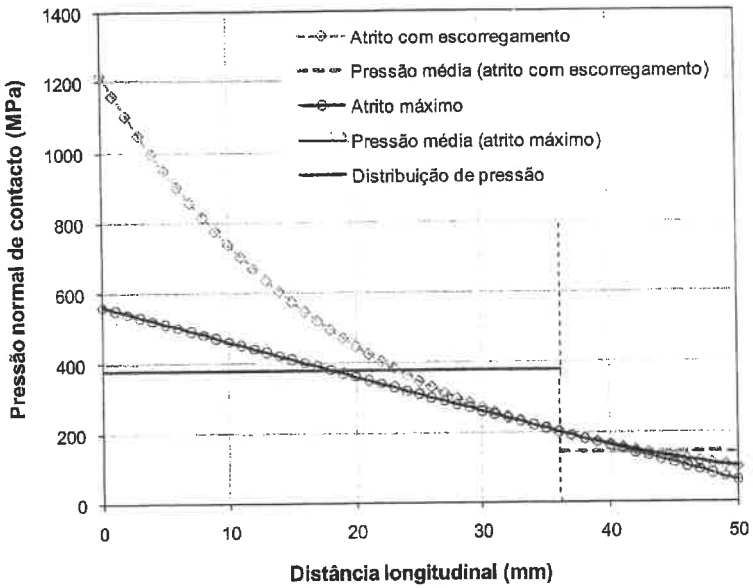
$$x_0 = \frac{L}{2} - \frac{h}{2\mu}\ln\frac{1}{2\mu} = \frac{100}{2} - \frac{10}{2\times 0.25}\ln\frac{1}{2\times 0.25} = 36.14 \text{ mm} \qquad (7.3.14)$$



A distribuição de pressão normal (MPa) é simétrica em relação ao eixo y e obtém-se substituindo a totalidade dos dados que constam do enunciado do problema e a distância x_0 calculada em (7.3.14) na equação (7.3.13),

$$p = \begin{cases} 100\times \exp^{[0.05\,(50-x)]} & \text{quando} \quad 36.14 \le x \le 50 \\ 10\times(36.14 - x) + 200 & \text{quando} \quad 0 \le x \le 36.14 \end{cases} \qquad (7.3.15)$$

A figura seguinte compara a distribuição de pressão resultante da equação (7.3.15) com as distribuições de pressão que se obtêm no caso de considerar escorregamento ou atrito máximo na totalidade da superfície de contacto da barra com a ferramenta de compressão. O resultado obtido permite concluir que a utilização da distribuição pressão normal fornecida por intermédio da equação (7.3.5) pode conduzir a estimativas muito exageradas da pressão de contacto na região da superfície da peça adjacente à linha de simetria.



d) A pressão média num troço longitudinal $x_a \le x \le x_b$ calcula-se da forma a seguir indicada,

$$p_{media} = \frac{\int_{x_a}^{x_b} p\,dx}{(x_b - x_a)} \qquad (7.3.16)$$

Na região com atrito máximo a pressão média determina-se a partir da distribuição de pressão normal fornecida pela expressão (7.3.12), obtendo-se,

$$p_{media} = \frac{\int_0^{x_0}\left(\frac{2k}{h}(x_0 - x) + \frac{k}{\mu}\right)dx}{x_0 - 0} = \frac{k}{\mu} + \frac{k}{h}x_0 \qquad (7.3.17)$$

$$= \frac{50}{0.25} + \frac{50}{10}\times 36.14 = 380.7 \text{ MPa}$$

Na região com atrito de Amonton-Coulomb a pressão média determina-se a partir da distribuição de pressão normal fornecida pela expressão (7.3.5), obtendo-se,

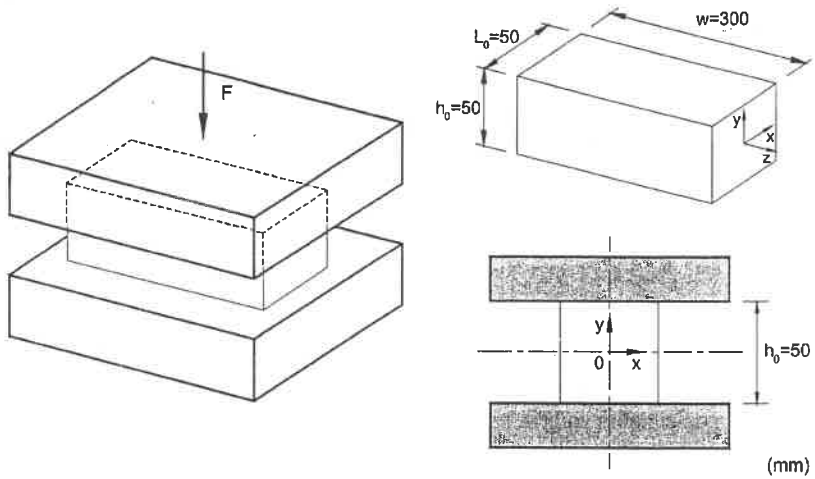
$$p_{media} = \frac{\int_{x_0}^{\frac{L}{2}} \left(2k \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2}-x\right)\right]} \right) dx}{\frac{L}{2}-x_0} = \frac{k\,h}{\mu\left(\frac{L}{2}-x_0\right)} \left[\exp^{\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{L}{2}-x_0\right)\right]} - 1 \right] \qquad (7.3.18)$$

$$= \frac{50 \times 10}{0.25 \times (50 - 36.14)} \left[\exp^{\left[\frac{2 \times 0.25}{10}(50-36.14)\right]} - 1 \right] = 144.3 \text{ MPa}$$

A força de compressão pode ser obtida multiplicando cada valor de pressão média pela área da região correspondente.

Problema 7.4

Considere a operação de compressão entre pratos de maior extensão que a peça em condições de deformação plástica plana da barra de secção quadrada com 50 mm de lado e 300 mm de comprimento que se encontra representada na figura.



a) Obtenha o valor máximo da pressão de contacto com os pratos compressores, p_{max} no início da deformação plástica da barra para duas situações de atrito extremas; atrito nulo e atrito máximo ($\tau = k$).

b) Calcule o valor da força de compressão que é necessário aplicar para dar início à deformação plástica da barra para as duas situações de atrito da alínea a).

c) Calcule o valor da força de compressão que é necessário aplicar no instante correspondente a 50% de redução em altura da barra para o caso em que o atrito é máximo ($\tau = k$).

Admita que a lei de comportamento tensão-extensão do material da barra pode ser aproximada por intermédio de um modelo rígido-perfeitamente plástico em que $\sigma_e = 100$ MPa.

Resolução

a) No Capítulo 4 procedeu-se à análise da compressão entre pratos de maior extensão que a peça em condições de deformação plástica plana.

Quando não existe atrito na interface de contacto entre a barra e os pratos de compressão a distribuição de pressão é uniforme $p = 2k$ e, portanto, o valor máximo da pressão p_{max} no início da deformação plástica coincide com o valor uniforme da distribuição de pressão,

$$p_{max} = 2k = 100 \text{ MPa} \tag{7.4.1}$$

Quando o atrito na interface de contacto é máximo ($\tau = k$) a distribuição de pressão obtém-se por intermédio da aplicação do método da fatia elementar (substituindo a condição de fronteira $x = L/2$, $p = 2k$ na equação (7.3.9) do problema anterior),

$$p = 2k\left[1 + \frac{1}{h}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] \tag{7.4.2}$$

em que x é a distância longitudinal ao centro da peça. O valor máximo da pressão de contacto p_{max} com os pratos compressores no início da deformação plástica da barra ocorre na linha de simetria vertical da ferramenta ou seja, na posição $x = 0$.

$$p_{max} = 2k\left(1 + \frac{L_0}{2h_0}\right) = 100 \times \left(1 + \frac{50}{2 \times 50}\right) = 150 \text{ MPa} \tag{7.4.3}$$

b) A força de compressão que é necessário aplicar para dar início à deformação plástica da barra obtém-se multiplicando a pressão média pela área de contacto com os pratos compressores.

No caso em que não existe atrito na interface de contacto entre a barra e os pratos de compressão a pressão média coincide com a distribuição uniforme de pressão $p_{media} = 2k$ e, portanto, a força de compressão vale,

$$p_{media} = 2k = 100 \text{ MPa}$$
$$F = p_{media}\, L_0\, w = 100 \times 50 \times 300 = 1500 \text{ kN} \tag{7.4.4}$$

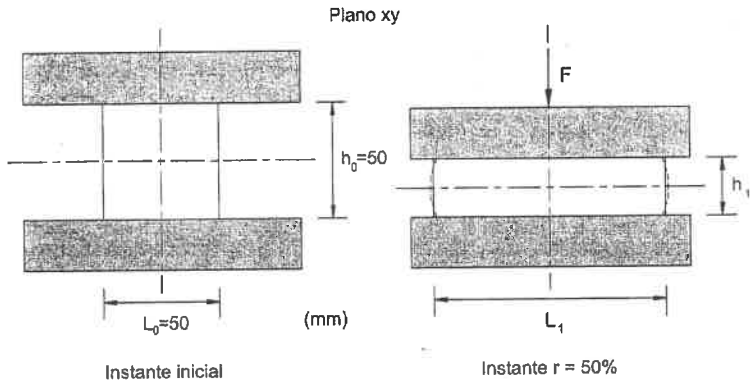
No caso em que o atrito é máximo a pressão média $p_{media} = (p_{max} + 2k)/2$ e a força de compressão é obtida da forma a seguir indicada,

$$p_{media} = 2k\left(1 + \frac{L_0}{4h_0}\right) = 100 \times \left(1 + \frac{50}{4 \times 50}\right) = 125 \text{ MPa} \tag{7.4.5}$$
$$F = p_{media}\, L_0\, w = 125 \times 50 \times 300 = 1875 \text{ kN}$$

c) Para determinar o valor da força de compressão no instante de deformação correspondente a 50% de redução em altura da barra é preciso conhecer a geometria da barra nesse instante.

Admitindo que a deformação é homogénea, o que de facto não é verdade porque a existência de atrito máximo ($\tau = k$) na interface de contacto entre a barra e os pratos compressores faz com que a material adjacente ao prato fique impedido de se movimentar, começa-se por calcular a altura final da barra h_1 após uma redução em altura $r = 50\%$,

$$r = \frac{h_0 - h_1}{h_0} \quad \Leftrightarrow \quad 0.5 = \frac{50 - h_1}{50} \tag{7.4.6}$$
$$h_1 = (1 - 0.5) \times 50 = 25 \text{ mm}$$



Atendendo à condição de incompressibilidade e à hipótese simplificativa da deformação plástica ser plana ou seja, do comprimento w da barra permanecer constante durante a deformação plástica, a largura final após 50% de redução em altura vale,

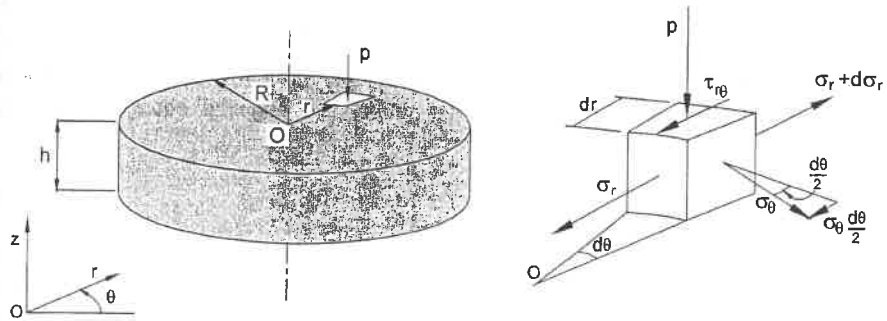
$$L \times h = Cte. \Rightarrow L_0 \times h_0 = L_1 \times h_1$$
$$50 \times 50 = L_1 \times 25 \Leftrightarrow L_1 = 100 \text{ mm} \quad (7.4.7)$$

Nestas condições o cálculo da força de compressão que é necessário aplicar no instante correspondente a 50% de redução em altura da barra efectua-se por intermédio de um procedimento análogo ao que tinha sido efectuado na alínea b), obtendo-se,

$$(p_{media})_1 = 2k\left(1+\frac{L_1}{4h_1}\right) = 100 \times \left(1+\frac{100}{4\times 25}\right) = 200 \text{ MPa} \quad (7.4.8)$$
$$F = (p_{media})_1 \, L_1 \, w = 200 \times 100 \times 300 = 6000 \text{ kN}$$

Problema 7.5

Considere a operação de compressão uniaxial da pré-forma cilíndrica que se encontra representada na figura.



a) Determine a distância radial R_0 para a qual as condições de atrito passam de atrito máximo a atrito com escorregamento.

b) Estabeleça a pressão normal de contacto nas zonas de atrito máximo e de atrito com escorregamento.

c) Resolva as alíneas a) e b) admitindo que a pré-forma possui 10 mm de altura e 100 mm de diâmetro, que a lei de comportamento do material pode ser aproximada por intermédio de um modelo rígido-perfeitamente plástico em que $\sigma_e = 100$ MPa e que o coeficiente de atrito $\mu = 0.25$.

d) Calcule a pressão média nas condições da alínea c).

e) Utilize os resultados obtidos nas alíneas a) e b) para delinear uma metodologia de cálculo da pressão normal para o forjamento em matriz fechada com rebarba de peças axissimétricas.

Resolução

a) Para determinar a distância radial R_0 em que as condições de atrito passam de atrito máximo $\tau_{r\theta} = k$ a atrito com escorregamento $\tau_{r\theta} = \mu p$ começa-se por obter a distribuição da pressão normal aplicada na interface de contacto entre a pré-forma cilíndrica e a ferramenta. Para tal consideram-se as tensões que actuam numa fatia elementar

(elemento de volume), correspondente a um anel de espessura infinitesimal dr e altura h, situado a uma distância radial r da linha de simetria.

Procedendo ao balanço de forças na direcção radial, obtém-se a expressão,

$$\sigma_r h\, r\, d\theta + 2\tau_{r\theta}\, r\, d\theta\, dr + 2\sigma_\theta\, h\, dr\, \frac{d\theta}{2} - (\sigma_r + d\sigma_r) h\, d\theta (r + dr) = 0 \qquad (7.5.1)$$

em que $\tau_{r\theta}$ representa a tensão de corte originada por atrito na face de ataque. Desprezando os termos de ordem superior obtém-se a seguinte equação diferencial simplificada,

$$2\tau_{r\theta}\, r\, dr + \sigma_\theta\, h\, dr - \sigma_r\, h\, dr - d\sigma_r\, h\, r = 0 \qquad (7.5.2)$$

Admitindo que as tensões radiais e tangenciais são equivalentes $\sigma_r = \sigma_\theta$ e supondo ainda que as tensões referidas ao sistema de eixos cilíndrico r, θ, z são principais, conclui-se que a tensão de compressão $\sigma_z = -p$ aplicada na superfície da pré-forma cilíndrica é a menor das tensões principais $\sigma_z = \sigma_3$. Nestas condições, o critério de plasticidade de Tresca permite obter a relação entre as tensões radial (ou tangencial) e a tensão axial,

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_r + p = \sigma_e \qquad (7.5.3)$$

a qual é utilizada para estabelecer uma relação diferencial entre a tensão radial e a pressão normal aplicada,

$$d\sigma_r = -dp \qquad (7.5.4)$$

Substituindo este resultado na equação (7.5.2) e atendendo à equivalência entre tensões radiais e tangenciais, obtém-se uma equação diferencial simplificada que apenas faz intervir a pressão de contacto e a coordenada radial,

$$2\tau_{r\theta}\, r\, dr + dp\, h\, r = 0 \qquad (7.5.5)$$

Esta equação diferencial pode ser resolvida de duas maneiras distintas consoante se trate de uma situação de atrito máximo ou de atrito com escorregamento.

Tratando-se de um caso de atrito máximo $\tau_{r\theta} = k$ sujeito à condição de fronteira $r = R,\ p = 2k$, obtém-se,

$$2k\, r\, dr + dp\, h\, r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = -\frac{2k}{h} r + C$$
$$p = 2k\left(1 + \frac{R - r}{h}\right) \qquad (7.5.6)$$

Tratando-se de um caso de atrito $\tau_{r\theta} = \mu p$ sujeito à condição de fronteira $r = R,\ p = 2k$, obtém-se,

$$2\mu p\, r\, dr + dp\, h\, r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln p = -\frac{2\mu}{h} r + C$$
$$\frac{p}{2k} = \exp^{\frac{2\mu}{h}(R - r)} \qquad (7.5.7)$$

Quando o coeficiente de atrito μ for elevado podem estar reunidas as condições para o desenvolvimento dos dois tipos de regiões que foram anteriormente identificados para a interface de contacto entre o material e a ferramenta; uma região junto à linha de simetria em que a tensão de corte $\tau_{r\theta} = k$ e outra região na periferia em que a tensão de corte $\tau_{r\theta} = \mu p < k$.

Como a tensão de corte $\tau_{r\theta}$ pode ser expressa em função da pressão normal p (7.5.7) e do coeficiente de atrito μ da forma a seguir indicada,

$$\tau_{r\theta} = \mu p = 2k\mu \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}(R - r)\right]} \qquad (7.5.8)$$

conclui-se que distância radial r_0 de transição entre os dois tipos de regiões de atrito vale,

$$(\tau_{r\theta})_{max} = 2k\mu \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}(R - r_0)\right]} = k \quad \Leftrightarrow \quad \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}(R - r_0)\right]} = \frac{1}{2\mu}$$
$$r_0 = R - \frac{h}{2\mu} \ln \frac{1}{2\mu} \qquad (7.5.9)$$

b) A resolução desta alínea exige o conhecimento da distribuição de pressão normal em função da distância radial r para a situação de atrito máximo (7.5.6). Seguindo um procedimento análogo ao que foi efectuado na alínea a) mas procedendo à substituição da condição de fronteira,

$$r = r_0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{r\theta} = \mu p = k \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{k}{\mu} \tag{7.5.10}$$

na equação diferencial (7.5.6), obtém-se

$$C = \frac{k}{\mu} + \frac{2k}{h} r_0 \tag{7.5.11}$$

e, finalmente,

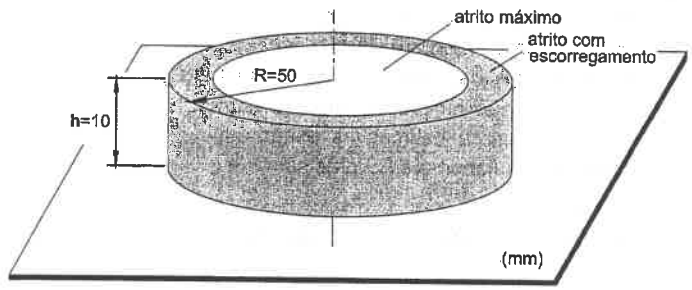
$$p = \frac{2k}{h}(r_0 - r) + \frac{k}{\mu} \tag{7.5.12}$$

Atendendo ao facto que a resolução da alínea a) permitiu identificar duas regiões distintas na interface de contacto entre o material e a ferramenta, a distribuição de pressão normal pode ser expressa por intermédio da condição,

$$p = \begin{cases} 2k \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}(R-r)\right]} & \text{quando} \quad r_0 \le r \le R \\ \frac{2k}{h}(r_0 - r) + \frac{k}{\mu} & \text{quando} \quad 0 \le r \le r_0 \end{cases} \tag{7.5.13}$$

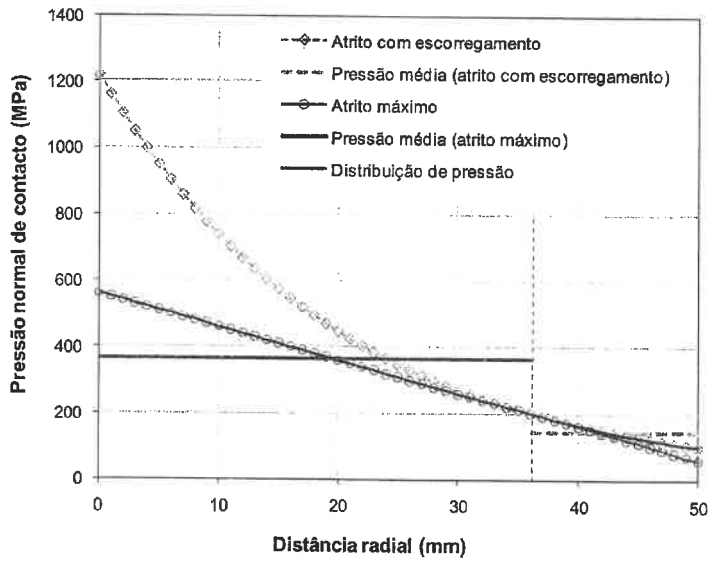
c) A distância r_0 correspondente à transição entre atrito máximo e atrito com escorregamento na interface de contacto entre a pré-forma e a ferramenta obtém-se por substituição na equação (7.5.9) dos dados de natureza geométrica e de atrito que constam do enunciado do problema,

$$r_0 = R - \frac{h}{2\mu} \ln\frac{1}{2\mu} = 50 - \frac{10}{2\times 0.25} \ln\frac{1}{2\times 0.25} = 36.14 \text{ mm} \tag{7.5.14}$$



A distribuição de pressão normal (MPa) é simétrica em relação ao eixo z e obtém-se substituindo a totalidade dos dados que constam do enunciado do problema e a distância r_0 calculada em (7.5.14) na equação (7.5.13),

$$p = \begin{cases} 100 \times \exp^{[0.05\,(50-r)]} & \text{quando} \quad 36.14 \le r \le 50 \\ 10 \times (36.14 - r) + 200 & \text{quando} \quad 0 \le r \le 36.14 \end{cases} \tag{7.5.15}$$



A figura anterior compara a distribuição de pressão resultante da equação (7.5.15) com as distribuições de pressão que resultariam de se considerar atrito máximo ou com escorregamento na totalidade da superfície de contacto. O resultado obtido permite concluir que a utilização da distribuição de pressão normal fornecida por intermédio da equação (7.5.7) pode conduzir a estimativas exageradas da pressão de contacto na região da superfície da peça adjacente à linha de simetria.

d) A pressão média num troço radial $r_a \le r \le r_b$ calcula-se da forma a seguir indicada,

$$p_{media} = \frac{\int_{r_a}^{r_b} p\, 2\pi r dr}{\pi\left(r_b^2 - r_a^2\right)} \tag{7.5.16}$$

Na região com atrito máximo a pressão média determina-se a partir da distribuição de pressão normal fornecida pela expressão (7.5.13), obtendo-se,

$$p_{media} = \frac{\int_0^{r_0}\left(\frac{2k}{h}(r_0 - r) + \frac{k}{\mu}\right) 2\pi r\, dr}{\pi r_0^2} = 2k\left(\frac{r_0}{3h} + \frac{1}{2\mu}\right) \tag{7.5.17}$$

$$= 100 \times \left(\frac{36.14}{3\times 10} + \frac{1}{2\times 0.25}\right) = 366.7 \text{ MPa}$$

Na região com atrito de escorregamento, a pressão média determina-se a partir da distribuição de pressão normal fornecida pela expressão (7.5.13), obtendo-se,

$$p_{media} = \frac{\int_{r_0}^{R}\left(2k \exp^{\left[\frac{2\mu}{h}(R-r)\right]}\right) 2\pi r dr}{\pi\left(R^2 - r_0^2\right)}$$

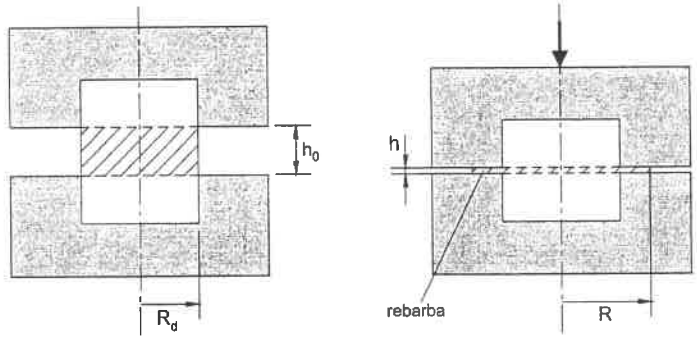
$$= 4k\left(\frac{h}{2\mu}\right)^2\left(\frac{1}{\left(R^2 - r_0^2\right)}\right)\left[\left(1 + r_0\frac{2\mu}{h}\right)\exp^{\left[\frac{2\mu}{h}(R-r_0)\right]} - 1 - \frac{2\mu R}{h}\right] \tag{7.5.18}$$

$$= 200 \times 20^2 \times \left(\frac{1}{50^2 - 36.14^2}\right)\left[(1 + 36.14\times 0.05)\exp^{[0.05\times(50-36.14)]} - 3.5\right]$$

$$= 141.6 \text{ MPa}$$

A força de compressão poderia ser obtida multiplicando cada valor de pressão média ((7.5.17) e (7.5.18)) pela área da região de contacto correspondente.

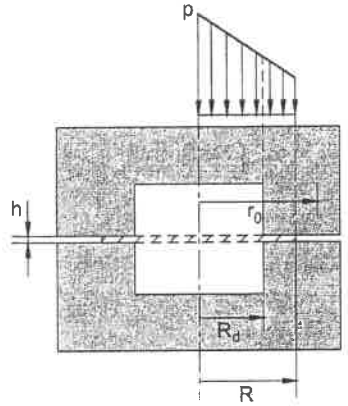
e) Para delinear uma metodologia de cálculo aplicável ao forjamento em matriz fechada com rebarba que faça utilização dos resultados obtidos nas alíneas a) e b) começa-se por observar a figura seguinte.



A figura permite concluir que o forjamento em matriz fechada com rebarba pode ser aproximado à compressão uniaxial entre pratos direitos do disco fictício representado a tracejado. Entre os dois volumes indicados a tracejado deverá verificar-se a conservação de volume característica da deformação plástica dos materiais metálicos,

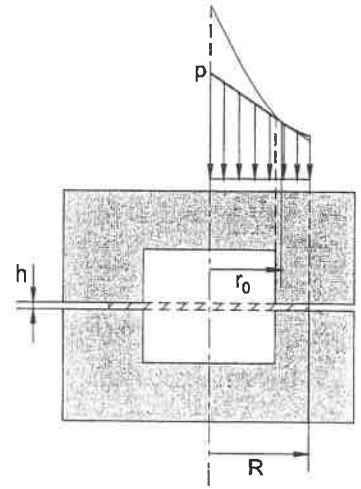
$$\pi R_d^2 h_0 = \pi R^2 h \tag{7.5.14}$$

A distribuição de pressão normal envolve as três possibilidades indicadas na figura seguinte que resultam da posição relativa entre a distância radial R_0, o raio da cavidade da matriz R_d e o raio exterior da rebarba R.



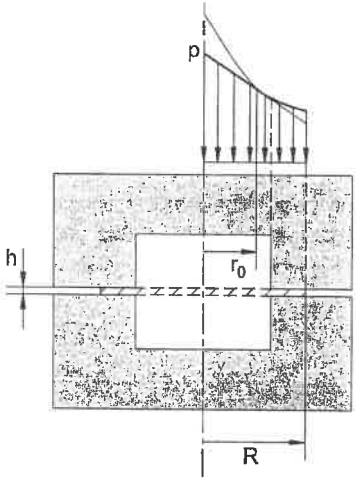
$r_0 > R$

$$p = 2k\left(1 + \frac{R - r}{h}\right)$$



$$R_d < r_0 \le R$$

$$p = \begin{cases} 2k \exp\left[\frac{2\mu}{h}(R-r)\right] & \text{quando } r_0 \le r \le R \\ \frac{2k}{h}(r_0 - r) + \frac{k}{\mu} & \text{quando } 0 \le r \le r_0 \end{cases}$$

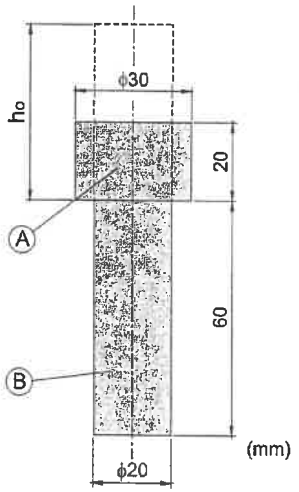


$$r_0 \le R_d$$

$$p = \begin{cases} 2k \exp\left[\frac{2\mu}{h}(R-r)\right] & \text{quando } R_d \le r \le R \\ \frac{2k}{h}(r_0 - r) + \frac{k}{\mu} & \text{quando } 0 \le r \le R_d \end{cases}$$

Problema 7.6

Considere o encabeçamento a frio do varão de aço AISI 1015 que se encontra representado na figura.



A lei de comportamento do aço AISI 1015 à temperatura ambiente é expressa através da equação tensão-extensão $\overline{\sigma} = 600\,\overline{\varepsilon}^{0.18}$ MPa.

a) Determine o comprimento h_0 da extremidade do varão que vai ser encabeçado.

b) Determine a pressão aplicada na extremidade do varão no final do encabeçamento. Utilize o método da energia uniforme.

c) Resolva a alínea c) utilizando o método da fatia elementar e admitindo que o coeficiente de atrito entre o material e a ferramenta $\mu = 0.15$.

d) Calcule a força de compressão para realizar o encabeçamento da extremidade do varão admitindo que o coeficiente de atrito entre o material e a ferramenta $\mu = 0.15$.

e) Calcule a energia necessária para realizar o encabeçamento da extremidade do varão e indique qual o valor que deve ser exigido à máquina-ferramenta no caso do rendimento $\eta = 0.8$.

f) Discuta a susceptibilidade do encabeçamento da extremidade do varão a fenómenos de instabilidade plástica.

Resolução

a) Na operação de encabeçamento apenas a extremidade do varão que se encontra assinalada na figura com a letra 'A' vai estar submetida a deformação plástica. O resto do varão (zona 'B') vai estar confinado no interior de uma matriz e, portanto, não irá estar submetido a deformação plástica.
O comprimento h_0 da extremidade do varão que vai ser encabeçado obtém-se por conservação de volume,

$$\frac{\pi d_0^2}{4} h_0 = \frac{\pi d_1^2}{4} h_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi 20^2}{4} \times h_0 = \frac{\pi 30^2}{4} \times 20$$

$$h_0 = \frac{30^2}{20^2} \times 20 = 45 \text{ mm} \tag{7.6.1}$$

b) No método da energia uniforme admite-se que o campo de tensões na extremidade do varão no final da operação de encabeçamento é uniforme e que o seu valor pode ser obtido a partir da estimativa de extensão efectiva na compressão da extremidade do varão entre a posição inicial e a final. Como a deformação plástica é axissimétrica,

$$\bar{\varepsilon} = -\varepsilon_z = \ln \frac{h_0}{h_1} = \ln \frac{45}{20} = 0.811 \tag{7.6.2}$$

a tensão obtém-se por substituição de (7.6.2) na lei de comportamento do material,

$$\bar{\sigma} = 600\ \bar{\varepsilon}^{0.18} = 600 \times 0.811^{0.18} = 577.8 \text{ N/mm}^2 \tag{7.6.3}$$

Este valor é idêntico ao da pressão de compressão p aplicada na extremidade do varão porque na compressão axissimétrica sem atrito o factor de correcção à pressão $Q_p = 1$,

$$p = \bar{\sigma} Q_p = 577.8 \text{ N/mm}^2 \tag{7.6.4}$$

c) No caso de existir atrito entre o varão e a matriz a aplicação do método da energia uniforme obrigaria a fazer uma estimativa do factor de correcção $Q_p > 1$ que permitisse contabilizar a influência do atrito no valor da pressão aplicada na extremidade do varão.

Para evitar a necessidade de efectuar uma estimativa do factor de correcção é preferível utilizar-se a equação do método da fatia elementar que permite calcular a distribuição de pressão na compressão axissimétrica, com atrito, de um cilindro, obtendo-se,

$$p = \bar{\sigma} \cdot \exp^{\frac{2\mu}{h}\left(\frac{d_1}{2} - r\right)} \tag{7.6.5}$$

A utilização desta expressão justifica-se pelo facto da distância r_0 (7.5.14) correspondente à transição entre atrito máximo e atrito com escorregamento ser negativa, o que significa que não existe transição e que a tensão de corte na interface de contacto $\tau_{r0} < k$,

$$r_0 = \frac{d_1}{2} - \frac{h}{2\mu} \ln \frac{1}{2\mu} = \frac{30}{2} - \frac{20}{2 \times 0.15} \ln \frac{1}{2 \times 0.15} = -65.3 < 0 \text{ mm} \tag{7.6.6}$$

O valor médio da distribuição de pressão aplicada na extremidade do varão no final do encabeçamento é igual a,

$$p_{media} \cong \bar{\sigma} \cdot \left(1 + \frac{\mu d_1}{3 h_1}\right) = 577.8 \times \left(1 + \frac{0.15 \times 30}{3 \times 20}\right) = 577.8 \times 1.075 = 621.1 \text{ N/mm}^2 \tag{7.6.7}$$

O resultado obtido permite efectuar uma analogia entre a pressão $p = \bar{\sigma} Q_p$ que resultaria da aplicação do método da energia uniforme e a pressão média p_{media} calculada com base no método da fatia elementar (7.6.7) que fornece o factor correctivo Q_p indispensável à resolução correcta desta alínea com base no método da energia uniforme,

$$Q_p = \left(1 + \frac{\mu d_1}{3 h_1}\right) = 1.075 \tag{7.6.8}$$

d) A força de compressão necessária à realização do encabeçamento obtém-se a partir de (7.6.7),

$$F = p_{media} A_1 = p_{media} \frac{\pi d_1^2}{4} = 621.1 \times \frac{\pi \times 30^2}{4} = 439029\ \text{N} = 439\ \text{kN} \qquad (7.6.9)$$

e) O cálculo da energia necessária ao encabeçamento da extremidade do varão exige a determinação do volume de material em deformação plástica,

$$V = \frac{\pi d_1^2}{4} l_1 = \frac{\pi \times 30^2}{4} \times 20 = 14137.2\ \text{mm}^3 \qquad (7.6.10)$$

Como o factor correctivo $Q_w = 1/\eta$ que está associado ao rendimento da conversão de energia da máquina-ferramenta em trabalho de deformação plástica é dado por,

$$Q_w = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{0.8} = 1.25 \qquad (7.6.11)$$

a energia total exigida à máquina-ferramenta é a seguinte,

$$\begin{aligned} W &= Q_w V \int \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon} = Q_w V \int 600 \bar{\varepsilon}^{0.18} d\bar{\varepsilon} \\ &= 1.25 \times 14137.2 \times \frac{600 \times 0.811^{1.18}}{1.18} = 7017578.3\ \text{Nmm} = 7.0\ \text{kJ} \end{aligned} \qquad (7.6.12)$$

f) Para verificar se a operação de encabeçamento pode ser realizada sem problemas de instabilidade exige-se a realização de um procedimento de cálculo baseado na equação de Euler em regime plástico,

$$F_{critica} = \frac{\pi I E_t}{h^2} \qquad (7.6.13)$$

em que E_t é o módulo tangente definido através do declive $d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon}$ da curva tensão-extensão do material em condições de deformação plástica e $I = \pi r^4$ no caso de um varão de raio r,

$$\sigma_{critica} = \frac{F_{critica}}{A} = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{h}{r}\right)^2} \qquad (7.6.14)$$

Como o declive $d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon}$ de uma lei de comportamento do tipo Ludwik-Holloman $\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^n$ é expresso da forma a seguir indicada,

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = nK\bar{\varepsilon}^{n-1} \qquad (7.6.15)$$

combinando (7.6.13) com (7.6.14), obtém-se,

$$\sigma_{critica} = \frac{\pi^2 nK\bar{\varepsilon}^{n-1}}{\left(\frac{h}{r}\right)^2} \qquad (7.6.16)$$

Tendo em consideração que a tensão $\bar{\sigma}$ se calcula a partir da lei de comportamento do material conclui-se que para não existir instabilidade tem de verificar-se a seguinte condição,

$$\bar{\sigma} < \sigma_{critica} \quad \Leftrightarrow \quad K\bar{\varepsilon}^n < \frac{\pi^2 nK\bar{\varepsilon}^{n-1}}{\left(\frac{h}{r}\right)^2} \qquad (7.6.17)$$

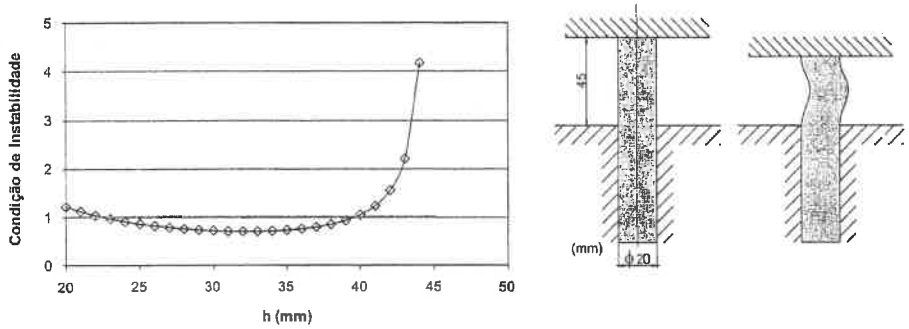
ou seja,

$$1 < \frac{\pi^2 n}{\bar{\varepsilon} \cdot \left(\frac{h}{r}\right)^2} \qquad (7.6.18)$$

No caso concreto do problema em estudo, substituindo valores,

$$1 < \frac{\pi^2 \times 0.18}{0.811 \times \left(\frac{20}{15}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < 1.23 \qquad (7.6.19)$$

confirma-se que não ocorre instabilidade no final da operação de encabeçamento. Contudo, uma análise mais elaborada realizada ao longo da operação de encabeçamento da extremidade do varão permitiria concluir sobre a possibilidade de vir a ocorrer instabilidade durante a operação (ver figura seguinte).

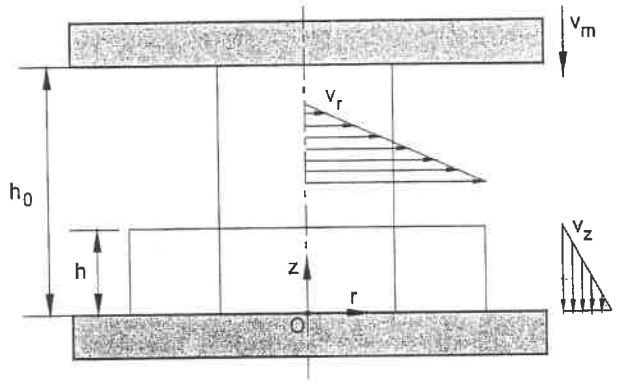


Esta conclusão está conforme com a regra prática de dimensionamento que aconselha a que o encabeçamento de extremidades de varões de aço obedeça a uma relação limite $h_0/d_0 < 2.5$.

Para finalizar interessa salientar que a análise da equação (7.6.17) permite concluir que o encruamento favorece a ausência de instabilidade bem como outros parâmetros geométricos mais evidentes tais como a redução de altura e o aumento do diâmetro do varão.

Problema 7.7

Considere a operação de compressão uniaxial da pré-forma cilíndrica que se encontra representada na figura.



Admita que a lei de comportamento do material pode ser aproximada por intermédio de um modelo rígido-perfeitamente plástico $\sigma_e = Cte$, que o factor de atrito na interface de contacto entre a pré-forma e os pratos compressores é igual a m e que o campo de velocidades no interior da pré-forma é dado por,

$$v_r = \frac{v_m\, r}{2h} \qquad v_z = -\frac{v_m\, z}{h} \qquad v_\theta = 0$$

a) Determine o campo de velocidades de deformação e a velocidade de deformação efectiva.

b) Calcule a pressão média que é aplicada pelos pratos de compressão e compare o valor obtido com o que resultaria da aplicação do método da fatia elementar.

Resolução

a) O campo de velocidades que é fornecido no enunciado do problema é contínuo para a totalidade da pré-forma em deformação plástica não existindo superfícies de descontinuidade de velocidade no interior do material.

O campo de velocidades de deformação $\dot{\varepsilon}_{ij}$ que resulta deste campo de velocidades é o seguinte,

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{v_m}{2h} \qquad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{v_r}{r} = \frac{v_m}{2h} \qquad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{v_m}{h}$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = 0 \qquad \dot{\varepsilon}_{\theta z} = \dot{\varepsilon}_{r\theta} = 0 \tag{7.7.1}$$

O resultado obtido permite concluir que o campo de velocidades é cinematicamente admissível porque não só verifica as condições de fronteira do problema como é capaz de assegurar a condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos,

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_z = 0 \tag{7.7.2}$$

A velocidade de deformação efectiva $\dot{\bar{\varepsilon}}$ associada ao critério de plasticidade de von Mises é igual a,

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_\theta)^2 + (\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_r)^2} = |\dot{\varepsilon}_z| = \frac{v_m}{h} \tag{7.7.3}$$

b) A potência necessária à compressão uniaxial da pré-forma cilíndrica é a soma da potência indispensável para efectuar a deformação plástica do material com a potência consumida nas interfaces de contacto com os pratos compressores onde existe movimento relativo sujeito a atrito,

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,dV + \int_{S_a} \tau_a \left|\Delta v^*\right| dS \tag{7.7.4}$$

Na expressão anterior τ_a e Δv^* são respectivamente, a tensão de corte devida ao atrito e a descontinuidade de velocidade nas interfaces de contacto entre o material e os pratos compressores (superior e inferior). Substituindo (7.7.3) em (7.7.4) e tendo em consideração que $\Delta v^* = v_r$, obtém-se,

$$\frac{dW}{dt} = \int_0^R \sigma_e \frac{v_m}{h} h\,2\pi r\,dr + 2\times\int_0^R \tau_a \frac{v_m r}{2h} 2\pi r\,dr$$
$$= \sigma_e v_m \pi R^2 + \frac{4\pi\tau_a v_m}{2h}\int_0^R r^2 dr = \sigma_e v_m \pi R^2 + \frac{2}{3}\pi m \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}\frac{v_m}{h}R^3 \tag{7.7.5}$$

Sendo a potência exterior aplicada pelo prato compressor superior (com velocidade de actuação $v_m \neq 0$) igual a,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{ext} = p_{media}\,\pi R^2 v_m \tag{7.7.6}$$

então, fazendo a igualdade entre as equações (7.7.5) e (7.7.6) obtém-se o seguinte valor para a pressão média,

$$p_{media} = \sigma_e\left(1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} m \frac{R}{h}\right) \tag{7.7.7}$$

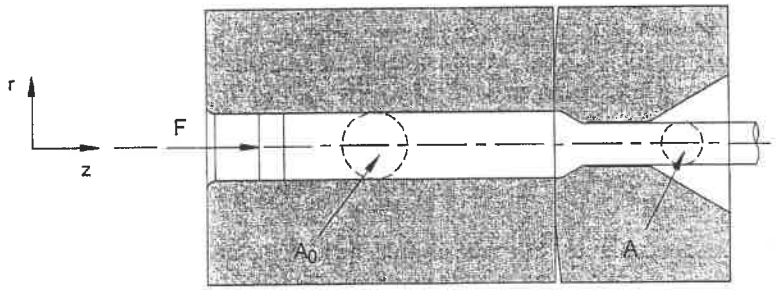
Este valor é igual ao que seria obtido por intermédio do método da fatia elementar com atrito de Amonton-Coulomb se tivermos em consideração que o coeficiente de atrito μ se relaciona com o factor de atrito m através da igualdade $\mu = m/\sqrt{3}$.

8. EXTRUSÃO

Neste capítulo apresenta-se um conjunto de problemas que abordam o processo tecnológico de extrusão que fazem intervir conceitos básicos da teoria da plasticidade e dos métodos de análise de processos de deformação plástica que foram abordados em capítulos anteriores.

Problema 8.1

Um varão de Alumínio AA6060 com uma secção inicial igual a 100 mm^2 sofre uma redução de área igual a 20 % numa operação de extrusão directa a frio.



a) Determine o diâmetro final do varão.

b) Calcule a tensão limite de elasticidade do varão após deformação.

c) Calcule a força de extrusão, admitindo que não existe atrito entre o material e as paredes do contentor.

d) Repita a alínea anterior admitindo que existe atrito. Considere para efeitos de resolução do problema que o comprimento inicial do varão no interior do contentor é igual a 125 mm, e que a tensão de corte devida ao atrito pode ser expressa através de $\tau_{atrito} = 0.1\sigma_{0.2}$.

Informações adicionais relativas ao material:

Comportamento mecânico do material, $\overline{\sigma} = 290\overline{\varepsilon}^{0.09}$ MPa e $\sigma_{0.2} = 160$ MPa

Resolução

a) O diâmetro do varão no final da operação de extrusão calcula-se a partir do valor de redução de área, r, que relaciona a área da secção transversal do varão extrudido, A, com a área inicial do varão, A_0, do seguinte modo,

$$r = \frac{A_0 - A}{A_0} \Rightarrow 0.2 = \frac{100 - A}{100} \Leftrightarrow A = 80 \text{ mm}^2$$
$$A = \pi \frac{d^2}{4} \Rightarrow 80 = \pi \frac{d^2}{4} \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{4 \times 80}{\pi}} = 10.1 \text{ mm} \qquad (8.1.1)$$

b) O valor da tensão limite de elasticidade do varão após deformação corresponde ao valor máximo de tensão efectiva a que o material foi submetido durante a operação. Este valor obtém-se através da lei de comportamento mecânico do material a partir do valor de extensão efectiva do varão à saída da matriz de extrusão. O cálculo da extensão efectiva na operação de extrusão efectua-se do seguinte modo,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (8.1.2)$$

em que ε_r, ε_θ e ε_z são as extensões verdadeiras segundo os eixos r, θ e z do referencial cilíndrico cujo eixo z se encontra alinhado com o eixo de simetria da operação, conforme se encontra ilustrado na figura do enunciado. No final da operação os valores das extensões verdadeiras calculam-se da seguinte forma,

$$\varepsilon_r = \ln \frac{r}{r_0}$$
$$\varepsilon_\theta = \ln \frac{2\pi r}{2\pi r_0} = \ln \frac{r}{r_0} \qquad (8.1.3)$$
$$\varepsilon_z = \ln \frac{l}{l_0}$$

em que r_0 e r, e l_0 e l, são os raios e comprimentos do varão antes e depois da deformação plástica. Por outro lado, considerando as expressões anteriores e a incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos é possível escrever a seguinte relação entre as extensões verdadeiras radial e axial, ε_r e ε_z,

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_r + \varepsilon_r + \varepsilon_z = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_z = -2\varepsilon_r = -2 \ln \frac{r}{r_0} \qquad (8.1.4)$$

Os resultados das equações (8.1.3) e (8.1.4) permitem simplificar a equação (8.1.2), obtendo-se o seguinte valor de extensão efectiva no final da operação de extrusão,

$$\bar{\varepsilon} = -2\,\varepsilon_r = 2\,|\,\varepsilon_r\,| \qquad (8.1.5)$$

Importa notar que a extensão efectiva é por definição um valor positivo, pelo que em virtude da extensão verdadeira na direcção radial ter um valor negativo, a simplificação da equação (8.1.2) deve ser efectuada considerando o valor absoluto de ε_r, como se encontra indicado em (8.1.5). Adicionalmente pode-se reescrever a expressão anterior (8.1.5) em função da relação de extrusão, $R = A_0/A$, da seguinte forma,

$$\bar{\varepsilon} = -2\,\varepsilon_r = -2 \ln \frac{r}{r_0} = \ln \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 = \ln \frac{A_0}{A} = \ln R \qquad (8.1.6)$$

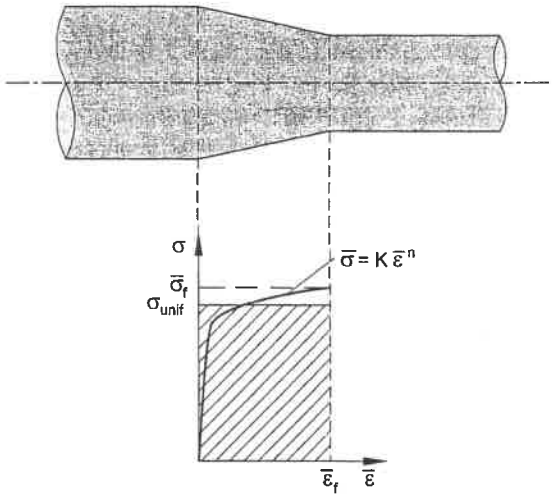
Tendo em consideração este resultado a extensão efectiva do varão no final da operação de extrusão descrita neste problema é,

$$\bar{\varepsilon}_f = \ln \frac{100}{80} = 0.223 \qquad (8.1.7)$$

A tensão limite de elasticidade do varão no final da operação, de acordo com o exposto anteriormente, determina-se através da lei de comportamento mecânico do alumínio do seguinte modo,

$$\bar{\sigma}_f = 290 \times 0.223^{0.09} = 253.4 \text{ MPa} \qquad (8.1.8)$$

Na figura seguinte encontra-se ilustrada a operação de extrusão cilíndrica directa do varão e os respectivos valores de tensão e extensão efectiva no final da operação considerando a lei de comportamento mecânico do material.



c) O processo de extrusão sem atrito é um processo de estacionário, em que a força que é necessário aplicar para efectuar a deformação plástica é constante durante a operação. A determinação do seu valor pode-se fazer através da aplicação do método da energia uniforme, a partir do equilíbrio energético efectuado entre o trabalho plástico ou ideal W_i e o trabalho externo realizado pela força de extrusão, W. O trabalho plástico, W_i, determina-se através do produto do trabalho plástico por unidade de volume, w_i, pelo volume de material que se deforma, V,

$$W_i = V.w_i = V\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon} \tag{8.1.9}$$

Sabendo que o material do varão possui uma curva tensão-extensão do tipo Ludwik-Hollomon, $\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n$, o trabalho plástico ou ideal necessário à deformação plástica do varão determina-se integrando o respectivo termo,

$$W_i = V\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} k\bar{\varepsilon}^n\, d\bar{\varepsilon} = V \times \frac{k\bar{\varepsilon}_f^{n+1}}{n+1} = V \times \sigma_{unif} \times \bar{\varepsilon}_f \tag{8.1.10}$$

em que $\bar{\varepsilon}_f$ é o valor da extensão efectiva total e σ_{unif} é o valor médio da tensão efectiva no interior do material em deformação plástica, conforme se encontra ilustrado na figura

anterior. O volume de material deformado durante a operação de extrusão pode ser calculado através do produto da área inicial do varão pelo deslocamento do êmbolo de extrusão.

Por outro lado, o trabalho externo realizado pela força de extrusão, é contabilizado através do produto entre a força de extrusão, F, e o deslocamento efectuado pelo êmbolo durante a operação, d,

$$W = F \times d \tag{8.1.11}$$

Finalmente, efectuando o equilíbrio energético entre o trabalho plástico ou ideal e o trabalho externo realizado pela força de extrusão, através igualdade das expressões (8.1.10) e (8.1.11), obtém-se o valor da força necessária para realizar a deformação plástica do varão,

$$\begin{aligned} W &= W_i \\ F\,d &= V\,\sigma_{unif}\,\bar{\varepsilon}_f \\ F\,d &= A_0\,d\,\sigma_{unif}\,\bar{\varepsilon}_f \\ F &= \sigma_{unif}\,\bar{\varepsilon}_f\,A_0 \end{aligned} \tag{8.1.12}$$

Por seu lado a pressão de extrusão determina-se através da divisão da força de extrusão pela área do êmbolo,

$$p = \sigma_{unif}.\bar{\varepsilon}_f \tag{8.1.13}$$

Na metodologia descrita os efeitos da deformação redundante e do atrito no varão dentro da matriz de extrusão não estão incluídos. Uma forma geralmente utilizada para contabilizar estes efeitos nos resultados provenientes da aplicação do método da energia uniforme consiste em substituir o factor $\sigma_{unif}.\bar{\varepsilon}_f$, das equações (8.1.12) e (8.1.13) por $Q_p.\sigma_{unif}$ em que Q_p é um coeficiente de correcção que usualmente se calcula do seguinte modo,

$$Q_p = 0.8 + 1.2\,\bar{\varepsilon}_f \tag{8.1.14}$$

Com esta correcção, a força e a pressão de extrusão das expressões (8.1.12) e (8.1.13) passam a ser determinadas, respectivamente, através de,

$$F = Q_p\,\sigma_{unif}\,A_0 \tag{8.1.15}$$

$$p = Q_p\ \sigma_{unif} \tag{8.1.16}$$

Em face do exposto, considerando os dados do problema, pode-se calcular a tensão média do material no interior da matriz de extrusão,

$$\sigma_{unif} = \frac{k\bar{\varepsilon}_f^{\,n}}{n+1} = \frac{290 \times 0.223^{0.09}}{1.09} = 232.44\ \text{MPa} \tag{8.1.17}$$

obtendo-se o seguinte valor para a força que é necessário aplicar para realizar a operação de extrusão de acordo com a aplicação do método da energia uniforme (8.1.15),

$$F = Q_p \times \sigma_{unif} \times A_0 = (0.8 + 1.2 \times 0.223) \times 232.44 \times 100 \cong 24816\ \text{N} \tag{8.1.18}$$

d) Existindo atrito, o valor da força que é necessário aplicar em cada instante da operação de extrusão é igual ao valor da força necessária para efectuar a deformação plástica, calculado em (8.1.18), que passará a ser designado de F_{dp}, acrescido da força necessária para vencer as tensões de corte devidas ao atrito na interface entre o varão e o contentor de extrusão, F_a,

$$F = F_{dp} + F_a \tag{8.1.19}$$

conforme se encontra ilustrado na figura seguinte.

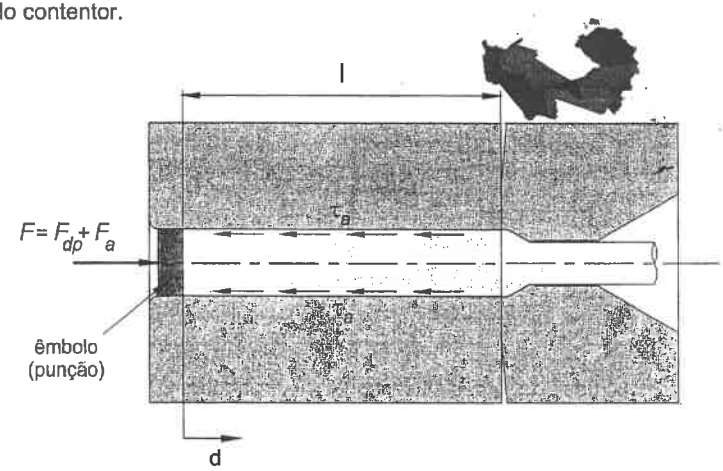
O incremento de força devido ao atrito, a que corresponde a parcela, F_a, é contabilizado a cada instante, através do produto entre a tensão de corte que surge devido ao atrito, τ_a, e área da superfície de contacto entre o varão e o contentor de extrusão. Se num dado instante da operação o comprimento do varão circular dentro do contentor for l, a parcela de força necessária para vencer as tensões de corte devidas ao atrito F_a contabiliza-se do seguinte modo,

$$F_a = \tau_a \times 2\pi r_0 \times l \tag{8.1.20}$$

A análise desta expressão permite concluir que a força de extrusão (8.1.19) atinge o valor máximo no início da operação e decresce linearmente com o deslocamento do êmbolo de extrusão, d, em virtude do comprimento do varão diminuir na mesma proporção,

$$l = l_0 - d \tag{8.1.21}$$

em que l_0 é o comprimento inicial do varão. Sendo que, no final da operação a força tenderia para o valor correspondente exclusivamente à força de deformação plástica, não fosse o aumento significativo que se verifica neste instante devido fundamentalmente à natureza radial do escoamento para extrudir a pequena quantidade de material do varão dentro do contentor.



Substituindo os resultados das equações (8.1.18), (8.1.20) e (8.1.21) na equação (8.1.19) obtém-se a expressão que permite estimar a força total de extrusão em cada instante da operação em função do deslocamento do êmbolo, d,

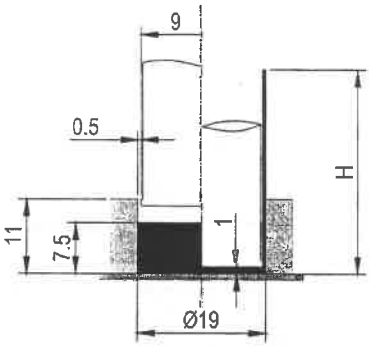
$$F = F_{dp} + F_a = Q_p \times \sigma_{unif} \times A_0 + \tau_a \times 2\pi r_0 \times (l_0 - d) \tag{8.1.22}$$

Considerando os dados do problema a força máxima necessária para efectuar a operação de extrusão, de acordo com a equação anterior, ocorre no início da operação e vale,

$$F_{máx} = F_{dp} + F_{a_{máx}} = 24816 + 0.1 \times 160 \times 2\pi \times \sqrt{\frac{100}{\pi}} \times 125 \cong 95714\ \text{N} \tag{8.1.23}$$

Problema 8.2

Considere a operação de extrusão inversa a frio para fabricar cartuchos que se encontra representada na figura.



(dimensões em mm)

Resolva as seguintes questões justificando detalhadamente todos os cálculos efectuados.

a) Determine a relação de extrusão.

b) Determine a altura *H* do cartucho no final da operação.

c) Calcule o valor da força de extrusão.

d) Calcule o valor da pressão aplicada no punção e no fundo do contentor.

e) Proceda a uma estimativa do valor da força de atrito que se desenvolve entre o material do cartucho e a superfície interior do contentor na fase final da extrusão. Admita que o factor de atrito é $m = 0.1$.

Informações adicionais relativas ao material:

Comportamento mecânico do material do cartucho (Alumínio AA1100), $\bar{\sigma} = 140\ \bar{\varepsilon}^{0.25}$ MPa.

Resolução

a) A relação de extrusão, R, estabelece-se a partir do quociente entre a área inicial da secção do varão, A_0, e a área final da secção da parede do cartucho produzido, A, do seguinte modo,

$$A_0 = \pi \frac{{d_0}^2}{4} = \pi \frac{19^2}{4} = 283.53 \text{ mm}$$

$$A = \pi \frac{\left({d_0}^2 - d^2\right)}{4} = \pi \frac{\left(19^2 - 18^2\right)}{4} = 29.06 \text{ mm}$$

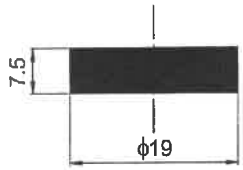
$$\Rightarrow R = \frac{283.53}{29.06} = 9.76 \qquad (8.2.1)$$

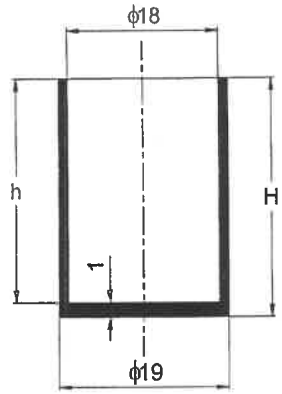
b) A altura H do cartucho no final da operação é determinada a partir da conservação de volume entre a geometria inicial do varão e a geometria do cartucho obtido através da operação de extrusão, conforme ilustra a figura seguinte,

$$V_0 = V \Leftrightarrow 7.5 \times \pi \times \frac{19^2}{4} = 1 \times \pi \times \frac{19^2}{4} + h \times \pi \frac{\left(19^2 - 18^2\right)}{4} \Leftrightarrow h = 63.42 \text{ mm} \qquad (8.2.2)$$

$$H = 64.42 \text{ mm}$$

em que h é a altura da parede do cartucho.





c) Seguindo a metodologia descrita no problema anterior para determinar a força de extrusão, começa-se por efectuar o equilíbrio energético entre o trabalho plástico ou ideal e o trabalho externo realizado pela força de extrusão, tendo em consideração que o volume de material deformado, V, se pode obter multiplicando a área inicial do varão pelo deslocamento do punção durante a operação de extrusão, d. Em resultado deste balanço energético a expressão que permite determinar a força necessária para efectuar a operação de extrusão do cartucho é igual à que tinha sido obtida no problema anterior em (8.1.12). Novamente devido a não terem sido contabilizados os efeitos da deformação redundante e atrito na zona de deformação plástica, junto ao punção, a expressão para determinar a força de extrusão sofre a mesma correcção, sendo o seu valor determinado através da equação (8.1.15).

Considerando os dados do problema e seguindo a metodologia de cálculo do problema anterior obtém-se o seguinte valor para a extensão verdadeira no final da operação,

$$\bar{\varepsilon} = \ln R = \ln\ 9.76 = 2.28 \tag{8.2.3}$$

A tensão média do material em deformação plástica é obtida a partir da equação de comportamento mecânico do material,

$$\sigma_{unif} = \frac{k\bar{\varepsilon}^{n}}{n+1} = \frac{140 \times 2.28^{0.25}}{1.25} = 137.6\ \text{MPa} \tag{8.2.4}$$

Estes resultados permitem determinar a força que é necessário aplicar para realizar a operação de extrusão (8.1.15),

$$F = Q_p \sigma_{unif} A_0 = (0.8 + 1.2 \times 2.28) \times 137.6 \times 283.53 = 137953\ \text{N} \tag{8.2.5}$$

d) A pressão de extrusão exercida pelo punção determina-se através da divisão da força de extrusão (8.2.5) pela área da secção transversal do punção, A_p, de acordo com,

$$p = \frac{Q_p\ \sigma_{unif}\ A_0}{A_p} \tag{8.2.6}$$

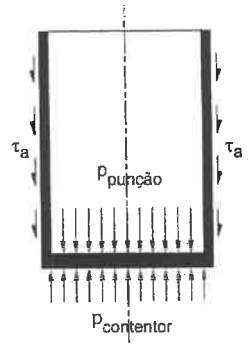
Pelo que, para fabricar o cartucho, o punção deverá aplicar uma pressão igual a,

$$p_{punção} = \frac{(0.8 + 1.2 \times 2.28) \times 137.6 \times \pi \times \frac{19^2}{4}}{\pi \times \frac{18^2}{4}} = 542\ \text{MPa} \tag{8.2.7}$$

Relativamente à pressão exercida no fundo do contentor, este valor estima-se através da divisão da força de extrusão pela área da secção transversal do fundo do contentor, que corresponde à área inicial do varão, A_0, ou seja,

$$p_{contentor} = Q_p \sigma_{unif} = 486.6\ \text{MPa} \tag{8.2.8}$$

As pressões, acima calculadas encontram-se esquematicamente representadas na figura seguinte.



e) A análise do processo de fabrico permite concluir que durante a produção do componente, à medida que a parede do cartuxo se vai formando, devido ao contacto e movimento relativo entre a superfície exterior do cartuxo e as paredes do contentor, desenvolvem-se tensões de corte por atrito nesta interface, como ilustra a figura anterior. A intensidade destas tensões de corte pode ser estimada através da lei de Prandtl, segundo a qual a tensão de atrito deverá corresponder a uma fracção da tensão de corte máxima que é equivalente à tensão limite de elasticidade em corte puro do material, k,

$$\tau_a = mk \tag{8.2.9}$$

o factor m que estima esta fracção é habitualmente designado por factor de atrito.

Atendendo a que a interface de atrito nesta operação surge no material do cartucho que já foi deformado plasticamente, para determinar a sua tensão limite de elasticidade em corte puro, k, é necessário conhecer a nova tensão limite de elasticidade do material das paredes. Este valor determina-se através da lei de comportamento mecânico do material considerando a extensão total imposta na operação,

$$\overline{\sigma} = 140 \times (2.28)^{0.25} = 172 \text{ MPa} \qquad (8.2.10)$$

Como de acordo com o critério de plasticidade de Tresca, $k = \sigma_e / 2$, a intensidade das tensões de corte na interface das paredes do cartucho com o contentor vale,

$$\tau_a = 0.1 \times \frac{172}{2} = 8.6 \text{ MPa} \qquad (8.2.11)$$

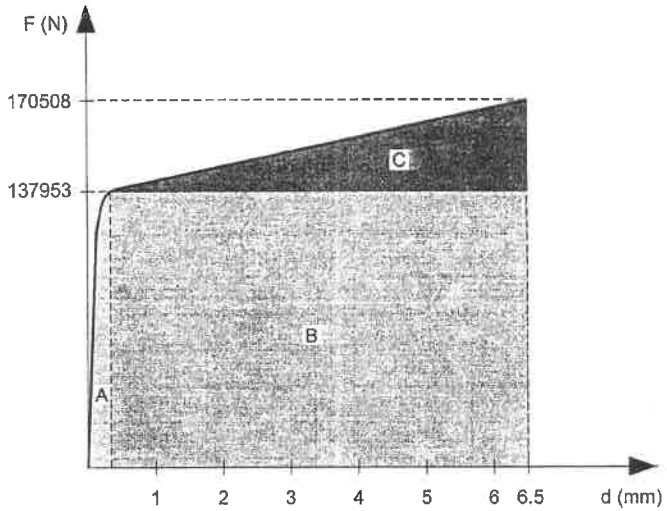
Conhecido o valor das tensões de corte, a força de atrito em cada instante da operação estima-se através do produto entre as tensões de corte e a área da interface de atrito, que aumenta com o decorrer da operação,

$$F_a = \tau_a \times A_{interface} = 8.6 \times \pi \times 19 \times h \qquad (8.2.12)$$

em que h é a altura instantânea da parede do cartucho. A análise da equação anterior permite concluir que a força de atrito aumenta linearmente com o deslocamento do punção devido ao aumento, na mesma proporção, da altura da parede do cartucho, sendo o valor máximo atingido no final da operação quando a altura da parede do cartucho for 63.42 mm, conforme determinado na equação (8.2.2),

$$(F_a)_{max} = 8.6 \times \pi \times 19 \times 63.42 = 32555.8 \text{ N} \qquad (8.2.13)$$

Na figura seguinte encontra-se representada esquematicamente a evolução da força de extrusão, que resulta da soma da força necessária para efectuar a deformação plástica do metal (8.2.5) com a força necessária para vencer o atrito (8.2.12), em função do deslocamento do punção, d. As áreas assinaladas na figura correspondem à energia para acomodar o varão inicial à geometria do contentor e para iniciar a extrusão do material (A), à energia para deformar plasticamente o volume de material (B) e à energia para vencer o atrito que se desenvolve na interface de contacto entre as paredes dos cartucho e o contentor de extrusão (C).



Problema 8.3

Um varão de aço inoxidável (X5CrNi1810) com 75 mm de comprimento e 15 mm de diâmetro é deformado plasticamente numa operação de extrusão directa a frio de modo a reduzir a sua secção transversal em 50%. O varão foi previamente revestido num lubrificante à base de bissulfito de molibdénio (MoS_2). Durante a operação foram registados os seguintes valores de deslocamento do punção e força de extrusão:

d (mm)	F (N)
0	0
0.44	35185.2
0.88	57704.3
1.17	68963.8
1.39	79988.2
1.83	98988.1
2.12	106964.1
2.64	120569.8
2.93	126198.6
3.15	130890.9
4.32	140507.3
4.62	146371.2
5.2	180853
5.64	200088.8
5.57	219088.9
5.93	258027.2

d (mm)	F (N)
6.23	276558.3
6.59	307052.1
7.26	326052.5
7.47	326756.8
8.05	316435.2
8.47	312443.5
12.9	297777.4
18.5	287120.8
23.4	274370.7
28.9	260940.1
35.02	249080.5
41.04	233450.6
44.98	223456.2
50.03	211289.2
55.67	199730.5
60	188828

a) Represente graficamente a evolução da força de extrusão com o deslocamento do punção.

b) Identifique no gráfico da alínea anterior as energias envolvidas no processo de extrusão.

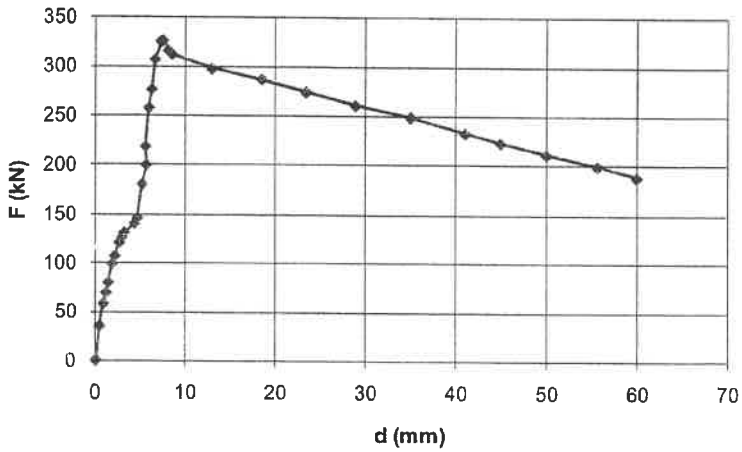
c) Estime o factor de atrito, m, na interface entre o varão e o contentor de extrusão.

Informações adicionais relativas ao material:

Tensão limite de elasticidade do aço inoxidável (X5CrNi1810), $\sigma_e = 390\,\text{MPa}$.

Resolução

a) Considerando os valores experimentais registados durante a operação de extusão, a evolução da força de extrusão com o deslocamento do punção é a que se encontra representada na figura seguinte.



b) Na extrusão directa o material é colocado no interior de um contentor e devido à acção de um punção é forçado a passar através do orifício da matriz. No decurso desta operação existe movimento relativo entre o material e as paredes do contentor e consequentemente atrito ao longo da interface de contacto. O atrito é responsável por um aumento considerável da força necessária para realizar a operação.

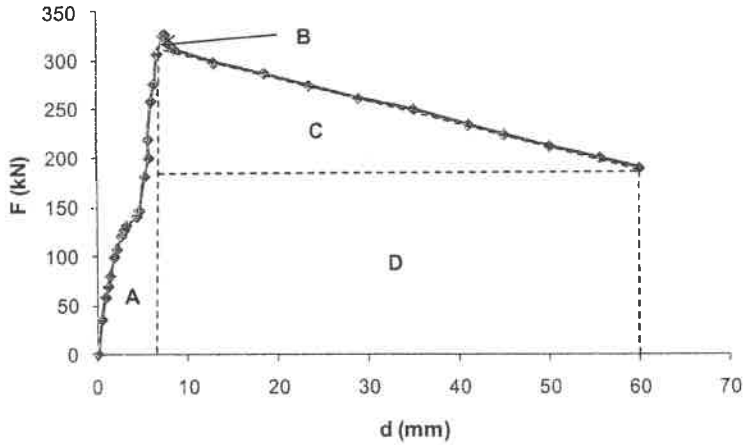
No gráfico da figura seguinte encontra-se representada a evolução da força de extrusão com o deslocamento do punção onde estão assinaladas as áreas A, B, C e D a que correspondem os valores de energia envolvidas no processo de extrusão:

A – Energia inicial que é necessário despender para acomodar o material do varão à geometria do contentor. Esta energia depende da folga existente entre o varão e as paredes do contentor;

B - Energia necessária para iniciar a extrusão do varão;

C – Energia necessária para vencer o atrito que se desenvolve na interface de contacto entre o varão e o contentor de extrusão, em virtude de existir movimento relativo entre o varão e as paredes do contentor;

D - Energia necessária para deformar plasticamente o material. Importa notar que se a operação se desenrolasse sem atrito, após a fase inicial de acomodação do varão à geometria do contentor e de início de extrusão do varão a força necessária para efectuar a extrusão seria constante;

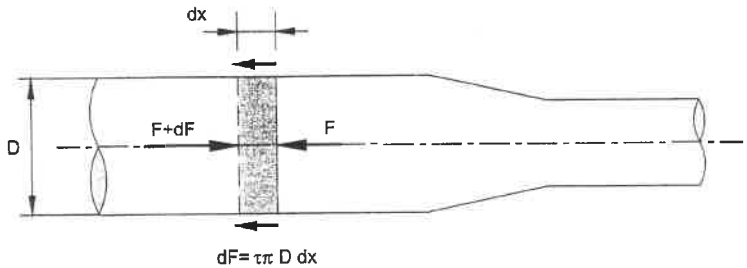


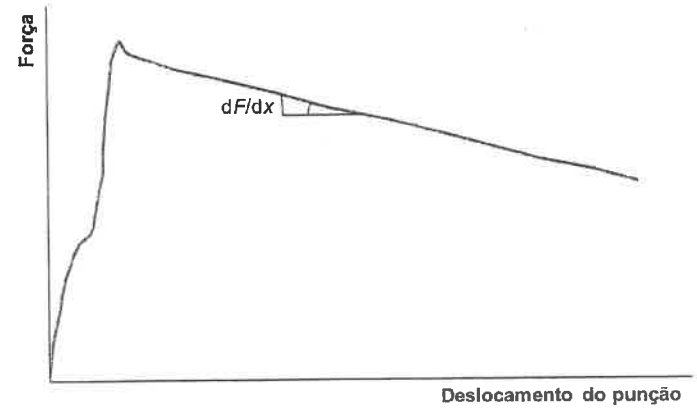
c) De acordo com o que foi exposto na alínea anterior, após a fase inicial da extrusão, a força necessária para realizar a extrusão pode ser decomposta em duas parcelas, a força para vencer o atrito desenvolvido na interface de contacto com as paredes do contentor e a força necessária à deformação plástica na região da matriz. A figura seguinte, em cima, ilustra as forças que actuam numa fatia elementar cilíndrica do varão de comprimento, dx. O incremento de força, dF, necessário para vencer o atrito na fatia elementar pode ser calculado através de,

$$dF = \tau_a \, \pi \, D \, dx \qquad (8.3.1)$$

em que τ_a são as tensões de corte devido ao atrito e D é o diâmetro do varão. As tensões corte devidas ao atrito ao longo do contentor de extrusão podem ser obtidas em função do declive da força de extrusão registada experimentalmente (ver figura seguinte), através de,

$$\tau_a = -\frac{1}{\pi D}\frac{dF}{dx} \qquad (8.3.2)$$





Considere-se os registos experimentais obtidos durante a operação de extrusão relativos à fase decrescente da força associada à existência de atrito, ou seja, a partir de um deslocamento do punção de 8.05 mm. Esta parte da curva força-deslocamento do punção pode ser aproximada através da recta,

$$F(x) = -2395.3\, x + 331818 \ \text{(N)} \qquad (8.3.3)$$

O declive desta recta, de acordo a figura anterior (em baixo), permite estimar o valor das tensões de corte devidas ao atrito na interface entre o varão e o contentor de extrusão, através da equação (8.3.2),

$$\tau_a = \frac{1}{\pi \times 15} \times 2395.3 = 50.83 \ \text{MPa} \qquad (8.3.4)$$

Considerando que a intensidade destas tensões de corte pode ser estimada através da lei de Prandtl, segundo a qual o valor das tensões de corte de atrito é uma fracção da tensão limite de elasticidade do material em corte puro, k,

$$\tau_a = mk = m\frac{\sigma_e}{2} \qquad (8.3.5)$$

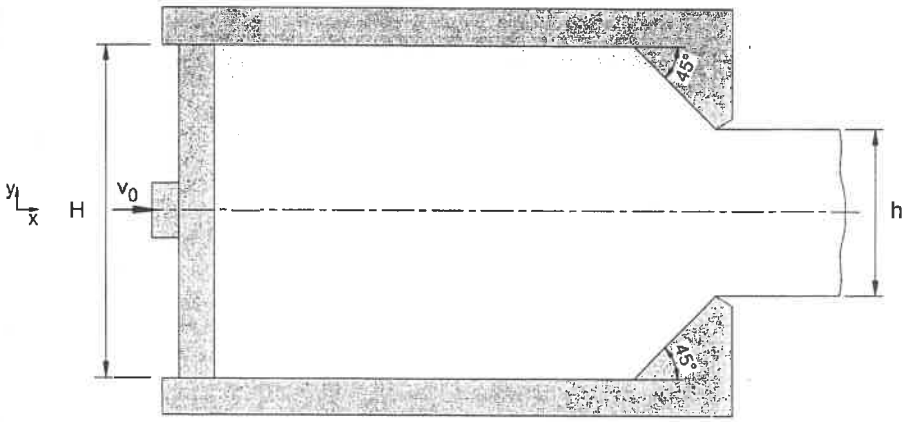
Estabelecendo a igualdade entre as equações (8.3.4) e (8.3.5) obtém-se a seguinte estimativa valor para o factor de atrito, m, na operação de extrusão,

$$m = 0.26 \qquad (8.3.6)$$

Importa salientar que, ao contrário do problema anterior de extrusão inversa, a interface de atrito com o contentor de extrusão desta operação ocorre no material que está rígido e ainda não encruou por deformação plástica. Este facto determina que a tensão limite de elasticidade considerada em (8.3.5) seja a tensão limite de elasticidade do material antes de ocorrer qualquer deformação plástica durante a operação de extrusão, $\sigma_e = 390$ MPa.

Problema 8.4

Considere a operação de extrusão directa com uma relação de extrusão $R = 2$, representada na figura seguinte, que se realiza em condições de deformação plana devido à relação geométrica b/H. A altura do componente é $H = 10$ mm, o comprimento de contacto com o contentor de extrusão é $L_0 = 20$ mm e a largura é $b = 100$ mm. Sabe-se que a tensão limite elasticidade do material é $\sigma_e = 20$ MPa. Durante a operação a velocidade do êmbolo de extrusão é de $v_0 = 5$ mm/s.



a) Proponha uma solução limite superior e construa o respectivo hodógrafo.

b) Determine o valor de pressão máxima que é necessário para realizar a operação de extrusão, admitindo que não existe atrito entre o material e as paredes do contentor.

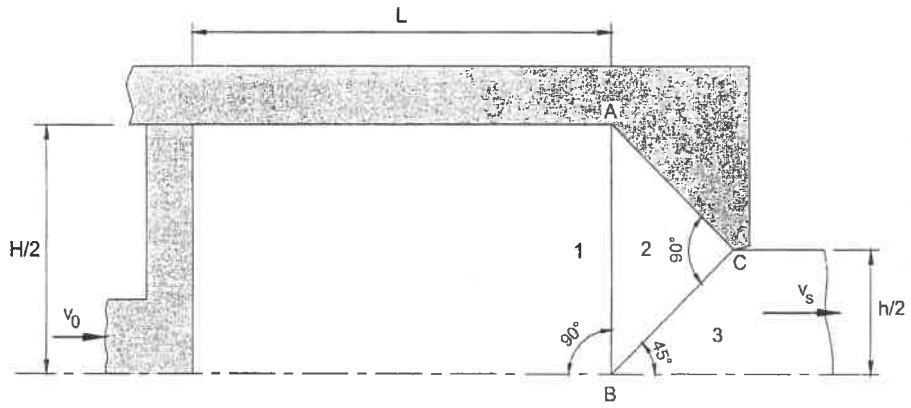
c) Repita a alínea anterior considerando que a operação é efectuada em condições de atrito máximo, $\tau_a = k$.

d) Determine o acréscimo de potência que é necessário fornecer para realizar a extrusão com atrito relativamente à extrusão sem atrito.

e) Determine a força de extrusão através do método do limite superior nas condições da alínea b) e compare com o resultado proveniente da aplicação do método da energia uniforme.

Resolução

a) Considere a solução limite superior constituída por blocos rígidos, com velocidade constante, delimitados por superfícies de descontinuidade de velocidade da figura seguinte. A solução limite superior considera que a região em deformação plástica (zona 2) é definida por um triângulo delimitado pela zona de entrada (zona 1) pela zona de saída (zona 3).



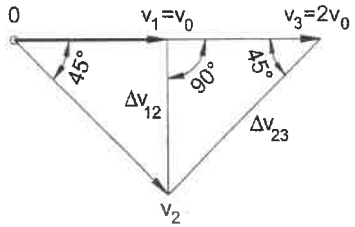
A cinemática do problema determina que o material adjacente ao êmbolo de extrusão (zona 1) se mova com a velocidade v_0 do êmbolo e que o material localizado na saída (zona 3) tenha a velocidade que resulta da condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos,

$$v_0 H/2b = v_s h/2b \Leftrightarrow v_0 R = v_s \Leftrightarrow v_s = 2v_0 \tag{8.4.1}$$

em que b é a largura do componente na direcção perpendicular ao plano da figura anterior.

Conhecidos os vectores velocidade dos blocos rígidos 1 e 3 e tendo presente as propriedades que caracterizam as superfícies de descontinuidade de velocidade, que delimitam os blocos rígidos, obtém-se a representação vectorial do campo de velocidades no hodógrafo da figura seguinte. Esta representação permite determinar a intensidade das descontinuidades de velocidade, Δv_i, e a velocidade no bloco rígido da zona 2, obtendo-se,

$$\begin{aligned} \Delta v_{12} &= v_0 \\ \Delta v_{23} &= \sqrt{2} v_0 \\ v_2 &= \sqrt{2} v_0 \end{aligned} \tag{8.4.2}$$



b) A aplicação do método do limite superior a soluções de blocos rígidos, sem interfaces de atrito com as ferramentas, estabelece que a potência necessária à operação é totalmente consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade. Torna-se então necessário calcular a área das duas descontinuidades de velocidade existentes entre os blocos rígidos 1 e 2, e entre os blocos rígidos 2 e 3.

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{Hb}{2} \\ S_{23} &= \frac{\sqrt{2}}{4} Hb \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

em que b é a largura do componente na direcção perpendicular ao plano da figura.

Em face do exposto é possível estabelecer a seguinte igualdade entre a potência a fornecer para realizar a operação de extrusão e a potência consumida nas descontinuidade de velocidade,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{ext} = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{Idv}$$

$$\begin{aligned} pv_0Hb &= 2\times\sum_{i=1}^{2} k\,|\Delta v_i|S_i \\ &= 2k(\Delta v_{12}S_{12} + \Delta v_{23}S_{23}) \\ &= 2k\left(v_0\frac{Hb}{2} + \sqrt{2}v_0\frac{\sqrt{2}}{4}Hb\right) \\ &= 2kv_0Hb \end{aligned} \qquad (8.4.4)$$

que permite obter a seguinte estimativa da pressão de extrusão,

$$p = 2k \qquad (8.4.5)$$

Considerando os dados do problema determina-se a potência fornecida pelo êmbolo de extrusão através do termo do primeiro membro da equação (8.4.4),

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{ext} = 20\times5\times10^{-3}\times10\times150 = 150\ \text{W} \qquad (8.4.6)$$

e a pressão que é necessário aplicar (8.4.5),

$$p = 20\ \text{MPa} \qquad (8.4.7)$$

Importa referir que a inexistência de atrito na interface material-ferramenta determina que tanto a pressão como a potência de extrusão sejam independentes do comprimento do bilete dentro do contentor de extrusão, L, e consequentemente constantes durante a operação de fabrico.

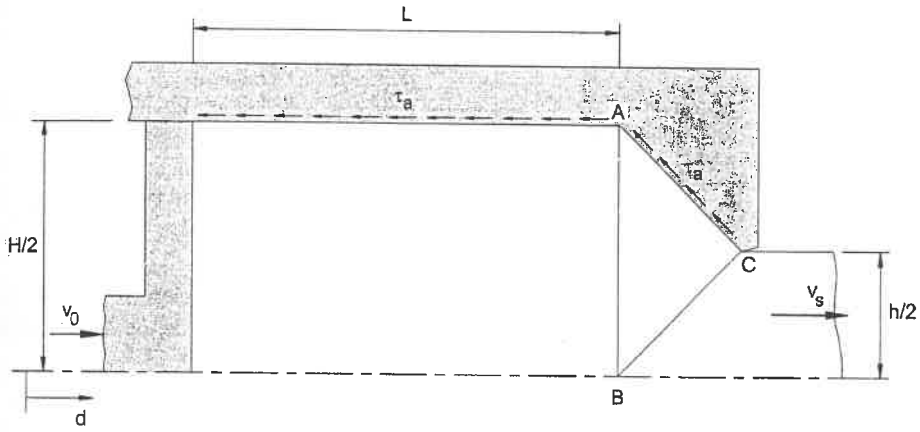
c) Considerando agora, a existência de atrito máximo ($\tau_a = k$) ao longo do contentor e na parte inclinada da matriz de extrusão, da aplicação do método do limite superior a soluções de blocos rígidos resulta que para determinar a potência necessária à operação é necessário adicionar à potência consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade (segundo membro de (8.4.4)) a potência dissipada nas interfaces de atrito com a ferramenta,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{ext} = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{Idv} + \left(\frac{dW}{dt}\right)_{a}$$

$$p\,Hb\,v_0 = 2\times\sum_{i=1}^{2} k\,|\Delta v_i|S_i + 2\times\sum_{j=1}^{2}\tau_a\,|\Delta v_j|S_j \qquad (8.4.8)$$

em que $|\Delta v_j|$ representa a velocidade relativa de escorregamento na superfície S_j de interface entre o material e a ferramenta.

Para contabilizar a potência dissipada por atrito é necessário conhecer as áreas das interfaces de atrito e a intensidade das velocidades de escorregamento do material relativamente à ferramenta.



As interfaces de atrito entre o componente e a ferramenta situam-se ao longo da parede do contentor e na parte cónica da matriz de extrusão, conforme se encontra ilustrado na figura anterior. Admitindo que o comprimento de contacto de atrito na parede do contentor é num dado instante L e sabendo que o comprimento de contacto de atrito na matriz de extrusão é $\overline{AC}$, a área das superfícies de atrito contabiliza-se do seguinte modo,

$$\begin{aligned} S_{\text{contacto contentor}} &= Lb \\ S_{\text{contacto matriz}} &= \overline{AC}\,b = \frac{\sqrt{2}}{4}Hb \end{aligned} \qquad (8.4.9)$$

em que b é a largura do componente. Note-se que, enquanto o comprimento de contacto do componente na matriz $\overline{AC}$ se mantém constante durante a operação, o comprimento de contacto entre o componente e a parede do contentor diminui linearmente com o deslocamento do êmbolo d,

$$L = L_0 - d \tag{8.4.10}$$

onde L_0 é o comprimento inicial do bilete.

As intensidades das velocidades de escorregamento do componente relativamente à ferramenta são as velocidades dos blocos rígidos 1 e 2, determinadas anteriormente,

$$\begin{aligned} v_{\text{relativa contentor}} &= v_1 = v_0 \\ v_{\text{relativa matriz}} &= v_2 = \sqrt{2} v_0 \end{aligned} \tag{8.4.11}$$

Nestas condições a potência dissipada por atrito contabiliza-se de acordo com a segunda parcela do segundo membro da equação (8.4.8) do seguinte modo,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_a = 2 \times \sum_{j=1}^{2} \tau_a \left|\Delta v_j\right| S_j = 2k \times \left(v_0 L b + \sqrt{2} v_0 \frac{\sqrt{2}}{4} H b \right) = 2k v_0 \left(L + \frac{H}{2} \right) b \tag{8.4.12}$$

A potência total consumida obtém-se através da adição desta parcela associada ao atrito com a potência consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade (segundo membro de (8.4.4)),

$$\begin{aligned} p\, H b\, v_0 &= 2k v_0 H b + 2k v_0 \left(L + \frac{H}{2} \right) b \\ &= 2k v_0 \left(L + \frac{3}{2} H \right) b \end{aligned} \tag{8.4.13}$$

Este balanço permite obter a seguinte estimativa da pressão de extrusão em função do comprimento de contacto, L,

$$p = 3k + 2k \frac{L}{H} \tag{8.4.14}$$

A análise das expressões anteriores permite concluir que tanto a potência como a pressão de extrusão tomam valores máximos no início da operação após a acomodação do material à geometria do contentor e saída através da matriz de extrusão. É aliás apartir

deste instante que a solução de limite superior proposta é válida. Em face do exposto, este instante ocorre quando o êmbolo tiver movimentado uma quantidade de material correspondente ao enchimento da cavidade da matriz de extrusão, ou seja, quando,

$$d\, H\, b = \frac{3}{4} h^2\, b \tag{8.4.15}$$

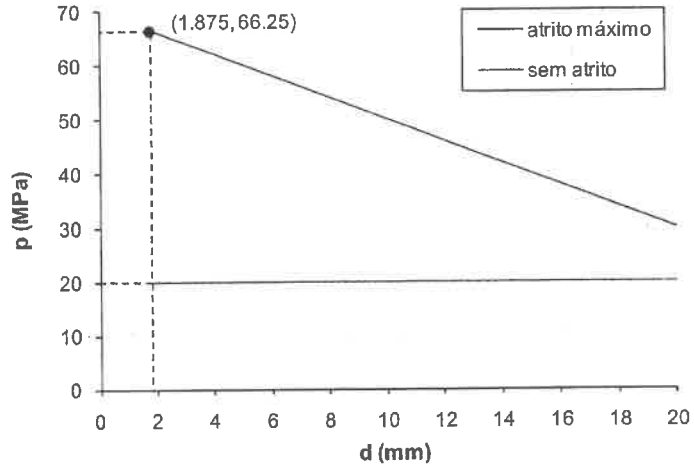
a que corresponde um deslocamento do êmbolo $d = 1.875$ mm para o qual o comprimento de contacto vale $L = 18.125$ mm, de acordo com (8.4.10).

Consequentemente, considerando os dados do problema, a potência máxima para realizar a operação determina-se do seguinte modo,

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{ext} = 20 \times 5 \times 10^{-3} \times \left(18.125 + \frac{3}{2} \times 10 \right) \times 150 = 496.875 \text{ W} \tag{8.4.16}$$

sendo o correspondente valor de pressão a aplicar através do êmbolo de extrusão,

$$p = \frac{3}{2} \times 20 + 20 \times \frac{18.125}{10} = 66.25 \text{ MPa} \tag{8.4.17}$$



Substituindo a equação (8.4.10) na equação (8.4.14) obtém-se a expressão que permite obter a evolução da pressão de extrusão em função do deslocamento do êmbolo,

$$p = 3k + 2k\frac{L_0 - d}{H} \qquad (8.4.18)$$

que se encontra representada na figura anterior. Encontra-se igualmente representada a pressão de extrusão em condições de atrito nulo obtida na alínea anterior em (8.4.7). É interessante observar que no final da operação de extrusão a diferença entre os valores de pressão representados deve-se ao atrito existente na zona cónica da matriz.

É ainda interessante verificar que a pressão de extrusão obtida em condições de atrito máximo (8.4.13) é idêntica à pressão de extrusão obtida no problema 6.1, em iguais condições de atrito (6.1.16). Note-se que no problema 6.1 foi analisada uma operação de extrusão directa, com a mesma relação de extrusão $R = 2$, com matrizes direitas na qual se desenvolve uma zona morta que é responsável pelo escorregamento do material para o interior da matriz segundo um semi-ângulo de abertura igual a 45°. Estes resultados permitem efectuar a analogia entre as zonas mortas e as ferramentas com atrito máximo.

d) O acréscimo de potência que é necessário fornecer para realizar a operação com atrito face à mesma operação sem atrito foi determinado em (8.4.12). Este acréscimo de potência relativamente à potência que é necessário fornecer para realizar a operação sem atrito pode ser contabilizado do seguinte modo,

$$\frac{\left(\frac{dW}{dt}\right)_a}{\left(\frac{dW}{dt}\right)_{ext}} = \frac{2kv_0\left(L+\frac{H}{2}\right)b}{2kv_0Hb} = \frac{\left(L+\frac{H}{2}\right)}{H} = \frac{L}{H}+\frac{1}{2} \qquad (8.4.19)$$

e) A força necessária para realizar a operação determina-se através do produto da pressão de extrusão determinada em (8.4.5) pela área do êmbolo A_0 do seguinte modo,

$$F = p\,A_0 = 2k\,Hb = 20\times10\times150 = 30000\ \text{N} \qquad (8.4.20)$$

De acordo com o método da energia uniforme a força necessária para efectuar a operação de extrusão directa estima-se através de (8.1.12). Como este material não apresenta encruamento o valor médio da tensão efectiva no interior do material é $\sigma_{unif} = 2k$. É então somente necessário determinar a extensão efectiva imposta ao componente no final da operação $\bar{\varepsilon}$. Como a largura do componente b se mantêm constante durante a operação de extrusão, a deformação ocorre em condições de

deformação plana na direcção z (perpendicular ao plano xy) e a extensão efectiva que é alcançada no instante final, determina-se através de,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{H}{h}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln 2 \qquad (8.4.21)$$

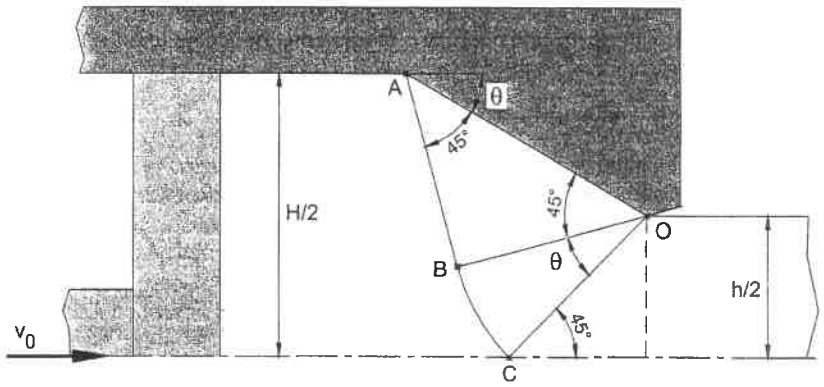
Então, de acordo com (8.1.12) a força de extrusão necessária à deformação plástica do componente, não contabilizando o trabalho redundante, nem o atrito é,

$$F = 20\times\frac{2}{\sqrt{3}}\ln 2\times10\times150 = 24011.3\ \text{N} \qquad (8.4.22)$$

A comparação deste valor com o resultado obtido em (8.4.20) permite concluir que a solução obtida através do método do limite superior corresponde a uma estimativa do valor da força de extrusão cujo valor obtido é superior ao valor obtido através do método da energia uniforme. Estes resultados são coerentes com o método do limite superior fornecer valores de potência, pressão ou força iguais ou superiores aos valores reais do processo, enquanto que o método da energia uniforme por se tratar de um método energético que na sua génese, como considerado neste problema, só contabiliza o trabalho de deformação plástica onde os efeitos associados ao atrito e à deformação redundante não são considerados, fornece soluções inferiores às reais.

Problema 8.5

Considere a operação de extrusão plana, sem atrito, em contentores de parede inclinada, de um material com uma tensão limite de elasticidade σ_e, que se representa na figura seguinte.



Para o campo de linhas de escorregamento proposto determine:

a) Uma expressão que permita relacionar a relação de extrusão, R, ou o coeficiente de redução, r, com o semi-ângulo de inclinação da fieira, θ. Em face do resultado obtido discuta a validade do campo de linhas de escorregamento proposto.

b) O valor da pressão, adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade do material $2k$, necessário para realizar a operação de extrusão.

c) O hodógrafo. Represente no plano físico as linhas de fluxo. Calcule a percentagem da potência de deformação que é consumida nas descontinuidades de velocidade.

Admita, agora, que a operação representada na figura passa a ser de trefilagem. Nestas condições, determine:

d) A força necessária à operação de trefilagem. Compare o valor da pressão média desta operação com o obtido para a extrusão.

Resolução

a) A solução proposta caracteriza-se por o campo de linhas de escorregamento depender directamente do semi-ângulo de inclinação da fieira. Quer isto dizer que para cada semi-ângulo θ apenas existe uma relação de extrusão, cujo campo de linhas de escorregamento é o que se mostra na figura.

Começando por relacionar o coeficiente de redução r com a relação de extrusão R, têm-se,

$$r = \frac{H-h}{H} = 1 - \frac{1}{R} \tag{8.5.1}$$

De acordo com a geometria da operação (ver figura do enunciado) podem estabelecer-se as seguintes relações geométricas,

$$\begin{aligned} H - h &= 2\,\overline{AO}\,\operatorname{sen}\theta \\ h &= 2\,\overline{OC}\,\operatorname{sen}45 = \overline{OC}\sqrt{2} \\ \overline{AO} &= \frac{\overline{OC}}{\operatorname{sen}45} = \overline{OC}\sqrt{2} \end{aligned} \tag{8.5.2}$$

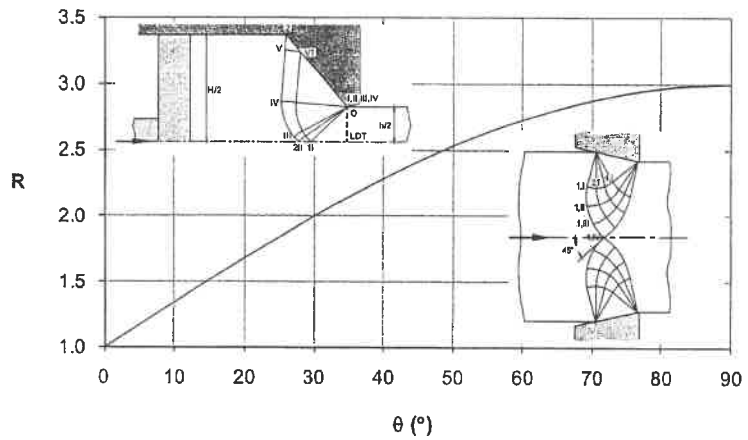
Substituindo estas relações na equação (8.5.1), obtém-se,

$$r = \frac{2\,\overline{AO}\,\operatorname{sen}\theta}{2\,\overline{AO}\,\operatorname{sen}\theta + \overline{OC}\sqrt{2}} = \frac{2\,\overline{AO}\,\operatorname{sen}\theta}{2\,\overline{AO}\,\operatorname{sen}\theta + \overline{AO}} = \frac{2\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta + 1}$$

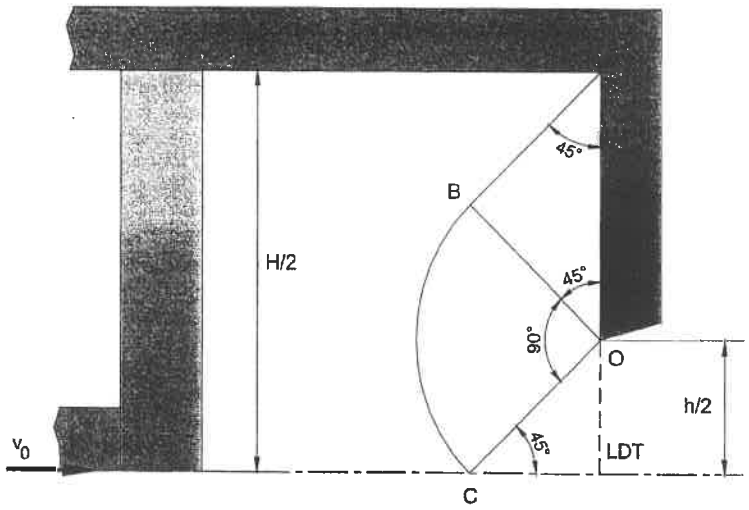
ou, (8.5.3)

$$R = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - \dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta + 1}} = \frac{2\operatorname{sen}\theta + 1}{2\operatorname{sen}\theta + 1 - 2\operatorname{sen}\theta} = 2\operatorname{sen}\theta + 1$$

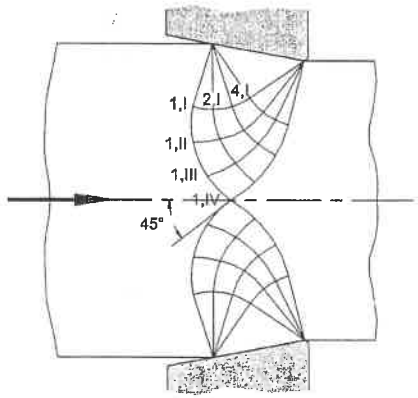
Esta condição permite efectuar a representação gráfica da variação da relação de extrusão com o semi-ângulo de inclinação da fieira para a solução proposta ilustrada na figura seguinte.



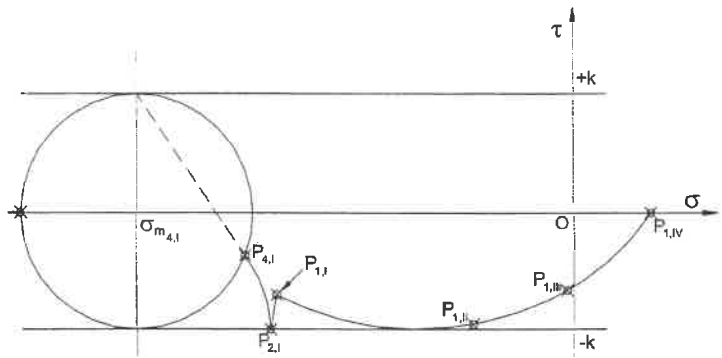
Como se pode verificar através do gráfico da figura anterior, desde que se verifique a relação dada por (8.5.3), o campo de linhas de escorregamento é válido para semi-ângulos de inclinação da parede da fieira variando entre 0° (ou ligeiramente superior para haver extrusão) e 90°, correspondendo a solução deste último caso à conhecida solução de Lee para $R = 3$, que se mostra na figura seguinte.



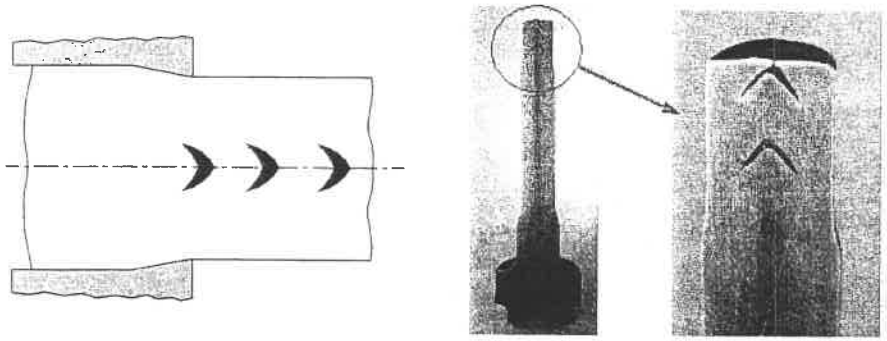
Analisada a validade da solução expressa pela igualdade (8.5.3), interessa agora examinar os casos em que essa igualdade não se verifica. Assim, quando $R < 2\,\mathrm{sen}\,\theta + 1$ o campo de linhas de escorregamento será o que se apresenta na figura seguinte, muito semelhante ao que pode ser utilizado na compressão com pratos planos de menor dimensão que a peça, para relações entre a largura do cunho e espessura da peça no intervalo $1 < H/L < 8.74$.



Este campo de linhas de escorregamento caracteriza-se por induzir junto à linha de simetria tensões normais de tracção a actuar segundo planos verticais. Este conclusão pode ser constatada no plano de tensões que se mostra na figura seguinte, no qual se pode verificar que o pólo do ponto 1IV se encontra na zona positiva do eixo dos $\sigma\sigma$, de modo a que a condição de equilíbrio das forças horizontais seja respeitada, ou seja, $\sum F_h = 0$.



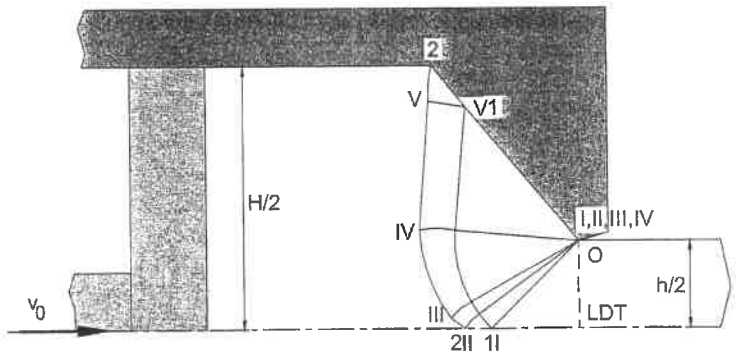
Uma das consequências desta tensão de tracção junto à linha de horizontal encontra-se representada na figura seguinte, onde se mostra uma fractura interior em forma de seta na secção longitudinal do material extrudido (este defeito na terminologia anglo-saxónica é conhecido por 'central burst' ou 'chevron crack'). Trata-se, portanto, de um defeito que não sendo visível, requer que sejam utilizados testes não destrutivos, tais como raios xx ou ultra-sons, para atestar a sanidade das peças produzidas.



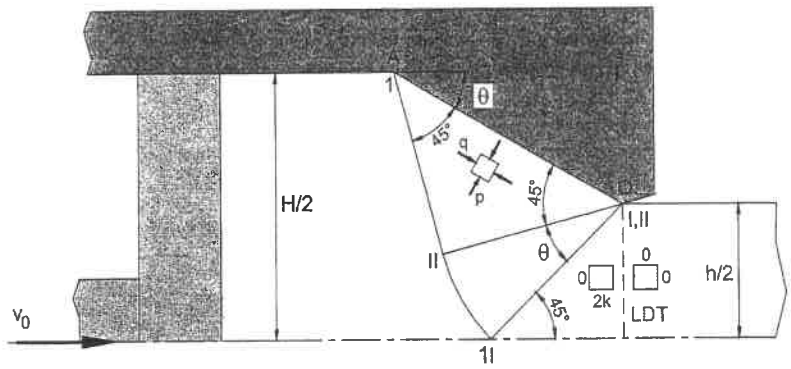
Como conclusão pode dizer-se que este tipo de defeito surge na redução de materiais com baixa capacidade de deformação, como é o caso de metais fortemente deformados a frio, já que a deformação a frio reduz a sua capacidade de encruamento. No caso de operações multi-passo este defeito geralmente ocorre para ligeiras reduções precedidas por reduções pesadas. A propensão ao aparecimento destes defeitos pode ser reduzida,

- Aumentando a redução da extrusão;
- Reduzindo o semi-ângulo da fieira;
- Reduzindo o atrito na matriz;
- Restituindo a capacidade de deformação plástica do material através de operações de recozimento, ou seleccionando um material com características mecânicas mais adequadas.

Finalmente, na figura seguinte mostra-se o campo de linhas de escorregamento que se activa quando a relação de extrusão é superior à condição expressa por (8.5.3), ou seja, quando $R > 2\,\mathrm{sen}\,\theta + 1$.



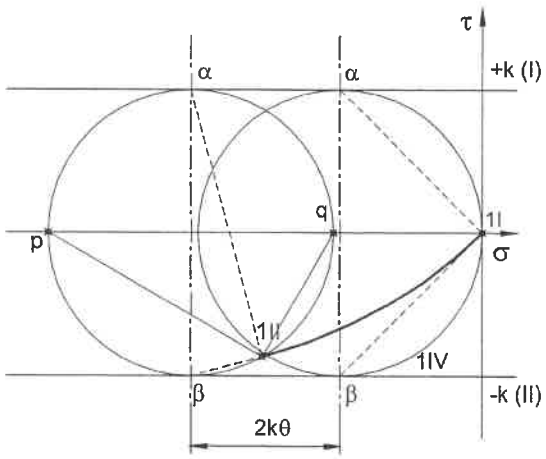
b) Para determinar o valor da pressão necessária à extrusão tem que se conhecer o plano das tensões. Na figura seguinte apresenta-se o plano físico e o estado de tensão associado à LDT que separa a zona em deformação plástica da zona rígida de material já extrudido.



O plano das tensões representado na figura seguinte inicia-se com a marcação do círculo de Möhr tangente à origem, representando o estado de tensão da zona triangular que faz fronteira com a LDT. Para determinar o estado de tensão do triângulo rígido que faz fronteira com a parede inclinada da fieira, por exemplo representado pelo ponto 1II, conhecendo-se o estado de tensão do ponto 1I, pelas equações de Hencky pode

determinar-se a tensão média do estado de tensão do ponto 1II, uma vez que ao longo da linha α, a variação angular das tangentes à linha diferem de um ângulo $d\phi = -\theta$, ou seja,

$$(d\sigma_m)_{1II} = -2k\theta \tag{8.5.4}$$



Nestas condições, a tensão que se desenvolve num elemento de volume orientado com a parede inclinada da fieira (ver plano físico representado anteriormente) será,

$$\begin{aligned} p &= 2k(1+\theta) \\ q &= 2k\theta \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

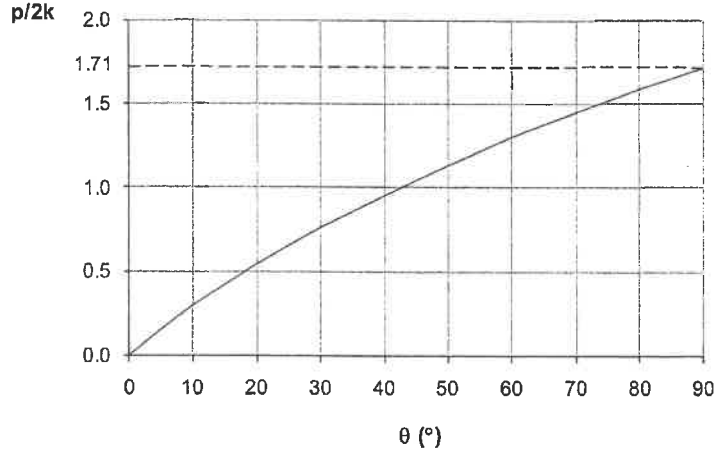
A pressão média de extrusão, p_e, é calculada a partir da força horizontal que se desenvolve no processo do seguinte modo,

$$\begin{aligned} p_e = \frac{F_h}{Hb} &= \frac{2p\,\overline{AO}\,\operatorname{sen}\theta b}{Hb} \\ &= \frac{p(H-h)}{H} \\ &= \frac{2k(1+\theta)(H-h))}{H} \\ &= 2k(1+\theta)\left(1-\frac{1}{R}\right) \end{aligned} \tag{8.5.6}$$

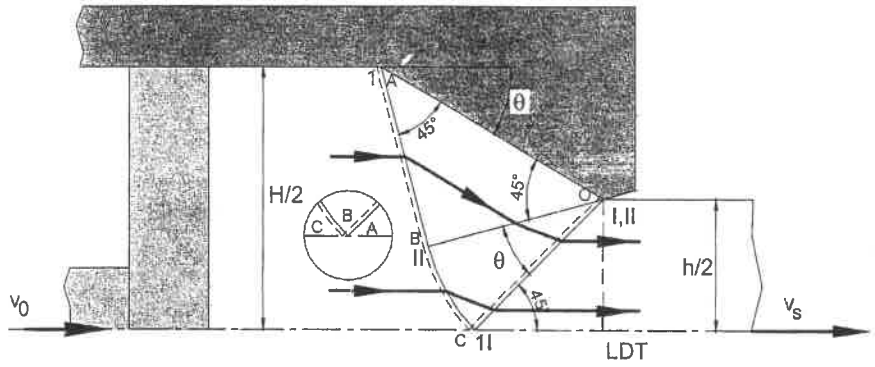
Substituindo na anterior expressão o resultado de (8.5.3), que relaciona a relação de extrusão com o semi-ângulo de inclinação da parede da fieira, vem,

$$\frac{p_e}{2k} = (1+\theta)\frac{2\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta+1} \tag{8.5.7}$$

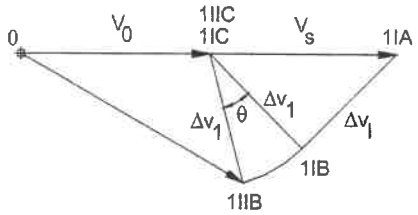
Na figura seguinte apresenta-se a variação da pressão média de extrusão, adimensionalizada com a tensão limite de elasticidade, com o semi-ângulo de inclinação da parede da fieira, θ, dada pela equação anterior (8.5.7).



c) Antes de se traçar o hodógrafo torna-se necessário tornar a solução de linhas de escorregamento num campo de velocidades cinematicamente admissível, o que se consegue através da introdução da LDV que se mostra na figura seguinte.



Nestas condições, o hodógrafo é o que se apresenta na figura seguinte. A partir do campo de velocidades representado no hodógrafo é possível traçar as linhas de fluxo do material, que indicam as direcções de escoamento ou movimentação do material em deformação plástica representadas na figura anterior. Estas linhas foram obtidas traçando as tangentes ao vector velocidade em cada ponto.



Para se determinar a percentagem da potência que é consumida nas linhas de descontinuidade de velocidade, começa-se por determinar o valor de potência necessária à extrusão, o qual é dado por,

$$P_{ext} = p_e\, H\, b\, v_0 = 2k(1+\theta)\frac{2\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta+1} H\, b\, v_0 \qquad (8.5.8)$$

No que se refere à potência que é consumida nas linhas de descontinuidade, sabe-se que,

$$P_{ldv} = \sum_{n=1}^{N} k\, S_n\, |\Delta v_n| = k\left(S_{AB}\Delta v_{AB} + S_{BC}\Delta v_{BC} + S_{CO}\Delta v_{CO}\right) \qquad (8.5.9)$$

em que k é a tensão limite de elasticidade ao corte e $|\Delta v_n|$ é o valor da descontinuidade de velocidade ao longo da superfície S_n.

As áreas associadas às linhas de descontinuidade de velocidade são dadas por,

$$\begin{aligned} S_{AB} &= S_{CO} = \sqrt{2}\frac{h}{2}b \\ S_{BC} &= \sqrt{2}\frac{h}{2}\theta\, b \end{aligned} \qquad (8.5.10)$$

Enquanto que as descontinuidades de velocidade podem ser calculadas através de manipulação trigonométrica ao nível do hodógrafo, sendo dadas por,

$$\Delta v_{AB} = \Delta v_{BC} = \Delta v_{CO} = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\, v_0 \qquad (8.5.11)$$

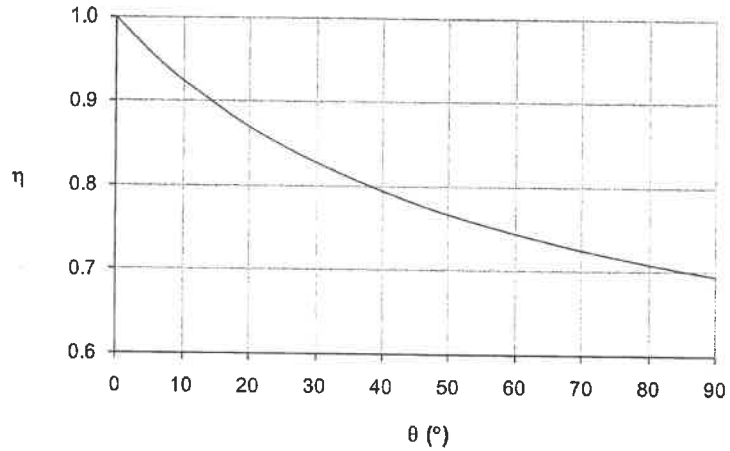
Substituindo ambos os resultados na equação (8.5.9), obtém-se a potência dissipada nas LDV,

$$\begin{aligned} P_{ldv} &= k(2S_{AB} + S_{BC})\Delta v = k\left(2\sqrt{2}\frac{h}{2}b + \sqrt{2}\frac{h}{2}\theta b\right)\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\, v_0 \\ &= khb\,(2+\theta)\operatorname{sen}\theta\, v_0 \\ &= k\,(2+\theta)\frac{\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta+1} Hbv_0 \end{aligned} \qquad (8.5.12)$$

Então, a parcela de potência que é consumida nas LDV (de notar que a potência dada por (8.5.12) refere-se apenas a metade da geometria da operação), relativamente à potência de extrusão é dada por,

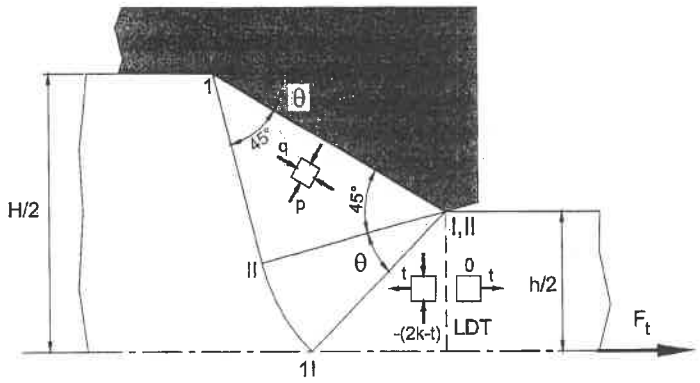
$$\eta = \frac{P_{ldv}}{P_{ext}} = \frac{2k(2+\theta)\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta+1} Hbv_0}{2k(1+\theta)\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta+1} Hbv_0} = \frac{(2+\theta)}{2(1+\theta)} \qquad (8.5.13)$$

A figura seguinte apresenta graficamente a equação anterior (8.5.13), ilustrando a percentagem da potência de extrusão que é dissipada nas linhas de descontinuidade de velocidade em função do ângulo de inclinação da fieira, θ. A sua análise permite constatar que quanto maior for o ângulo de inclinação da fieira e por isso também a relação de extrusão, menor é a percentagem de potência consumida nas descontinuidades de velocidade, sendo, portanto, maior a parcela de potência consumida na deformação gradual ou continua que se processa na região do leque (zona BCO).



Finalmente, deve chamar-se à atenção para o facto de esta solução ser do método das linhas de escorregamento e o valor atrás encontrado apenas indicar a quantidade de energia dissipada devido às linhas de descontinuidade de velocidade que integram o campo de linhas de escorregamento.

d) A figura seguinte apresenta a operação de trefilagem, onde se pode ver a força de trefilagem aplicada. Como a relação geométrica do problema e as condições de fronteira não sofreram alterações, o campo de linhas de escorregamento permanece igual ao da extrusão.



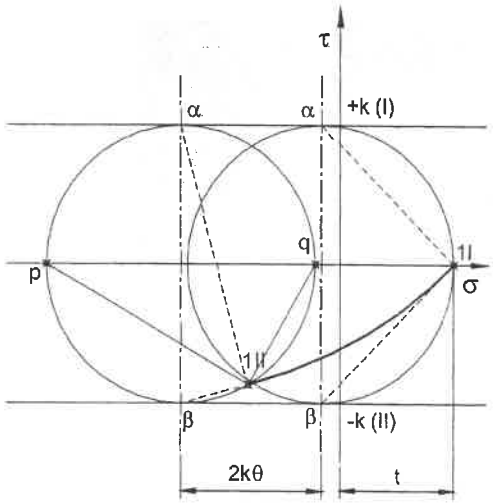
Para determinar a força de trefilagem, F_t, é necessário conhecer o valor da pressão média da operação, p_t, uma vez que a força é dada por,

$$F_t = p_t hb \tag{8.5.14}$$

Para se calcular o valor da pressão média da operação é necessário determinar o plano das tensões. À semelhança do caso da extrusão, o plano das tensões começa com a definição do estado de tensão da zona triangular de saída, a qual está separada do material extrudido através de uma LDT. A força de trefilagem origina uma tensão normal de tracção segundo uma direcção normal à LDT, levando a que os estados de tensão em cada uma das zonas da LDT sejam os representados na figura anterior, sendo o da zona que está em domínio plástico obtido a partir do critério de plasticidade de Tresca,

$$\begin{aligned} \sigma_n &= t \\ \sigma_t &= -(2k - t) \end{aligned} \tag{8.5.15}$$

Conhecido o estado de tensão da zona triangular na região de saída da fieira, o plano das tensões traça-se seguindo a mesma metodologia usada para o da extrusão, resultando num plano semelhante, apenas diferenciado pela posição do eixo dos $\tau\tau$, o qual depende do valor da tensão de tracção de trefilagem, t, conforme se pode ver na figura seguinte.



Deste modo, as tensões que actuam na parede inclinada da fieira são dadas por (nos cálculos que se seguem usou-se o valor relativo para representar as tensões),

$$\begin{aligned} p &= t - 2k(\theta + 1) \\ q &= t - 2k\theta \end{aligned} \qquad (8.5.16)$$

Deste modo, a tensão de trefilagem, t, é calculada a partir do equilíbrio de forças horizontais do processo, o qual é dado por,

$$\begin{aligned} &\sum F_h = 0 \\ &t\frac{h}{2}b = -p\,\overline{AO}\,\text{sen}\,\theta b \\ &t\frac{h}{2} = -p\frac{(H-h)}{2\text{sen}\,\theta}\text{sen}\,\theta \\ &t\frac{h}{2} = -[t - 2k(1+\theta)]\frac{(H-h)}{2} \\ &\frac{t}{2k} = \frac{p_t}{2k} = (1+\theta)\frac{2\text{sen}\,\theta}{2\text{sen}\,\theta + 1} \end{aligned} \qquad (8.5.17)$$

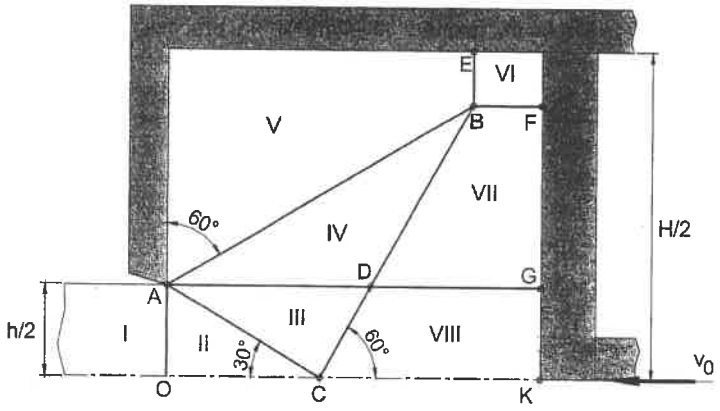
Conclui-se assim que a pressão de extrusão e de trefilagem são iguais, conforme se pode comprovar ao comparar os resultados de (8.5.7) e (8.5.17).

Assim, para ferramentas sem atrito, se a redução for igual a pressão de extrusão e de trefilagem são iguais, contudo a tensão de trefilagem terá de ser inferior a 2k para evitar a deformação plástica localizada do material extrudido à saída da fieira e, desse modo, inviabilizar a operação de trefilagem.

Outra conclusão que pode ser tirada tem a ver com o desgaste das ferramentas quando existir atrito. De facto, quando se combina no processo a acção do êmbolo extrusor com a aplicação de uma força de tracção à saída, verifica-se que a pressão que actua sobre a parede inclinada da fieira reduz-se e consequentemente também o desgaste.

Problema 8.6

Considere a operação de extrusão plana, sem atrito, de um material com uma tensão limite de elasticidade σ_e, que se representa na figura seguinte.



Neste caso a solução apresentada para resolver o problema consiste num conjunto de linhas de descontinuidade de tensão (LDT) que irão conduzir a uma solução limite inferior. Tendo em atenção as propriedades das LDT determine:

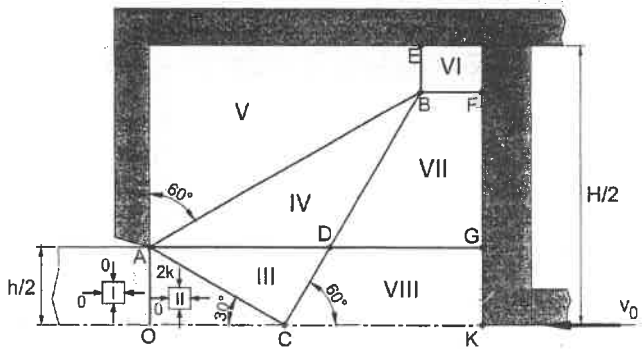
a) O estado de tensão em cada um dos subdomínios definidos pelas LDT. Indique ainda os domínios que se encontram em domínio elástico e os que estão em domínio plástico.

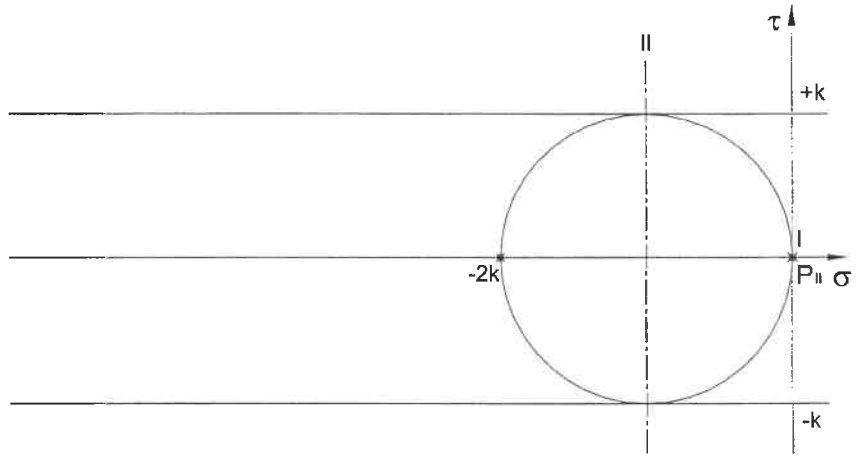
b) Uma expressão que em função da relação de extrusão permita calcular a força de extrusão. Para a expressão que determinou indique os limites de validade em termos da relação de extrusão.

c) Para o limite inferior de aplicabilidade da solução o valor da pressão média de extrusão e compare-o com o da solução exacta.

Resolução

a) A solução proposta caracteriza-se por ser constituída apenas por LDTs, conduzindo, por isso, a uma solução estaticamente determinada, onde as condições de fronteira das tensões são verificadas, mas cinematicamente inadmissível, já que nem a incompressibilidade, nem as condições de fronteira das velocidades são asseguradas. Esta não é, portanto, uma solução exacta, mas uma solução limite inferior.

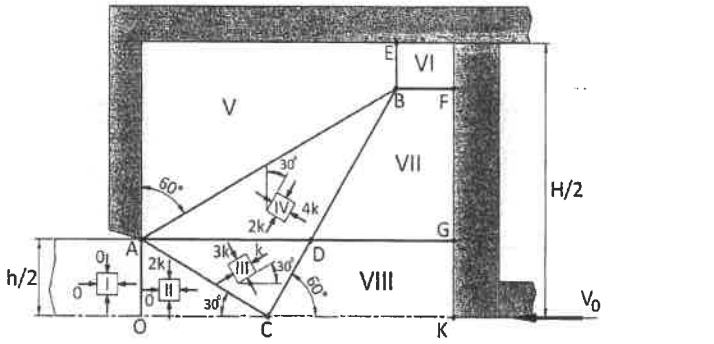


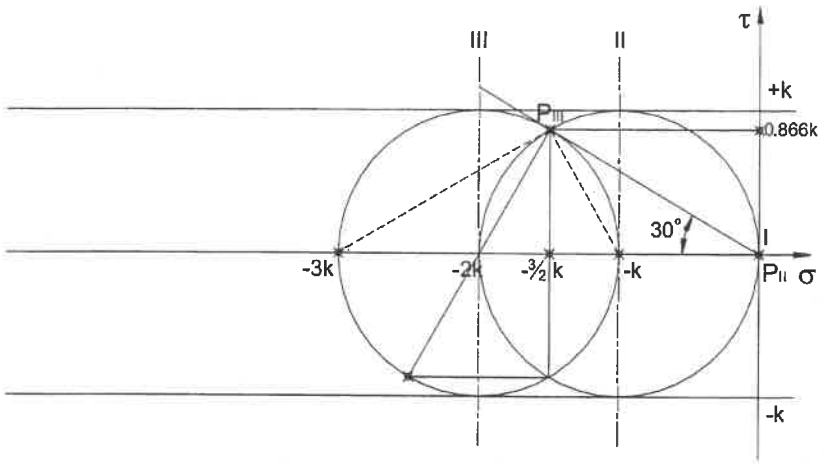


Para determinar o estado de tensão em cada um dos subdomínios, admite-se que a região I (zona de material já extrudido) não está sujeita a qualquer solicitação. Por outro lado, a LDT $\overline{OA}$ separa esta região da região II, a qual se admite estar em regime plástico. Nestas condições, o pólo da região II (P_{II}) encontra-se na origem, conforme se

mostra na figura anterior, onde se encontra representada a transição da região I para a região II no plano físico (em cima) e no plano das tensões (em baixo).

Uma vez conhecido o estado de tensão da região II para se determinar o da região III sabe-se que a LDT $\overline{AC}$ faz um ângulo de 30° com a horizontal. Então, fazendo passar uma paralela à LDT $\overline{AC}$ por P_{II} a intersecção com o círculo II permite encontrar o ponto que define a descontinuidade de tensão, ou seja, o ponto onde estado de tensão da região III intersecta o estado de tensão da região II. A figura seguinte ilustra esta transição no plano físico (em cima) e no plano das tensões (em baixo).





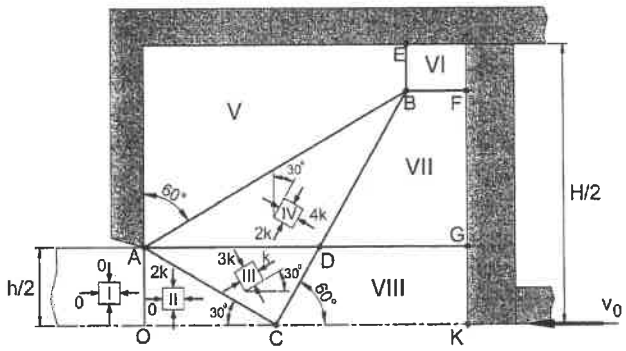
A posição de P_{III} localizar-se-á naturalmente na outra intersecção da recta paralela à LDT $\overline{AC}$ com o estado de tensão III. Contudo, como esta recta é tangente ao círculo III no

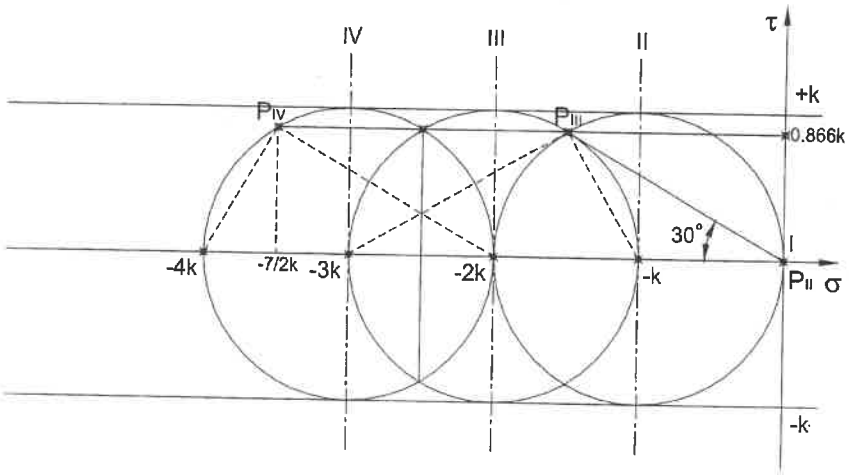
ponto que define a descontinuidade de tensão, o pólo (P_{III}) localiza-se exactamente neste ponto, ou seja, no ponto com as seguintes coordenadas,

$$\sigma_{P_{III}} = -k - k\cos 60 = -3/2\,k$$
$$\tau_{P_{III}} = k\,\mathrm{sen}\,60 = \sqrt{3}/2\,k \qquad (8.6.1)$$

Resulta assim que para a região III as tensões principais serão: $(\sigma_1)_{III} = -k$, aplicada numa superfície fazendo 30° com a direcção vertical e $(\sigma_3)_{III} = -3k$, aplicada numa superfície fazendo 30° com a direcção horizontal.

Conhecido o estado de tensão e o pólo da região III pode, agora, determinar-se o estado de tensão e respectivo pólo da região IV, fazendo passar por P_{III} uma linha horizontal (paralela à LDT $\overline{AD}$) e intersectando-o com o círculo que define o estado de tensão da região IV, conforme se ilustra na figura seguinte onde se encontra representada a transição da região III para a região IV no plano físico (em cima) e no plano das tensões (na página seguinte).





Deste modo, as coordenadas que definem a posição do pólo (P_{IV}) serão dadas por,

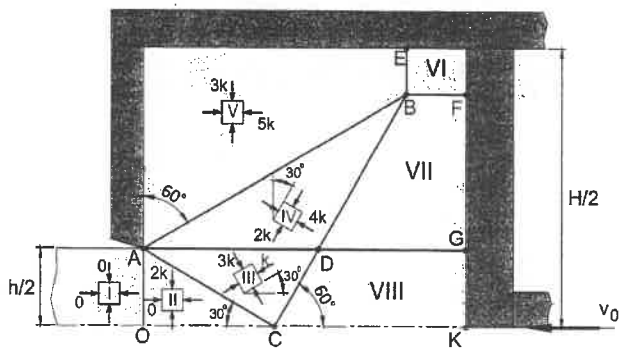
$$\sigma_{P_{IV}} = -3k - k\cos 60 = -7/2\,k$$
$$\tau_{P_{IV}} = k \operatorname{sen} 60 = \sqrt{3}/2\,k \qquad (8.6.2)$$

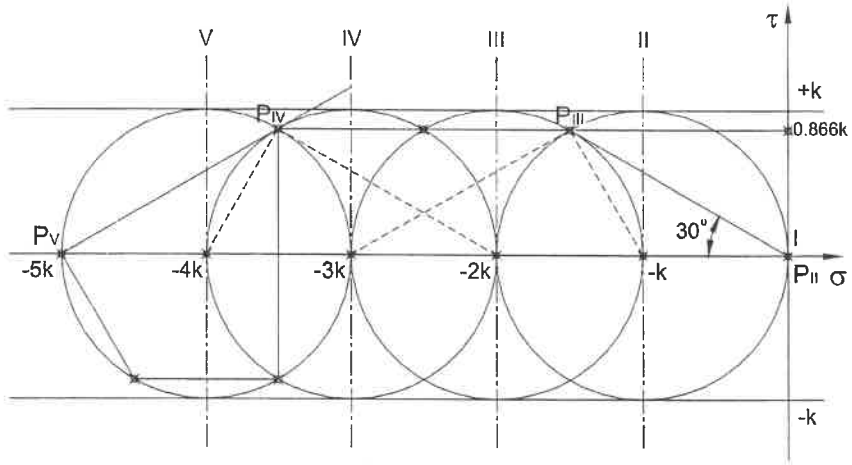
Levando a que para a região IV as tensões principais sejam: $(\sigma_1)_{IV} = -2k$, aplicada numa superfície fazendo 30° com a direcção horizontal e $(\sigma_3)_{IV} = -4k$, aplicada numa superfície fazendo 30° com a direcção vertical.

Para determinar o estado de tensão da região V sabe-se que, por um lado, nesta região o material confronta as fronteiras do contentor de extrusão isentas de atrito, enquanto que por outro lado está separada da região IV pela LDT $\overline{AB}$ que faz 60° com a direcção vertical. Desta conjugação de condições resulta que o pólo (P_V) tem que se situar sobre o eixo σ, para que as direcções principais sejam a horizontal e a vertical, conforme se mostra na figura seguinte, onde se encontra representada no plano físico (em cima) e no plano das tensões (em baixo) a transição da região IV para a região V.

Assim, as coordenadas que definem a posição do pólo (P_V) serão dadas por,

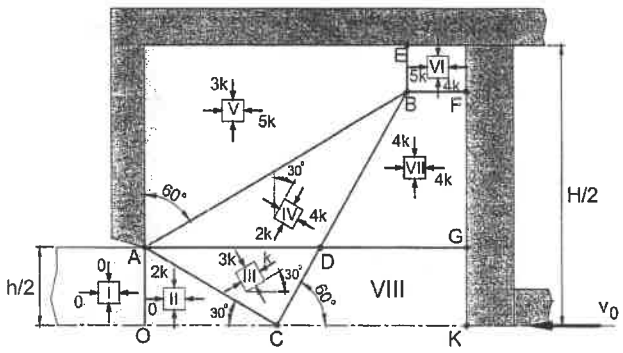
$$\sigma_{P_V} = -7/2\,k - 3/2\,k = -5k$$
$$\tau_{P_V} = 0 \qquad (8.6.3)$$

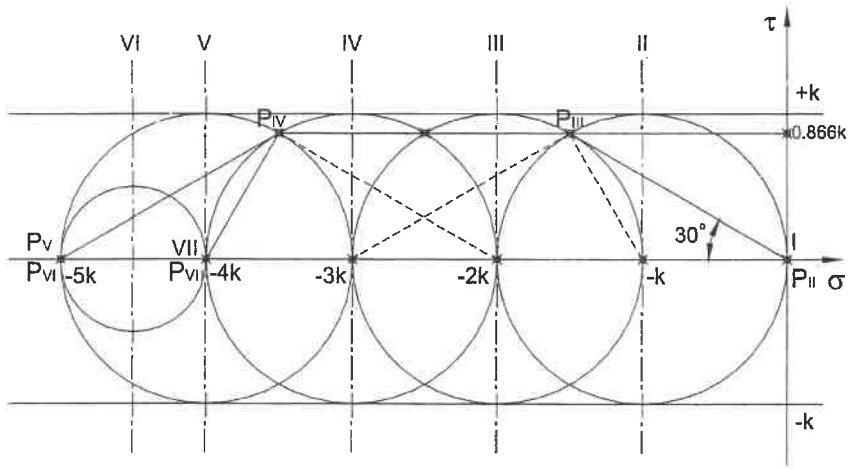




Levando a que para a região V as tensões principais sejam: $(\sigma_1)_V = -3k$, aplicada numa superfície horizontal e $(\sigma_3)_V = -5k$, aplicada numa superfície vertical, conforme obrigam as condições de fronteira do problema.

O estado de tensão do domínio VI tem que ser determinado compatibilizando em simultâneo as LDT $\overline{EB}$ e $\overline{BF}$, bem como as condições de fronteira que determinam que as direcções principais das tensões devem ser a vertical e a horizontal, condição que é extensível ao domínio VII, conforme se pode constatar na figura seguinte, onde se ilustra a transição entre as regiões V e VI no plano físico (em cima) e no plano das tensões (em baixo).

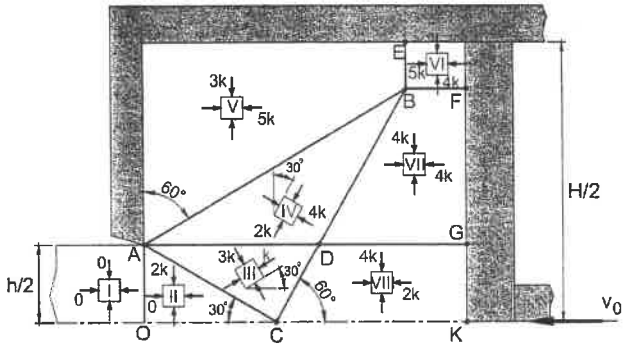


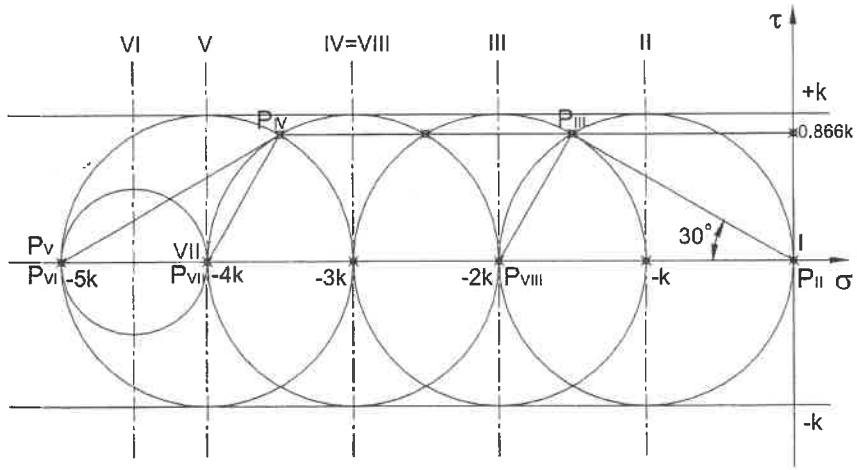


Adicionalmente, o estado de tensão do domínio VII tem que respeitar a LDT $\overline{DB}$ de separação do domínio IV. A compatibilização de todas estas condições determina que o estado de tensão da região VI seja elástico com as tensões principais dadas por: $(\sigma_1)_{VI} = -4k$, aplicada numa superfície horizontal e $(\sigma_3)_{VI} = -5k$, aplicada numa superfície vertical e o estado de tensão da região VII hidrostático, valendo $(\sigma_1)_{VII} = (\sigma_3)_{VII} - 4k$.

Resta, por fim, determinar o estado de tensão da região VIII, a qual tem que respeitar o facto de não haver atrito no êmbolo de extrusão, fazer fronteira com uma linha de simetria e estar separada dos domínios III e VII, respectivamente através das LDT $\overline{CD}$ e $\overline{DG}$,

conforme se pode constatar na figura seguinte, onde se ilustra a transição entre as regiões VII e VIII no plano físico (em cima) e no plano das tensões (em baixo).





Nestas condições, o equilíbrio das tensões é assegurado se o estado de tensão do domínio VIII coincidir com o estado de tensão do domínio IV e o pólo (P_{VIII}) se localizar no eixo σ em -2k, conduzindo a que as tensões principais sejam: $(\sigma_1)_{VIII} = -2k$, aplicada numa superfície vertical e $(\sigma_3)_{VIII} = -4k$, aplicada numa superfície horizontal, conforme mostra a figura anterior.

b) Para determinar uma expressão que permita calcular a força de extrusão em função da relação de extrusão ($R = H/h$) é necessário fazer o equilíbrio de forças segundo a direcção horizontal. Para confirmar a validade da solução limite inferior este equilíbrio irá ser efectuado em simultâneo em duas secções verticais, a da fieira e a do êmbolo. Deste modo, vem,

$$F_e = \bar{p}_f A_f = \bar{p}_f Hb \tag{8.6.4}$$

ou

$$F_e = \bar{p}_{eb} A_{eb} = \bar{p}_{eb} Hb \tag{8.6.5}$$

em que $\bar{p}_{eb}$ e $\bar{p}_f$ são, respectivamente, a pressão média na superfície do êmbolo e da fieira e b a largura da extrusão (dimensão perpendicular ao papel).

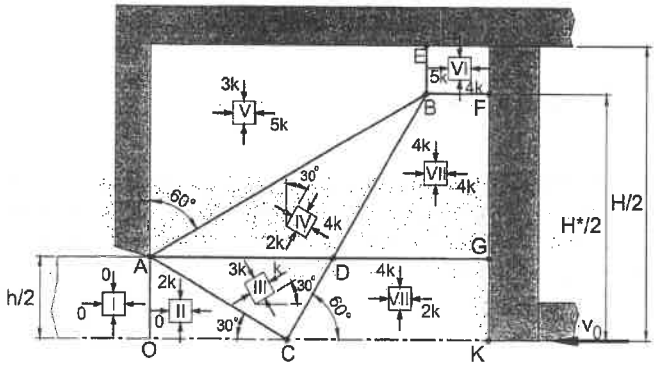
Nesta fase o problema resume-se ao cálculo das pressões médias que actuam em cada uma das superfícies consideradas. Iniciando o cálculo pela superfície da fieira, obtém-se,

$$\bar{p}_f = \frac{5k(H-h)}{H} = 5k\left(1-\frac{1}{R}\right) \tag{8.6.6}$$

Para determinar a pressão média que actua na superfície do êmbolo considere-se a figura seguinte que ilustra o domínio de validade da solução limite inferior.

Da análise desta figura constata-se imediatamente que esta solução apenas é aplicável para relações de extrusão superiores ou igual a $R^* = H^*/h$, com a altura H^* definida no vértice do ΔABD. Não existindo limite superior de aplicabilidade desta solução, o passo seguinte será o de se determinar a relação limite inferior de extrusão R^* para a qual a solução é válida. Para tal sabe-se que,

$$\frac{H^*}{2} = \frac{h}{2} + \overline{GF} = \frac{h}{2} + \overline{AB}\,\text{sen}\,30 = \frac{1}{2}\left(h + \overline{AB}\right) \tag{8.6.7}$$



Porém,

$$\overline{AB}\cos 30 = \overline{AC}\cos 30 + \overline{CB}\cos 60 \tag{8.6.8}$$

ou,

$$\overline{AB} = h + \frac{1}{3}H^* \tag{8.6.9}$$

Substituindo este resultado em (8.6.6), obtém-se o limite inferior de aplicabilidade da solução,

$$H^* = 3h \;\Rightarrow\; R^* = 3 \tag{8.6.10}$$

Nestas condições, o valor da pressão média que actua na superfície do êmbolo será então dado por,

$$\bar{p}_{eb} = \frac{5k\left(H-H^*\right)+4k\left(H^*-h\right)+2kh}{H} = 5k\left(1-\frac{1}{R}\right) \tag{8.6.11}$$

Conclui-se, portanto, que a pressão média que actua na superfície do êmbolo é igual à que actua na superfície da fieira, e como as áreas destas superfícies são iguais, também a força de extrusão o será,

$$F_e = 5k\left(1-\frac{1}{R}\right)Hb \qquad (8.6.12)$$

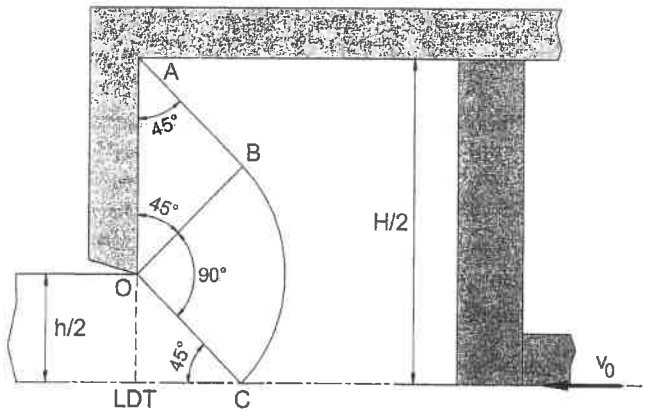
sendo, no entanto, apenas aplicável para relações de extrusão $R \geq 3$.

c) Conforme determinado na alínea anterior, o limite inferior de aplicabilidade desta solução corresponde a uma relação de extrusão de $R = 3$, cuja solução exacta é conhecida por solução de Lee, encontrando-se o respectivo campo de linhas de escorregamento na figura seguinte. O valor da pressão de extrusão dado por esta solução é,

$$(p_e)_{ex} = 2k\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{3}\right) \qquad (8.6.13)$$

enquanto que o valor da pressão de extrusão obtida com a solução limite inferior foi de,

$$(p_e)_{li} = 5k\left(1-\frac{1}{R}\right) = 5k\left(\frac{2}{3}\right) \qquad (8.6.14)$$

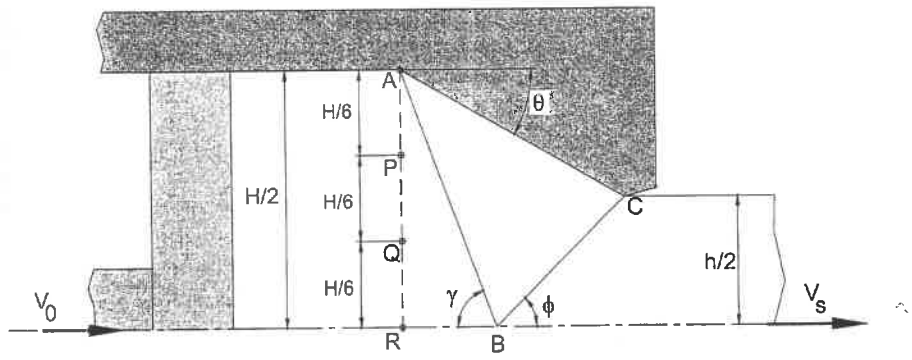


Levando a que o erro desta solução relativamente à solução exacta seja de,

$$E = \frac{(p_e)_{ex} - (p_e)_{li}}{(p_e)_{ex}} 100 = 2.8\% \qquad (8.6.15)$$

Problema 8.7

Considere a operação de extrusão plana, sem atrito, em contentores de parede inclinada, de um material com uma tensão limite de elasticidade σ_e, que se representa na figura seguinte.



Para a solução limite superior proposta na figura, constituída pelas duas linhas de descontinuidade de velocidade AB e BC, determine:

a) O hodógrafo. Estabeleça ainda uma relação genérica entre as variáveis angulares, θ, γ e ϕ, do processo.

b) O valor da pressão, adimensionalizado com a tensão limite de elasticidade $2k$, necessário para realizar a operação de extrusão. Determine o valor mínimo da pressão de extrusão para o caso do semi-ângulo de inclinação da fieira ser de $\theta = 30°$ e a relação de extrusão de $R = 2$. Compare este valor com o obtido na solução exacta.

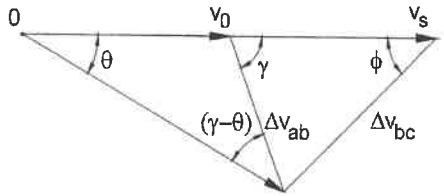
c) A posição dos pontos P, Q, R e S ao fim de 4 s de extrusão, admitindo que a velocidade do êmbolo de extrusão é de $v_0 = 10$ mm/s e que H=100 mm. Para a resolução desta alínea considere a solução optimizada determinada na alínea anterior para uma relação de extrusão de $R = 2$ e um semi-ângulo de inclinação da fieira de $\theta = 30°$.

Resolução

a) A velocidade de saída, v_s, pode ser determinada a partir da condição de incompressibilidade,

$$Hv_0 b = hv_s b \quad \Rightarrow \quad v_s = Rv_0 \tag{8.7.1}$$

Uma vez conhecida a velocidade de saída, falta determinar a velocidade do bloco ABC, o que se faz interceptando a direcção das duas descontinuidades de velocidade AB e CD, resultando o hodógrafo que se apresenta na figura seguinte.



A relação entre as três variáveis angulares da solução pode ser determinada a partir da seguinte relação geométrica,

$$\begin{aligned} &\overline{AB}\cos\gamma + \overline{BC}\cos\phi = \overline{AC}\cos\theta \\ &\frac{\overline{AB}}{H}\cos\gamma + \frac{\overline{BC}}{H}\cos\phi = \frac{\overline{AC}}{H}\cos\theta \end{aligned} \tag{8.7.2}$$

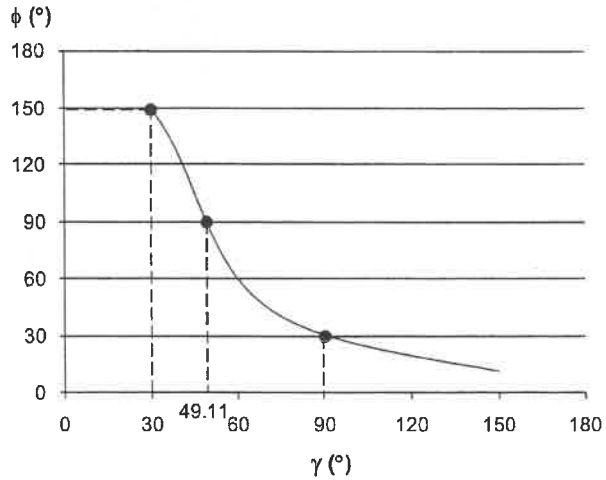
Contudo, da mesma figura tira-se que,

$$\begin{aligned} &\overline{AB}\,\mathrm{sen}\,\gamma = \frac{H}{2} \quad &\Rightarrow \quad &\frac{\overline{AB}}{H} = \frac{1}{2\mathrm{sen}\,\gamma} \\ &\overline{BC}\,\mathrm{sen}\,\phi = \frac{h}{2} \quad &\Rightarrow \quad &\frac{\overline{BC}}{H} = \frac{1}{2R\,\mathrm{sen}\,\phi} \\ &\overline{AC}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{(H-h)}{2} \quad &\Rightarrow \quad &\frac{\overline{AC}}{H} = \left(1-\frac{1}{R}\right)\frac{1}{2\mathrm{sen}\,\theta} \end{aligned} \tag{8.7.3}$$

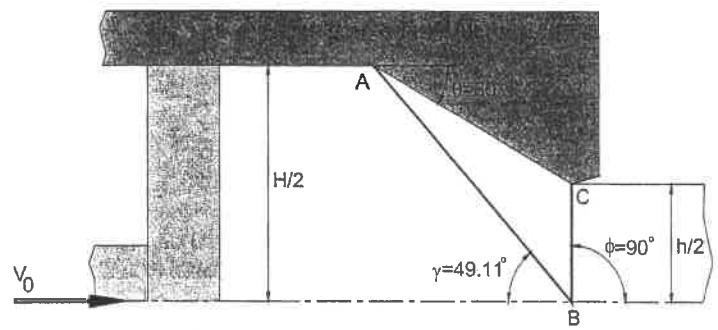
Substituindo estes valores em (8.7.2), obtém-se após alguma manipulação matemática a relação entre as três variáveis angulares do problema,

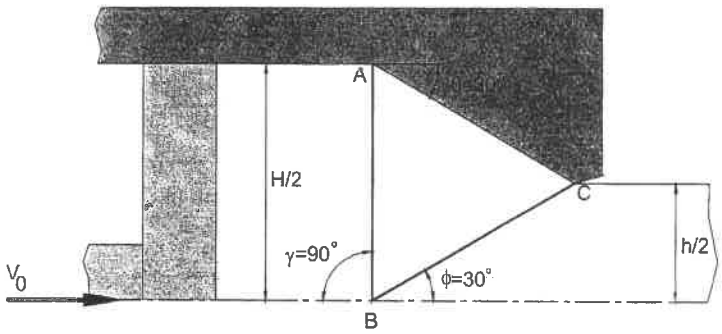
$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{1}{(R-1)\mathrm{cotg}\,\theta - R\,\mathrm{cotg}\,\gamma} \tag{8.7.4}$$

Para avaliar a variação entre os ângulos, em especial entre os ângulos das descontinuidades de velocidade, considere-se uma relação de extrusão de $R = 2$ e um semi-ângulo de inclinação da parede da fieira de $\theta = 30°$. Esta variação é mostrada graficamente na figura seguinte, identificando-se duas soluções particulares correspondendo aos casos em que cada uma das linhas de descontinuidade de velocidade é perpendicular ao eixo de simetria e uma terceira mostrando uma condição limite da solução que surge quando o ângulo γ da descontinuidade de velocidade AB coincide com o semi-ângulo da parede da feira, θ.



Na figura seguinte apresentam-se os dois campos particulares desta solução limite superior identificados na figura anterior, para os quais $\gamma = 49.11°$ e $\phi = 90°$ (em cima) e $\gamma = 90°$ e $\phi = 30°$ (em baixo).





b) A aplicação do método do limite superior a soluções de blocos rígidos estabelece que a potência necessária à deformação plástica é consumida nas superfícies de descontinuidade de velocidade. Pelo que, neste caso a potência necessária à operação de extrusão é calculada do seguinte modo,

$$p\frac{H}{2}b\,v_0=\sum_{i=1}^{2}k\,|\Delta v_i|S_i \qquad (8.7.5)$$

Uma vez que a área das descontinuidades de velocidade podem ser calculadas a partir dos valores fornecidos por (8.7.3), é necessário determinar o valor das descontinuidades de velocidade. Assim, através de manipulação trigonométrica ao nível do hodógrafo anteriormente representado, obtém-se,

$$\frac{\Delta v_{AB}}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{v_0}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}\;\Rightarrow\;\frac{\Delta v_{AB}}{v_0}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}$$

$$\frac{\Delta v_{BC}}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{\Delta v_{AB}}{\operatorname{sen}\phi}\;\Rightarrow\;\frac{\Delta v_{BC}}{v_0}=\frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)\operatorname{sen}\phi} \qquad (8.7.6)$$

Substituindo estas relações em (8.7.5), obtém-se,

$$p\frac{H}{2}bv_0=k\,b\,H\,v_0\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}\frac{1}{2\operatorname{sen}\gamma}+\frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)\operatorname{sen}\phi}\frac{1}{2R\operatorname{sen}\phi}\right)$$

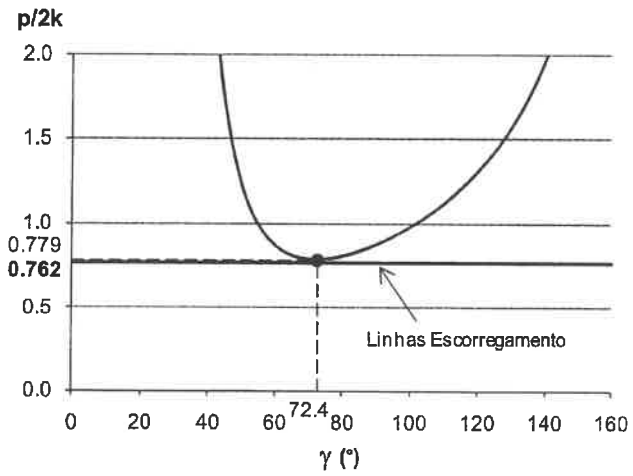
$$\frac{p}{2k}=\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}\frac{1}{2\operatorname{sen}\gamma}+\frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)\operatorname{sen}\phi}\frac{1}{2R\operatorname{sen}\phi}\right) \qquad (8.7.7)$$

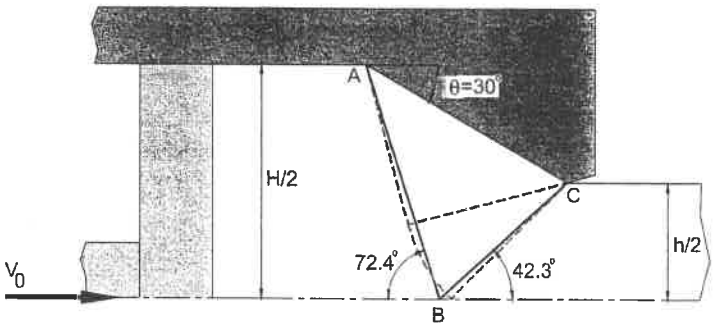
$$\frac{p}{2k}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}\left(\frac{1}{2\operatorname{sen}\gamma}+\frac{\operatorname{sen}\gamma}{2R\operatorname{sen}^2\phi}\right)$$

$$\frac{p}{2k}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\gamma}+\frac{\operatorname{sen}\gamma}{R}\left(\operatorname{cotg}^2\phi+1\right)\right)$$

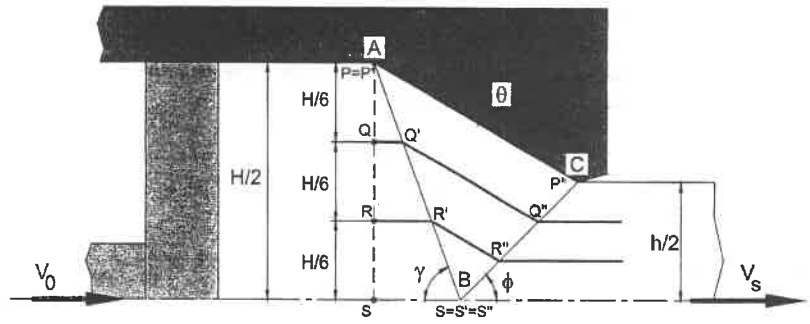
A figura seguinte apresenta a evolução da pressão de extrusão dada por (8.7.7), para uma extrusão com uma relação de $R=2$ e um semi-ângulo de abertura da fieira de $\theta=30°$. Representa-se igualmente a título comparativo o valor obtido na solução do campo de linhas de escorregamento do problema 8.5 (equação 8.5.7).

Constata-se, deste modo, que a solução limite superior oferece um valor para a pressão cerca de 2.2% mais elevado do que a solução exacta dada pelas linhas de escorregamento. Esta pequena diferença é melhor compreendida verificando na figura seguinte a semelhança entre as duas soluções. Uma vez que nela se encontram ilustrados os planos físicos da solução de linhas de escorregamento e do método do limite superior que fornece o valor mínimo de pressão, para a extrusão com o semi-ângulo de inclinação da fieira de $\theta=30°$ e uma relação de extrusão de $R=2$.





c) Analisando a figura seguinte, onde se encontram ilustradas as trajectórias dos pontos P, Q, R e S durante a extrusão, constata-se que durante a extrusão os pontos seguem as respectivas linhas de fluxo, atravessando 3 subdomínios, designadamente, o primeiro de aproximação à linha de descontinuidade de velocidade AB, o segundo constituído pelo triângulo ABC e finalmente o terceiro já na zona de material extrudido.



Nestas condições, a distância total percorrida por qualquer dos pontos, no intervalo de tempo *t*, será dado por,

$$d = \sum_{i=1}^{N} d_i = \sum_{i=1}^{N} v_i t_i \tag{8.7.8}$$

em que N é o número de subdomínios da solução, v_i a velocidade segundo a linha de fluxo em cada subdomínio e t_i o tempo necessário ao atravessamento de cada subdomínio.

Considerando, agora, apenas o último domínio à saída, pode escrever-se,

$$d_s = v_s t_s = v_s \left(t - \sum_{i=1}^{N-1} t_i \right) \tag{8.7.9}$$

em que t é o tempo total e t_s o tempo remanescente para o trajecto no subdomínio de saída. Substituindo este resultado em (8.7.8), obtém-se,

$$\begin{aligned} d &= v_s t - v_s \sum_{i=1}^{N-1} t_i + \sum_{i=1}^{N-1} d_i \\ &= v_s t - v_s \sum_{i=1}^{N-1} \frac{d_i}{v_i} + \sum_{i=1}^{N-1} d_i \\ &= v_s t + \sum_{i=1}^{N-1} d_i \left(1 - \frac{v_s}{v_i} \right) \end{aligned} \tag{8.7.10}$$

Esta expressão permite-nos determinar a distância percorrida por cada ponto na sua linha de fluxo num intervalo de tempo t.

Aplicando a equação (8.7.10) ao problema pode determinar-se a componente horizontal de deslocamento total de cada ponto,

$$d_x = v_s t + \sum_{i=1}^{N-1} d_{ix}\left(1 - \frac{v_s}{v_{ix}}\right) \tag{8.7.11}$$

Nestas condições, teremos,

Ponto P:

$$(d_P)_x = v_s t + 0 + (d_{P'P''})_x\left(1 - \frac{v_s}{(v_{P'P''})_x}\right) \tag{8.7.12}$$

Sendo cada uma das variáveis dadas por,

$$v_s = Rv_0 = 2 \times 10 = 20 \text{ mm/s}$$

$$(d_{PP'})_x = 0$$

$$(d_{P'P''})_x = \frac{H}{4}\operatorname{cotg}\theta = 25 \operatorname{cotg} 30 = 43.30 \text{ mm} \tag{8.7.13}$$

$$(v_{P'P''})_x = v_0 \frac{\operatorname{sen}(\pi - \gamma)}{\operatorname{sen}(\gamma - \theta)}\cos\theta = 10\frac{\operatorname{sen}(180 - 72.4)}{\operatorname{sen}(72.4 - 30)} = 14.14 \text{ mm/s}$$

Substituindo estes resultados na equação (8.7.12), obtém-se,

$$\begin{aligned}(d_P)_x &= v_s t + 0 + (d_{P'P''})_x\left(1 - \frac{v_s}{(v_{P'P''})_x}\right) \\ &= 20 \times 4 + 43.30 \times \left(1 - \frac{20}{14.14}\right) = 62.06 \text{ mm}\end{aligned} \tag{8.7.14}$$

Ponto Q:

$$(d_Q)_x = v_s t + (d_{QQ'})_x\left(1 - \frac{v_s}{(v_{QQ'})_x}\right) + (d_{Q'Q''})_x\left(1 - \frac{v_s}{(v_{Q'Q''})_x}\right) \tag{8.7.15}$$

Sendo cada uma das variáveis dadas por,

$$\begin{aligned}&v_s = Rv_0 = 2 \times 10 = 20 \text{ mm/s} \\ &(d_{QQ'})_x = \frac{H}{6}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{100}{6}\operatorname{tg}(90 - 72.4) = 5.29 \text{ mm} \\ &(v_{QQ'})_x = v_0 = 10 \text{ mm/s} \\ &(d_{Q'Q''})_x = \frac{H}{6}\operatorname{cotg}\theta = \frac{100}{6} \times \operatorname{cotg} 30 = 28.87 \text{ mm} \\ &(v_{Q'Q''})_x = v_0 \frac{\operatorname{sen}(\pi - \gamma)}{\operatorname{sen}(\gamma - \theta)}\cos\theta = 10\frac{\operatorname{sen}(180 - 72.4)}{\operatorname{sen}(72.4 - 30)} = 14.14 \text{ mm/s}\end{aligned} \tag{8.7.16}$$

Substituindo estes resultados na equação (8.7.15), obtém-se,

$$(d_Q)_x = 20 \times 4 + 5.29 \times \left(1 - \frac{20}{10}\right) + 28.87 \times \left(1 - \frac{20}{14.14}\right) = 62.75 \text{ mm} \tag{8.7.17}$$

Ponto R:

$$(d_R)_x = v_s t + (d_{RR'})_x\left(1 - \frac{v_s}{(v_{RR'})_x}\right) + (d_{R'R''})_x\left(1 - \frac{v_s}{(v_{R'R''})_x}\right) \tag{8.7.18}$$

Sendo cada uma das variáveis dadas por,

$$\begin{aligned}&v_s = Rv_0 = 2 \times 10 = 20 \text{ mm/s} \\ &(d_{RR'})_x = \frac{H}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{100}{3}\operatorname{tg}(90 - 72.4) = 10.57 \text{ mm} \\ &(v_{RR'})_x = v_0 = 10 \text{ mm/s} \\ &(d_{R'R''})_x = \frac{H}{12}\operatorname{cotg}\theta = \frac{100}{12} \times \operatorname{cotg} 30 = 14.45 \text{ mm} \\ &(v_{R'R''})_x = v_0 \frac{\operatorname{sen}(\pi - \gamma)}{\operatorname{sen}(\gamma - \theta)}\cos\theta = 10\frac{\operatorname{sen}(180 - 72.4)}{\operatorname{sen}(72.4 - 30)} = 14.14 \text{ mm/s}\end{aligned} \tag{8.7.19}$$

Substituindo estes resultados na equação (8.7.18), obtém-se,

$$(d_R)_x = 20x4 + 10.57 \times \left(1 - \frac{20}{10}\right) + 14.45 \times \left(1 - \frac{20}{14.14}\right) = 63.44\,\text{mm} \qquad (8.7.20)$$

Ponto S:

$$(d_S)_x = v_s t + (d_{SS'})_x \left(1 - \frac{v_s}{(v_{SS'})_x}\right) + 0 \qquad (8.7.21)$$

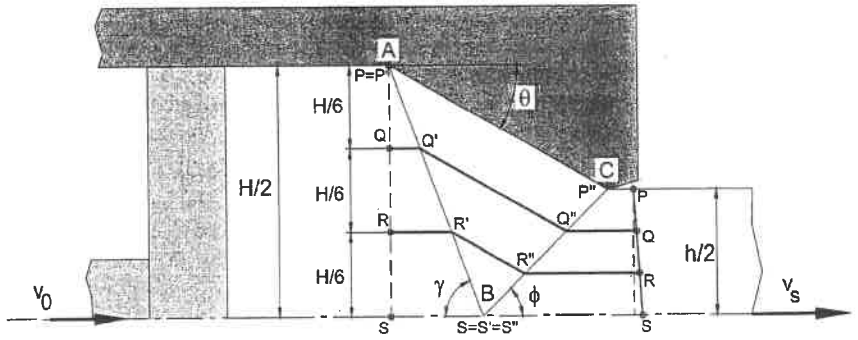
Sendo cada uma das variáveis dadas por,

$$\begin{aligned} v_s &= R v_0 = 2 \times 10 = 20\,\text{mm/s} \\ (d_{SS'})_x &= \frac{H}{2}\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{100}{2}\,\text{tg}\,(90 - 72.4) = 15.86\,\text{mm} \\ (v_{SS'})_x &= v_0 = 10\,\text{mm/s} \\ (d_{R'R''})_x &= 0 \end{aligned} \qquad (8.7.22)$$

Substituindo estes resultados na equação (8.7.21), obtém-se,

$$(d_R)_x = 20 \times 4 + 15.86 \times \left(1 - \frac{20}{10}\right) = 64.14\,\text{mm} \qquad (8.7.23)$$

A figura seguinte mostra a variação que a secção constituída pelos pontos P, Q, R e S sofre ao fim de 4 s de extrusão.



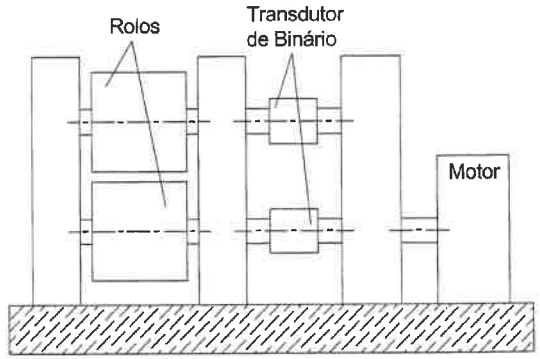
A análise da figura anterior mostra que uma secção inicialmente plana antes da deformação plástica deixa de o ser depois da extrusão. Este resultado advém fundamentalmente do facto de na região triangular o comprimento das linhas de fluxo diminuir à medida que nos aproximamos da linha de simetria, levando a que o tempo necessário para os pontos atravessarem esta região seja também menor.

9 LAMINAGEM

Neste capítulo apresenta-se um conjunto de problemas sobre um dos mais importantes processos de deformação plástica na massa, a laminagem de produtos planos de materiais metálicos.

Problema 9.1

A figura seguinte apresenta em esquema um laminador de dois rolos, com um diâmetro de 250 mm, no qual se montaram transdutores de binário nos veios de transmissão de potência. Através deste processo foi possível medir experimentalmente o binário nas duas passagens de uma operação de laminagem a frio, de uma chapa de aço carbono com 3 mm de espessura e 80 mm de largura, apresentando a seguinte lei de comportamento mecânico: $\overline{\sigma} = 600\overline{\varepsilon}^{0.25}$. Os valores obtidos são dados na tabela seguinte.



Passo	N (r.p.m)	Binário por rolo (N.m)	h_0 (mm)	h_f (mm)
1	100	7100	3	1.8
2	100	10060	1.8	0.5

Nestas condições,

a) Determine o coeficiente de atrito em cada um dos passos.

b) Verifique se ambos os passos de laminagem podem ser efectuados sem ter que se aplicar tensão de tracção avante.

c) Determine a potência necessária ao motor do laminador, sabendo que o rendimento do sistema de transmissão é de 80%.

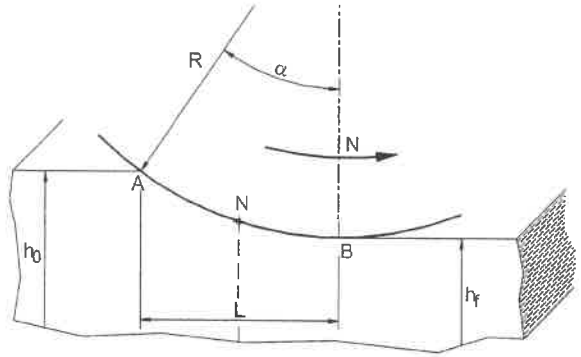
d) Estime o aumento de temperatura devido à deformação plástica que a chapa sofre em cada um dos passos, sabendo que a densidade do aço é $\rho = 7850\ \text{kg/m}^3$ e o calor específico $C_e = 0.46\ \text{kJ/(kgK)}$.

Resolução

a) Em primeiro lugar é necessário determinar os principais parâmetros geométricos que caracterizam cada uma das laminagens. Assim, considerando a figura seguinte, tira-se que o comprimento de contacto entre o rolo e a chapa projectado na direcção horizontal, L, é dado por,

$$L = \sqrt{R^2 - (R - \Delta h/2)^2} = \sqrt{R\Delta h - \frac{\Delta h^2}{4}} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \sqrt{125\times 1.2 - \frac{1.2^2}{4}} = 12.25\ \text{mm} \\ L_2 = \sqrt{125\times 1.3 - \frac{1.3^2}{4}} = 12.75\ \text{mm} \end{cases} \tag{9.1.1}$$

em que R é o raio do rolo e Δh a redução de espessura da chapa (ou *draft* na literatura inglesa).



Conhecido o comprimento de contacto entre o rolo e a chapa projectado na horizontal pode calcular-se o ângulo de contacto, α, para cada uma das laminagens, o qual é obtido a partir da seguinte relação,

$$\text{tg}\alpha = \frac{L}{R - \Delta h/2} = \frac{\sqrt{R^2 - (R - \Delta h/2)^2}}{R - \Delta h/2} \cong \sqrt{\frac{\Delta h}{R}} \tag{9.1.2}$$

Substituindo valores na relação anterior, obtém-se os ângulos de contacto entre os rolos e o material para cada uma das laminagens,

$$\begin{aligned} \text{tg}\alpha_1 &= \sqrt{\frac{1.2}{125}} = 0.098 \Rightarrow \alpha_1 = 5.6^\circ \\ \text{tg}\alpha_2 &= \sqrt{\frac{1.3}{125}} = 0.102 \Rightarrow \alpha_2 = 5.9^\circ \end{aligned} \tag{9.1.3}$$

Uma vez caracterizadas geometricamente as operações de laminagem vai, agora, proceder-se ao cálculo do coeficiente de atrito em cada uma delas. Sendo conhecido o valor do binário nos rolos, pode calcular-se a força de separação, F_s, desde que se admita que a secção neutra se localiza no meio do comprimento projectado, ou seja,

$$M = 2F_s\frac{L}{2} \Rightarrow F_s = \frac{M}{L} \Rightarrow \begin{cases} F_{s_1} = \frac{M_1}{L_1} = \frac{7100}{12.25\times 10^{-3}} = 5795918\text{N} \\ F_{s_2} = \frac{M_2}{L_2} = \frac{10060}{12.75\times 10^{-3}} = 7890196\text{N} \end{cases} \tag{9.1.4}$$

Por outro lado, através da expressão da força de separação pode determinar-se o coeficiente de correcção do valor médio da pressão aplicada na interface de contacto entre os rolos e a chapa, Q_{fs}, ou seja,

$$F_s = Q_{fs}\,\sigma_{unif}\,L\,w \Rightarrow Q_{fs} = \frac{F_s}{\sigma_{unif}\,L\,w} \tag{9.1.5}$$

em que σ_{unif} é o valor médio da tensão da região em deformação que pode ser calculado através do método da energia uniforme, L a projecção horizontal do comprimento de contacto e w a largura da chapa.

Torna-se então necessário calcular o valor médio da tensão, σ_{unif}, em cada uma das laminagens, porém, como as laminagens apresentam características diferentes devido ao encruamento do material, o cálculo que se segue irá ser apresentado em separado.

Então, aplicando o método da energia uniforme à primeira laminagem, obtém-se para a extensão efectiva em condições de deformação plana na secção de saída, $\bar{\varepsilon}_{f_1}$,

$$\bar{\varepsilon}_{f_1} = 1.15 \times \ln(h_0/h_1) = 1.15 \times \ln(3/1.8) = 0.587 \qquad (9.1.6)$$

em que h_0 e h_1 são, respectivamente, a espessura à entrada e à saída na 1ªoperação.

Sendo o valor médio da tensão na 1ª laminagem, dado por,

$$\sigma_{unif_1} = \frac{K\bar{\varepsilon}_{f_1}^{n}}{n+1} = \frac{600 \times 0.587^{0.25}}{1+0.25} = 420.15 \text{ MPa} \qquad (9.1.7)$$

em que K e n são as constantes da lei de Ludwick-Hollomon.

Já no que se refere à 2ª laminagem tem que se considerar a extensão que a chapa sofreu em domínio plástico durante a primeira laminagem. Deste modo, a extensão efectiva em condições de deformação plana na secção de saída, $\bar{\varepsilon}_{f_2}$, será,

$$\bar{\varepsilon}_{f2} = \bar{\varepsilon}_{f_1} + 1.15 \times \ln(h_1/h_f) = 0.587 + 1.15 \times \ln(1.8/0.5) = 2.06 \qquad (9.1.8)$$

em que h_1 e h_f são, respectivamente, a espessura à entrada e à saída na 2ª laminagem.

Para determinar o valor médio da tensão nesta operação tem que se retomar o cálculo da energia de deformação plástica por unidade de volume e notar que o material no início da deformação já possui uma extensão acumulada de $\bar{\varepsilon}_{f_1}$ até atingir no final uma deformação de $\bar{\varepsilon}_{f_2}$, ou seja, sofre um incremento de deformação efectiva de $\Delta\bar{\varepsilon}_{f_{12}} = \bar{\varepsilon}_{f_2} - \bar{\varepsilon}_{f_1}$. Nestas condições, o trabalho plástico por unidade de volume associado à 2ª laminagem será dado por,

$$w_p = \int_{\bar{\varepsilon}_{f_1}}^{\bar{\varepsilon}_{f_2}} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon} = \int_{\bar{\varepsilon}_{f_1}}^{\bar{\varepsilon}_{f_2}} K\bar{\varepsilon}^{n} d\varepsilon = \frac{K\bar{\varepsilon}^{(n+1)}}{n+1}\Bigg|_{\bar{\varepsilon}_{f_1}}^{\bar{\varepsilon}_{f_2}} = \frac{K}{n+1}\left[\bar{\varepsilon}_{f_2}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{f_1}^{(n+1)}\right] \qquad (9.1.9)$$

Levando a que o valor médio da tensão na 2ª laminagem seja,

$$w_p = \frac{K}{n+1}\frac{\left[\bar{\varepsilon}_{f_2}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{f_1}^{(n+1)}\right]}{\Delta\bar{\varepsilon}_{f_{12}}}\Delta\bar{\varepsilon}_f = \sigma_{unif_2}\Delta\bar{\varepsilon}_{f_{12}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{unif_2} = \frac{K}{n+1}\frac{\left[\bar{\varepsilon}_{f_2}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{f_1}^{(n+1)}\right]}{\Delta\bar{\varepsilon}_{f_{12}}} \qquad (9.1.10)$$

Substituindo valores nesta equação obtém-se finalmente,

$$\sigma_{unif_2} = \frac{K}{n+1}\frac{\left[\bar{\varepsilon}_{f_2}^{(n+1)} - \bar{\varepsilon}_{f_1}^{(n+1)}\right]}{\Delta\bar{\varepsilon}_{f_{12}}} = \frac{600 \times \left(2.06^{(1+0.25)} - 0.587^{(1+0.25)}\right)}{(1+0.25)\times(2.06-0.587)} = 636.78 \text{ MPa} \qquad (9.1.11)$$

Conhecidos os valores médios da tensão em cada uma das laminagens pode retomar-se a equação (9.1.5) para calcular os respectivos valores de Q_{fs}, ou seja,

$$Q_{fs} = \frac{F_s}{\sigma_{unif} L w} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Q_{fs_1} = \dfrac{579591.8}{420.15 \times 12.25 \times 80} = 1.41 \\ Q_{fs_2} = \dfrac{789019.6}{636.78 \times 12.75 \times 80} = 1.21 \end{cases} \qquad (9.1.12)$$

Da analogia que se pode fazer entre a laminagem e a compressão em condições de deformação plana, sabe-se que o coeficiente de correcção do valor médio da pressão aplicada na interface de contacto entre os rolos e a chapa, Q_{fs}, é dado pela seguinte expressão, na qual a única incógnita é o coeficiente de atrito μ que se procura,

$$Q_{fs} = \frac{h_m}{\mu L}\left(exp^{\frac{\mu L}{h_m}} - 1\right) \qquad (9.1.13)$$

em que μ é o coeficiente de atrito na interface rolos/material e h_m a espessura média da laminagem.

No entanto, para facilitar o cálculo do coeficiente de atrito torna-se necessário simplificar a equação (9.1.13). Assim, se a exponencial que intervém nesta equação for substituída pelos 3 primeiros termos do respectivo desenvolvimento em série, obtém-se,

$$Q_{fs} = \frac{h_m}{\mu L}\left(1 + \frac{\mu L}{h_m} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu L}{h_m}\right)^2 - 1\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{\mu L}{h_m} \qquad (9.1.14)$$

de referir que esta aproximação será tanto melhor quanto mais baixo for o coeficiente de atrito e a relação L/h_m.

O que permite dizer que o coeficiente de atrito em cada uma das laminagens é aproximadamente dado por,

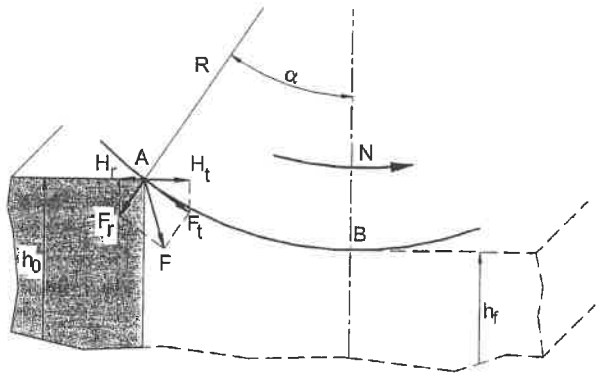
$$\mu = \frac{2h_m}{L}(Q_{fs} - 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{2 \times 2.4}{12.25}(1.41 - 1) = 0.16 \\ \mu_2 = \dfrac{2 \times 1.15}{12.75}(1.21 - 1) = 0.04 \end{cases} \qquad (9.1.15)$$

b) No início da laminagem a chapa entra em contacto com os rolos do laminador sendo conduzida para a zona em deformação em consequência do movimento de rotação dos rolos. Se as forças de atrito que entretanto se desenvolvem na interface de contacto forem suficientes a alimentação da chapa prossegue de modo automático. Considerando a figura seguinte, constata-se que a anterior condição será verificada desde que a componente horizontal (H_r) da força radial total (F_r) seja inferior à componente horizontal (H_t) da força tangencial total, (F_t) que se desenvolve no contacto, ou seja,

$$F_r \sin\alpha \le F_t \cos\alpha \;\Rightarrow\; \mu = \text{tg}\,\beta = \frac{F_t}{F_r} \ge \text{tg}\,\alpha \;\Rightarrow\; \mu_{min} = \text{tg}\,\alpha \qquad (9.1.16)$$

em que α é o ângulo de contacto. Em conclusão, a alimentação processar-se-á de modo automático desde que o coeficiente de atrito seja no mínimo igual ao valor da tangente do ângulo de contacto. Uma vez que estas variáveis foram calculadas na alínea anterior, resta verificar as respectivas relações,

$$\begin{aligned} &\mu_1 = 0.16 > \text{tg}\,\alpha_1 = 0.098 \quad \text{Verifica} \\ &\mu_2 = 0.04 < \text{tg}\,\alpha_2 = 0.102 \quad \text{Não verifica} \end{aligned} \qquad (9.1.17)$$



Conclui-se, assim, que a segunda laminagem necessita que seja aplicada uma tracção avante para que possa ser realizada.

c) Uma vez conhecido o momento de laminagem total (dos dois rolos) de cada um dos passos de laminagem, a potência total requerida para cada operação será,

$$P = M\omega = M\frac{v_r}{R} \;\Rightarrow\; \begin{cases} P_1 = 7100 \times \dfrac{1309}{125} = 74351.2 \text{ W} \\ P_2 = 10060 \times \dfrac{1309}{125} = 105348.3 \text{ W} \end{cases} \qquad (9.1.18)$$

em que v_r é a velocidade periférica do rolo e R o raio do rolo.

No entanto, como o sistema de transmissão tem um rendimento de 80% a potência mínima que é necessária ter no motor será de,

$$P_M = \frac{P_{max}}{\eta} = \frac{105.3}{0.8} = 131.7 \text{ kW} \qquad (9.1.19)$$

d) O aumento de temperatura devido ao trabalho plástico que o material sofre num passo de laminagem pode ser estimado a partir de seguinte expressão,

$$\Delta T = \frac{W_v}{\rho C_e} \qquad (9.1.20)$$

em que W_v é o trabalho plástico por unidade de volume, ρ a densidade e C_e o calor específico do material.

Contudo a equação (9.1.20) pode ser escrita em função da força de separação e dos parâmetros geométricos da laminagem,

$$\Delta T = \frac{F_{sw} L/R}{h_m \rho C_e} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \Delta T_1 = \dfrac{7246.4 \times 12.25}{125 \times 10^{-3} \times 2.4 \times 10^{-3} \times 7850 \times 460} = 81.9\ ^\circ\text{C} \\ \Delta T_2 = \dfrac{9864.6 \times 12.75}{125 \times 10^{-3} \times 1.15 \times 10^{-3} \times 7850 \times 460} = 242.3\ ^\circ\text{C} \end{cases} \qquad (9.1.21)$$

em que F_{sw} é a força de separação por unidade de largura, L o comprimento de contacto projectado na direcção horizontal, R o raio do rolo e h_m a espessura média da laminagem.

Problema 9.2

Considere a operação de laminagem a frio de uma placa de aço AISI 1015 com 250 mm de largura, na qual se reduz a espessura de 2.5 mm para 2.0 mm. A operação é realizada num laminador de 2 rolos com uma potência disponível de 15 kW por rolo. O diâmetro dos rolos é de 350 mm e operam com uma velocidade de rotação de 30 r.p.m. O material dos rolos é um aço ferramenta com um coeficiente de Poisson de 0.35 e um módulo de Young de 207 GPa. A operação de laminagem desenrola-se com um coeficiente de atrito entre os rolos e o material de $\mu = 0.06$. As características mecânicas do aço AISI 1015 são dadas pela seguinte lei de Ludwik-Hollomon, $\bar{\sigma} = 450\,\bar{\varepsilon}^{0.33}$ MPa.

Admitindo que a deformação plástica em condições de deformação plana é homogénea e que o ponto neutro se situa a meio do comprimento de contacto projectado,

a) Determine o ângulo e o comprimento de contacto projectado e mostre graficamente como varia a velocidade horizontal do material na região em deformação.
b) Mostre como varia a extensão efectiva na região em deformação plástica e compare essa variação com o valor médio da extensão efectiva obtido a partir do método da energia uniforme.
c) Determine a força de separação, o binário e a potência de laminagem, considerando tanto o efeito das forças de atrito, como o achatamento elástico da superfície de contacto dos rolos com a chapa (adopte a solução proposta por Hitchcock).

Resolução

a) O comprimento de contacto projectado é dado por,

$$L = \sqrt{R^2 - (R - \Delta h/2)^2} = \sqrt{R\Delta h - \frac{\Delta h^2}{4}} = \sqrt{175 \times 0.5 - \frac{0.5^2}{4}} = 9.35\text{mm} \qquad (9.2.1)$$

enquanto que o ângulo de contacto, α, é dado por,

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{L}{R - \Delta h/2} = \frac{9.35}{175 - 0.5/2} = 0.054 \;\Rightarrow\; \alpha = 3.06^\circ \qquad (9.2.2)$$

Conhecidos os principais parâmetros que caracterizam a laminagem, para determinar a variação de velocidade tangencial entre a entrada e a saída na região em deformação

plástica irá aplicar-se a metodologia descrita na alínea b) do problema 9.3. Assim, iniciando com o cálculo da velocidade periférica do rolo, tem-se,

$$v_r = 2\pi NR = 2 \times \pi \times \frac{30}{60} \times 175 = 549.78\,\text{mm/s} \qquad (9.2.3)$$

em que N é a velocidade de rotação do rolo.

Para determinar a taxa volumétrica que atravessa a zona em deformação é necessário conhecer o ângulo do ponto neutro, sabendo que o mesmo se situa a meio do comprimento projectado, vem,

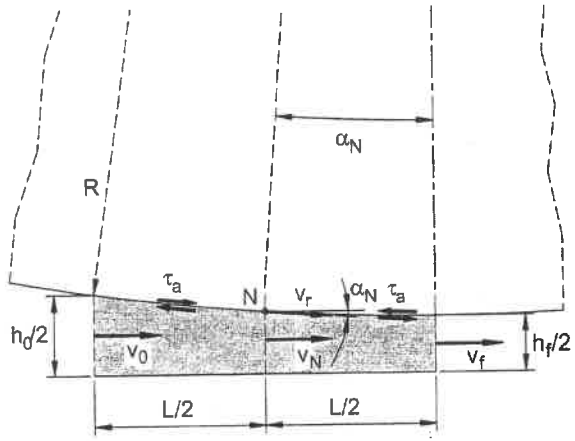
$$\text{sen}\,\alpha_N = \frac{L}{2R} = \frac{9.35}{350} = 0.027 \;\Rightarrow\; \alpha_N = 1.53^\circ \qquad (9.2.4)$$

Uma vez que no ponto neutro a velocidade relativa entre o rolo e o material é nula, a velocidade com que o material atravessa a secção neutra será dada por (ver figura seguinte),

$$v_N = v_r \cos\alpha_N = 549.78 \times \cos 1.53 = 549.58\,\text{mm/s} \qquad (9.2.5)$$

Sendo a área da secção neutra dada por,

$$S_N = h_N\, w = [h_f + D(1 - \cos\,\alpha_N)]w = [2 + 350(1 - \cos\,1.53)] \times 250 = 531.20\,\text{mm}^2 \qquad (9.2.6)$$



Então, a taxa volumétrica $(\dot{Q})$ será,

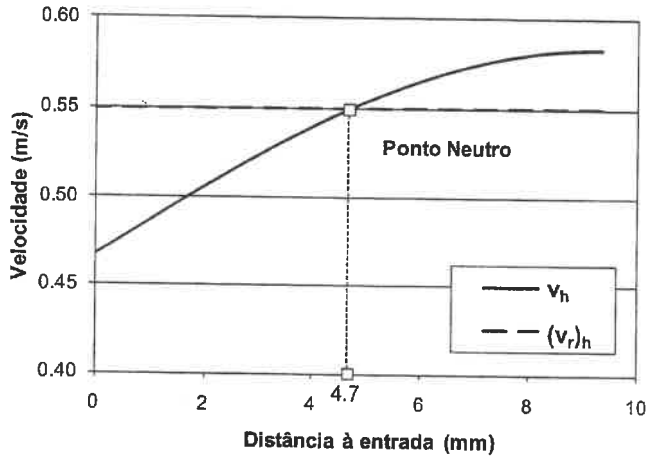
$$\dot{Q} = v_N S_N = 549.58 \times 10^{-3} \times 531.2.1 \times 10^{-6} = 0.00029 \text{ m}^3/\text{s} \qquad (9.2.7)$$

A variação de velocidade do material entre a entrada e a saída pode ser calculada em função da distância da secção à entrada (ℓ) do seguinte modo,

$$v_\ell = \frac{\dot{Q}}{S_\ell} \quad \text{com} \quad S_\ell = [h_f + R(1-\cos\alpha_\ell)]w \quad \text{e} \quad \alpha_\ell = \text{sen}^{-1}(\ell/R) \qquad (9.2.8)$$

Na figura seguinte apresenta-se a variação da velocidade horizontal do material na região em deformação (V_h) e compara-se com a velocidade do rolo no ponto neutro projectada horizontalmente $(V_r)_h$.

Da análise do gráfico é possível verificar que entre a entrada e a secção neutra o velocidade do material é inferior à do rolo, dando origem a tensões de corte por atrito que provocam distorção no sentido horário (ver figura anterior), enquanto que depois de passada a secção neutra as tensões de corte se tornam anti-horárias devido à velocidade do material passar a ser superior à do rolo.



b) No método da energia uniforme sabe-se que o trabalho plástico ou ideal por unidade de volume necessário à deformação é dado por,

$$w_p = \int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon} = \int_0^{\bar{\varepsilon}_f} K\bar{\varepsilon}_f^{\,n} d\varepsilon = \frac{K\bar{\varepsilon}_f^{(n+1)}}{n+1} = \begin{cases} \dfrac{K\bar{\varepsilon}_f^{\,n}}{n+1}\bar{\varepsilon}_f = \sigma_{unif}\bar{\varepsilon}_f \\ K\bar{\varepsilon}_f^{\,n}\dfrac{\bar{\varepsilon}_f}{n+1} = \bar{\sigma}_f\varepsilon_{unif} \end{cases} \qquad (9.2.9)$$

em que K e n são as constantes da lei de Ludwik-Hollomon que caracteriza mecanicamente o material, $\bar{\varepsilon}_f$ e $\bar{\sigma}_f$, respectivamente, a extensão efectiva e a tensão efectiva na secção de saída e ε_{unif} e σ_{unif} os valores médios da extensão e da tensão determinados através do método da energia uniforme, respectivamente.

Deste modo, o valor médio da extensão na região em deformação plástica, em condições de deformação plana, será,

$$\varepsilon_{unif} = \frac{\bar{\varepsilon}_f}{n+1} = \frac{[1.15 \times \ln(h_0/h_f)]}{n+1} = \frac{[1.15 \times \ln(2.5/2)]}{0.33+1} = 0.193 \qquad (9.2.10)$$

Para determinar a variação da extensão efectiva na região em deformação plástica, sabe-se que a deformação é plana, ou seja,

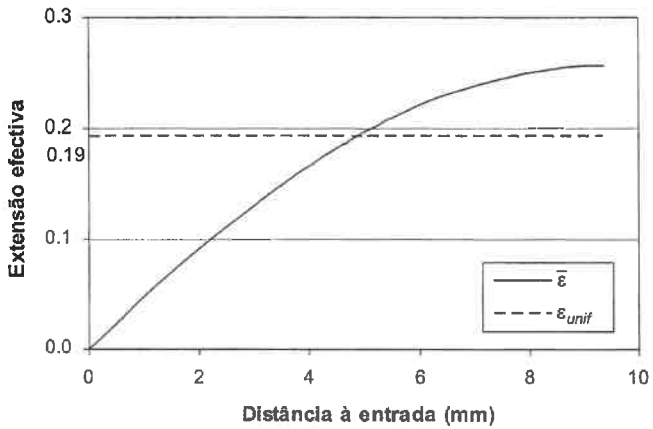
$$\bar{\varepsilon}_\ell = 1.15 \times \ln(h_0/h_\ell) \qquad (9.2.11)$$

em que h_ℓ é a espessura da secção genérica, a qual é dada por,

$$h_\ell = [h_f + R(1-\cos\alpha_\ell)] \quad \text{e} \quad \alpha_\ell = \text{sen}^{-1}(\ell/R) \qquad (9.2.12)$$

sendo ℓ a distância da secção genérica à secção de entrada.

A figura seguinte apresenta a variação da extensão efectiva, obtida a partir das equações (9.2.11) e (9.2.12), e compara-a com o valor médio da extensão dada pela equação (9.2.10).



Conforme se pode constatar da evolução gráfica, a extensão efectiva varia desde 0, na secção de entrada, até ao valor máximo, na secção de saída. Por outro lado, verifica-se que o valor médio da extensão é superior ao que se obtém fazendo a média entre os valores de entrada e de saída, uma vez que este é determinado considerando o trabalho plástico de deformação ideal.

c) Tendo por base o método da energia uniforme, a força de separação dos rolos (F_s) é dada por,

$$F_s = \sigma_{unif}\, L w\, Q_{fs} \tag{9.2.13}$$

em que σ_{unif} é a tensão média na região em deformação, L a projecção horizontal do comprimento de contacto, w a largura da chapa e Q_{fs} o coeficiente de correcção do valor médio da pressão aplicada na interface de contacto entre os rolos e a chapa, que considera o atrito em função da relação dimensional h_m/L da operação de laminagem, sendo h_m a espessura média da laminagem.

O valor da tensão média σ_{unif} da região em deformação plástica, aplicando o método da energia uniforme, é dado por (ver equação (9.2.9)),

$$\sigma_{unif} = \frac{K\bar{\varepsilon}_f^{\,n}}{n+1} \tag{9.2.14}$$

em que K e n são as constantes da lei de Ludwick-Hollomon e $\bar{\varepsilon}_f$ a extensão efectiva em condições de deformação plana na secção de saída (dada pela equação (9.2.11)).

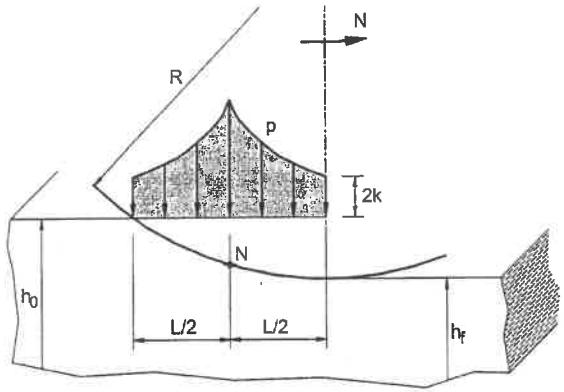
Por seu lado, o coeficiente de correcção do valor médio da pressão aplicada na interface de contacto entre os rolos e a chapa, Q_{fs}, de modo a que o atrito seja considerado, pode ser obtido através da analogia que se pode fazer entre a laminagem e a compressão em condições de deformação plana, sendo dado por,

$$Q_{fs} = \frac{h_m}{\mu L}\left(exp^{\frac{\mu L}{h_m}} - 1 \right) \tag{9.2.15}$$

em que μ é o coeficiente de atrito na interface rolos/material e h_m a espessura média da laminagem.

Substituindo as equações (9.2.14) e (9.2.15) na equação (9.2.13) obtém-se para a força de separação,

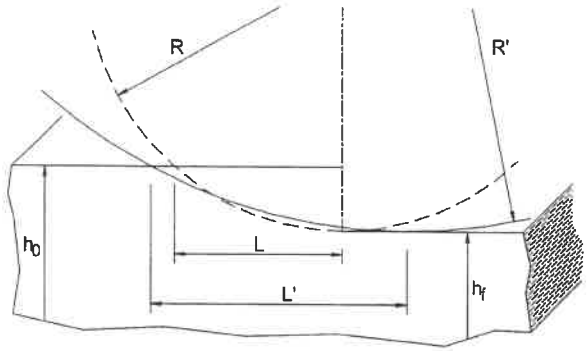
$$F_s = \left(\frac{K\bar{\varepsilon}_f^{\,n}}{n+1}\right)\frac{h_m}{\mu L}\left(exp^{\frac{\mu L}{h_m}} - 1 \right) L w \tag{9.2.16}$$



A anterior expressão permite calcular a força de separação dos rolos considerando a influência do atrito na pressão de contacto, porém não contempla a deformação elástica (no sentido do achatamento) que os rolos sofrem durante o processo. Para superar este facto, Hitchcock introduziu o conceito de raio efectivo do rolo, R', que é um raio superior ao dos rolos não deformados que considera a respectiva deformação elástica, pressupondo que estes mantêm o perfil circular (ver figura seguinte), sendo dado por,

$$R' = R\left(1+\frac{16\left(1-\nu^2\right)F_s}{\pi E w\,\Delta h}\right) = R\left(1+\frac{C F_s}{w\,\Delta h}\right) \quad \text{com} \quad C=\frac{16\left(1-\nu^2\right)}{\pi E} \tag{9.2.17}$$

em que R é o raio dos rolos não deformados, ν é o coeficiente de Poisson e E o módulo de elasticidade do material dos rolos, w a largura e Δh a redução de espessura da chapa.



Analisando as equações (9.2.17) e (9.2.16) constata-se que a consequência directa do aumento do raio efectivo dos rolos é o acréscimo da área de contacto entre os rolos e o material, levando a que a respectiva projecção horizontal também seja maior, o que determina o aumento da força de separação.

Depara-se, assim, um processo iterativo que deve ser continuado até que a diferença entre dois raios sucessivos seja considerada suficientemente pequena. A tabela seguinte mostra os resultados do processo iterativo e simultaneamente resume as diferentes etapas do mesmo. No entanto, antes da tabela apresenta-se o cálculo das variáveis que embora intervenham no processo iterativo o seu valor permanece inalterado.

$$h_m = \frac{h_0+h_f}{2} = \frac{2.5+2}{2} = 2.25\,\text{mm}$$

$$\bar{\varepsilon}_f = 1.15\times\ln\left(h_0/h_f\right) = 1.15\times\ln\left(2.5/2\right) = 0.257$$

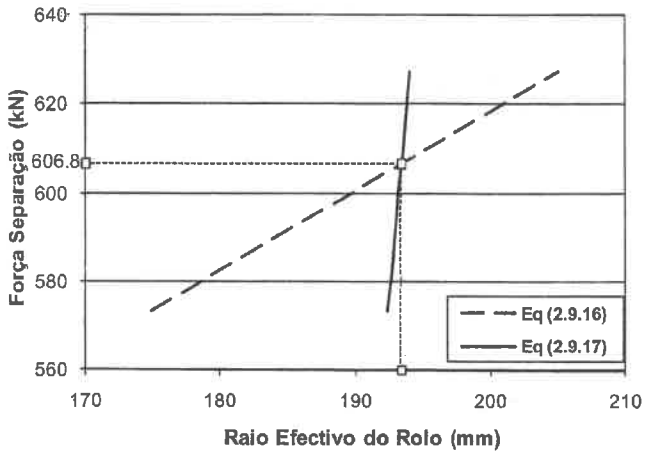
$$\sigma_{unif} = \frac{K\bar{\varepsilon}_f^{\,n}}{n+1} = \frac{450\times 0.257^{0.33}}{0.33+1} = 216.09\ \text{MPa} \tag{9.2.18}$$

$$C = \frac{16\left(1-\nu^2\right)}{\pi E} = \frac{16\times\left(1-0.33^2\right)}{\pi\times 207000} = 2.19\times10^{-5}\ \text{mm}^2/\text{N}$$

Iteração	R (mm)	L (mm)	L/h_m	Q_{fs}	F_s (kN)	R′ (mm)	R′/R	ΔR (mm)
1	175.000	9.351	4.156	1.136	573.434	192.332	1.099	17.332
2	192.332	9.803	4.357	1.143	604.973	193.286	1.104	0.953
3	193.286	9.828	4.368	1.143	606.677	193.337	1.105	0.052
4	193.337	9.829	4.368	1.143	606.769	193.340	1.105	0.003
5	193.340	9.829	4.368	1.143	606.774	193.340	1.105	0.000
Equação	--	(9.2.1)	--	(9.2.15)	(9.2.16)	(9.2.17)	--	--

Conclui-se, deste modo, que a deformação elástica do rolo leva a que o processo se desenrole com um rolo com um raio efectivo de $R' = 193.34$ mm, em consequência do valor da força de separação ser de $F_s = 606.8$ kN.

É interessante notar que o processo iterativo desenvolvido anteriormente pode ser resolvido igualmente de um modo gráfico. De facto, a solução do problema surge da igualdade entre as equações (9.2.16) e (9.2.17). Então, traçando graficamente a equação da força de separação em função do raio efectivo do rolo (9.2.16), a solução do problema estará no ponto de intersecção com a equação que expressa o raio efectivo em função da força de separação (9.2.17), conforme se mostra na figura seguinte.



Uma vez determinada a força de separação dos rolos, o momento de laminagem, ou momento torsor, necessário para mover cada um dos rolos é calculado tomando a força de separação a actuar no ponto neutro, que neste caso se admite estar localizado a meio do comprimento de contacto projectado $(L/2)$. Deste modo, tem-se,

$$M = F_s \frac{L}{2} = 606800 \times \frac{9.829 \times 10^{-3}}{2} = 2982.1\,\text{Nm} \qquad (9.2.19)$$

Sendo a potência por rolo necessária à laminagem dada por,

$$P = M\,\omega = M\frac{v_r}{R} = M\frac{2\pi NR'}{R'} = M\,2\pi N = 2982.1 \times 2 \times \pi \times \frac{30}{60} = 9368.5\ \text{W} \cong 9.4\ \text{kW} \qquad (9.2.20)$$

O que indica que a operação de laminagem pode ser realizada, pois o valor de potência necessária à operação é inferior ao que o laminador pode fornecer, $P_{lam} = 15\,kW$.

Problema 9.3

Pretende-se reduzir 20% a espessura de uma chapa de aço carbono com 25 mm de espessura e 500 mm de largura através de laminagem a quente num laminador de 2 rolos. Os rolos do laminador têm um diâmetro de 400 mm e rodam a uma velocidade de 30 r.p.m. As características mecânicas do aço carbono, nas condições de laminagem, são dadas através da seguinte lei de comportamento viscoplástico, $\overline{\sigma} = 32.7\,\dot{\overline{\varepsilon}}^{0.164}\text{MPa}$, enquanto que o coeficiente de atrito entre o material e os rolos do laminador é de $\mu = 0.4$. Admitindo que a deformação plástica é homogénea,

a) Verifique se é possível realizar a redução de espessura pretendida num único passo.

b) Admitindo que o ponto neutro se situa a meio do comprimento de contacto projectado, determine a variação da velocidade tangencial do material entre a entrada e a saída. Represente essa variação graficamente e compare-a com a velocidade periférica do rolo.

c) Mostre como varia a velocidade de deformação na zona em deformação. Determine o valor da velocidade média de deformação. Nota: Na resolução desta alínea admita que na interface material/rolos existem condições de aderência, ou seja, o atrito é máximo.

d) Determine a força de separação dos rolos e discuta se a velocidade de laminagem pode influenciar o seu valor.

e) Determine o momento e a potência de laminagem.

Resolução

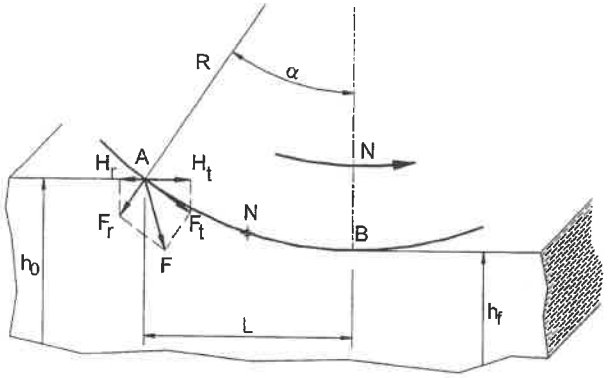
a) A redução de espessura que se deseja efectuar nesta operação de laminagem é de 20%, ou seja, pretende-se reduzir a espessura da chapa (ou *draft* na literatura inglesa) em,

$$\Delta h = h_0 - h_f = 0.2 \times 25 = 5\,\text{mm} \qquad (9.3.1)$$

Para saber se é possível realizar esta redução de espessura, sabe-se que a máxima redução de espessura (Δh_{max}) é função da dimensão dos rolos e das características tribológicas da interface rolos/material. De facto, considerando a figura seguinte, sabe-se que a laminagem é possível se a componente horizontal (H_r) da força radial total (F_r) for inferior à componente horizontal (H_t) da força tangencial total, (F_t) que se desenvolve no comprimento de contacto, ou seja,

$$F_r \sin\alpha \le F_t \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu = \tan\beta = \frac{F_t}{F_r} \ge \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \beta \ge \alpha \tag{9.3.2}$$

em que α é o ângulo de contacto e β é o ângulo de atrito.



É, no entanto, interessante notar que a condição de laminagem pode ser escrita em função das características do laminador. Para tal, considerando o comprimento projectado da zona em contacto L, o valor do ângulo de contacto pode ser determinado a partir de,

$$\tan\alpha = \frac{L}{R-\Delta h/2} = \frac{\sqrt{R^2-(R-\Delta h/2)^2}}{R-\Delta h/2} \cong \sqrt{\frac{\Delta h}{R}} \tag{9.3.3}$$

Expressão aproximada, na qual se considerou que o valor da variação de espessura se pode desprezar relativamente ao valor do raio dos rolos. Então, substituindo a equação (9.3.3) na condição de laminagem, expressa pela equação (9.3.2), obtém-se,

$$\mu \ge \sqrt{\frac{\Delta h}{R}} \quad \text{ou} \quad \Delta h_{max} = \mu^2 R \tag{9.3.4}$$

Aplicando esta equação às condições do problema obtém-se,

$$\Delta h_{max} = \mu^2 R = 0.4^2 \times 200 = 32\,\text{mm} \tag{9.3.5}$$

resultado que permite concluir que a condição de laminagem é verificada.

b) A velocidade periférica do rolo é dada por,

$$v_r = 2\pi NR = 2 \times \pi \times \frac{30}{60} \times 200 = 628.3\,\text{mm/s} \tag{9.3.6}$$

em que N é a velocidade de rotação do rolo.

Por seu lado, o comprimento de contacto projectado é dado por,

$$L = \sqrt{R^2-(R-\Delta h/2)^2} = \sqrt{R\Delta h - \frac{\Delta h^2}{4}} = \sqrt{200\times 5 - \frac{5^2}{4}} = 31.5\,\text{mm} \tag{9.3.7}$$

enquanto que o ângulo de contacto, α, é dado por,

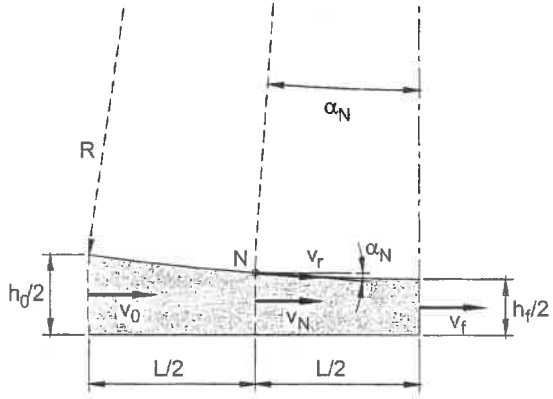
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{L}{R-\Delta h/2} = \frac{31.5}{200-5/2} = 0.159 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 9.06° \tag{9.3.8}$$

Conhecidos os principais parâmetros que caracterizam a laminagem, vão agora analisar-se as simplificações enunciadas para se determinar a variação de velocidade tangencial entre a entrada e a saída na região em deformação plástica. Assim, sendo a deformação homogénea, as secções na zona em deformação podem ser consideradas planas e a taxa volumétrica de material que as atravessam constante. Para analisar as simplificações de natureza geométrica considere-se a figura seguinte, na qual se assume que a secção que contém o ponto neutro (N) se situa a meio do comprimento de contacto (L), sendo, então, o ângulo do ponto neutro dado por,

$$\text{sen}\,\alpha_N = \frac{L}{2R} = \frac{31.5}{400} = 0.079 \quad \Rightarrow \quad \alpha_N = 4.52° \tag{9.3.9}$$

Uma vez que no ponto neutro a velocidade relativa entre o rolo e o material é nula, a velocidade com que o material atravessa a secção neutra será dada por,

$$v_N = v_r \cos\alpha_N = 628.3 \times \cos 4.52 = 626.3\,\text{mm/s} \tag{9.3.10}$$



Sendo a área da secção neutra dada por,

$$S_N = h_N w = [h_f + D(1-\cos\alpha_N)]w = [20+400(1-\cos 4.52)]\times 500 = 10622.1\,\text{mm}^2 \qquad (9.3.11)$$

Sendo a taxa volumétrica $(\dot{Q})$ dada por,

$$\dot{Q} = v_N S_N = 626.3\times 10^{-3}\times 10622.1\times 10^{-6} = 0.0067\ \text{m}^3/\text{s} \qquad (9.3.12)$$

Então, a variação de velocidade do material entre a entrada e a saída pode ser calculada em função da distância da secção à entrada (ℓ) do seguinte modo,

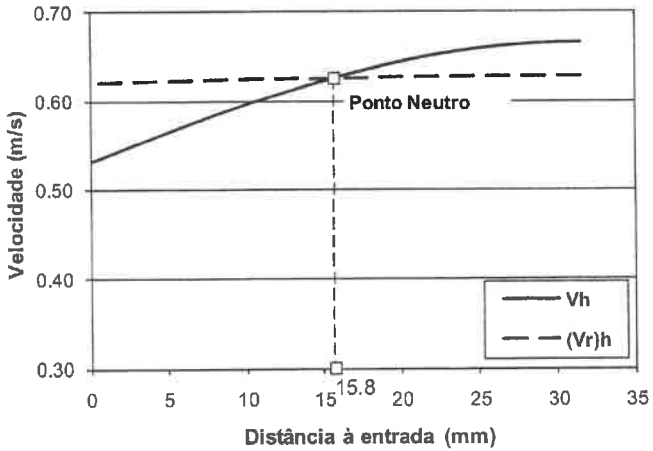
1– Arbitra - se ℓ, variando entre 0 e L

2 – Calcula - se α_ℓ; $\alpha_\ell = sen^{-1}(\ell/R)$

3 – Calcula - se S_ℓ; $S_\ell = [h_f + R(1-\cos\alpha_\ell)]W$ (9.3.13)

4 – Calcula - se a velocidade v_ℓ; $v_\ell = \dot{Q}/S_\ell$

A figura seguinte mostra a variação da velocidade horizontal do material na região em deformação (V_h) e compara-a com a correspondente velocidade do rolo projectada horizontalmente $(V_r)_h$.



Analisando o gráfico da figura anterior é então possível verificar que entre a entrada e a secção neutra a velocidade do material é inferior à do rolo, dando origem a tensões de corte por atrito que distorcem no sentido horário. Passada a secção neutra as tensões de corte invertem a distorção (passa a anti-horária) em consequência de a velocidade do material passar a ser superior à do rolo.

Em qualquer dos casos existe escorregamento do material sobre o rolo, com excepção do ponto neutro, sendo habitual quantificar esse escorregamento na secção de saída através do coeficiente de escorregamento posterior (*foward slip* na literatura inglesa),

$$s = \frac{v_f - v_r}{v_r} = \frac{0.67-0.63}{0.63} = 0.06 \qquad (9.3.14)$$

c) A velocidade média de deformação da região em deformação plástica, $\dot{\varepsilon}_m$, obtém-se dividindo o incremento de extensão verdadeira entre a entrada e a saída (em condições de deformação plana), $\Delta\bar{\varepsilon}$, pelo intervalo de tempo que um elemento de volume genérico leva a atravessar a zona de deformação plástica. Admitindo condições de atrito máximo, o intervalo de tempo é dado por, $\Delta t = L/v_r$ e a velocidade de deformação média será,

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_m = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}}{\Delta t} = \frac{1.15\ln(h_0/h_f)}{L} v_r = 1.15 v_r \left[\frac{2}{D(h_0 - h_f)}\right]^{\frac{1}{2}} \ln\frac{h_0}{h_f} \qquad (9.3.15)$$

em que D é o diâmetro do rolo. Na anterior expressão admitiu-se que o comprimento de contacto é dado de um modo aproximado por, $L = \sqrt{R\Delta h}$, adoptando as aproximações efectuadas na equação (9.3.3). Substituindo valores na anterior equação obtém-se,

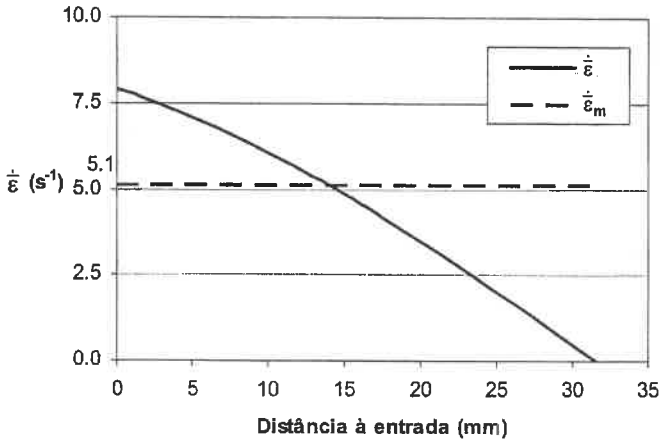
$$\dot{\bar{\varepsilon}}_m = 1.15 \times 628.3 \times \left[\frac{2}{400 \times (25 - 20)}\right]^{\frac{1}{2}} \ln\frac{25}{20} = 5.1 s^{-1} \qquad (9.3.16)$$

No cálculo da velocidade de deformação média admitiu-se que a velocidade do material é igual à velocidade periférica dos rolos de laminagem, ou seja, em condições tribológicas de aderência. Partindo do mesmo pressuposto, se for α_ℓ o ângulo formado entre o raio do rolo de laminagem e um elemento de volume arbitrário na região em deformação a taxa com que esse elemento é comprimido é dada por: $(v_{ax})_\ell = 2v_r sen\alpha_\ell$. Então, a velocidade de deformação a que cada elemento de volume é deformado será obtida dividindo a taxa de deformação pela respectiva altura (h_ℓ), ou seja,

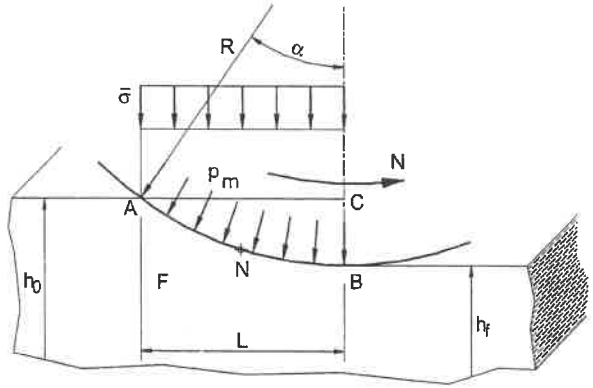
$$\dot{\bar{\varepsilon}}_\ell = \frac{(v_{ax})_\ell}{h_\ell} = \frac{2v_r \operatorname{sen}\alpha_\ell}{h_f + D(1 - \cos\alpha_\ell)} \qquad (9.3.17)$$

em que v_r é a velocidade periférica do rolo, h_f a espessura à saída e D é o diâmetro do rolo.

Na figura seguinte apresenta-se a variação da velocidade de deformação desde a secção de entrada até à de saída obtida através da equação (9.3.17). No mesmo gráfico compara-se a velocidade média de deformação obtida a partir da equação (9.3.15).



d) Uma estimativa simples da pressão/força de separação dos rolos pode ser obtida a partir da compressão homogénea de uma placa entre pratos planos bem lubrificados. Nesta analogia considera-se que a área de contacto entre o material e os rolos é a área de contacto projectada no plano horizontal, conforme se mostra na figura seguinte.



Então, a pressão média de laminagem é calculada a partir da lei de comportamento viscoplástica do material, considerando a velocidade de deformação média determinada na alínea anterior (equação (9.3.16)), ou seja,

$$p_m = \bar{\sigma} = 32.7\,\dot{\bar{\varepsilon}}_m^{0.164} = 32.7 \times 5.1^{0.164} = 42.7\,\text{MPa} \qquad (9.3.18)$$

Sendo a força de separação, F_s, dada por,

$$F_s = \bar{\sigma} L w = 42.7 \times 31.5 \times 500 = 672525\,\text{N} \cong 672.5\,\text{kN} \qquad (9.3.19)$$

A velocidade de rotação dos rolos influencia directamente a velocidade de deformação da operação conforme se pode verificar através das equação (9.3.15) e (9.3.17). Assim, o aumento da velocidade de rotação dos rolos provoca um aumento da velocidade de deformação, o que tem como consequência o acréscimo da tensão média de escoamento do material, especialmente na laminagem a quente, onde o material apresenta geralmente um comportamento viscoplástico levando, desse modo, a que a força de separação dos rolos, o binário e a potência de laminagem também aumentem.

e) O momento de laminagem, ou momento torsor, requerido para mover cada um dos rolos é calculado admitindo que a força de separação actua no ponto neutro, o qual, neste caso, se considera a meio do comprimento de contacto projectado $(L/2)$. Deste modo, tem-se,

$$M = F_s \frac{L}{2} = 672525 \times \frac{31.5 \times 10^{-3}}{2} = 10592.3\,\text{Nm} \qquad (9.3.20)$$

Então, a potência por rolo necessária à laminagem será,

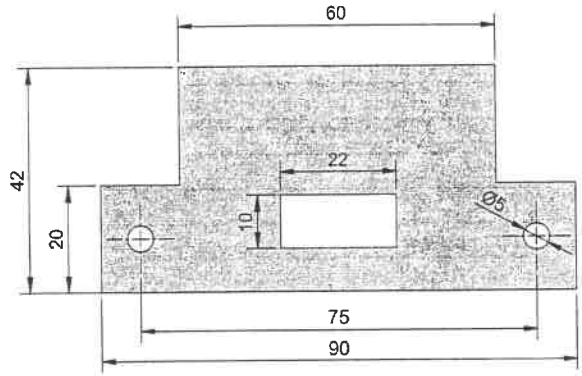
$$P = M\,\omega = M \frac{v_r}{R} = 10592.3 \times \frac{0.628}{0.2} = 33259.8\,\text{W} \cong 33.3\,\text{kW} \qquad (9.3.21)$$

10. CORTE POR ARROMBAMENTO

Neste capítulo apresenta-se um conjunto de problemas que abordam os processos tecnológicos de corte por arrombamento

Problema 10.1

Admita que se pretende fabricar por corte por arrombamento a peça que se encontra representada na figura.



A espessura da peça é 2 mm e o material da chapa utilizado no seu fabrico é uma liga de Alumínio AA1100-H12, com as seguintes propriedades mecânicas,

Módulo de Elasticidade (GPa)	Coeficiente de Poisson	Dureza Brinell	Tensão Limite de Elasticidade (MPa)	Tensão de Rotura (MPa)	Alongamento na fractura (%)
68.9	0.33	28	103	110	12.0

a) Determine o valor máximo da força de corte, admitindo que se produz uma peça em cada golpe da prensa.

b) Calcule o trabalho que é necessário realizar para efectuar o corte da peça.

c) Calcule a potência máxima exigida à prensa no caso de se pretender produzir uma série elevada de peças numa prensa mecânica com uma cadência de produção de 80 peças/min e um curso de 10 mm.

Resolução

a) A força de corte máxima é dada por,

$$F_{max} = C\,\sigma_R\,p\,h \qquad (10.1.1)$$

em que p é o perímetro sobre o qual se encontram aplicadas as forças de corte, h a espessura da chapa, σ_R a tensão de rotura do material e C uma constante que permite determinar a tensão de rotura ao corte do material, τ_R, a partir da tensão de rotura do ensaio de tracção uniaxial, σ_R.

Consultando a tabela seguinte obtém-se o valor da constante $C_{máx} = 0.75$.

Material	C
Alumínio	0.6-0.75
Latão	0.65 – 0.7
Cobre	0.65 – 0.7
Aço	0.7 – 0.8
Aço inoxidável	0.75 – 0.8

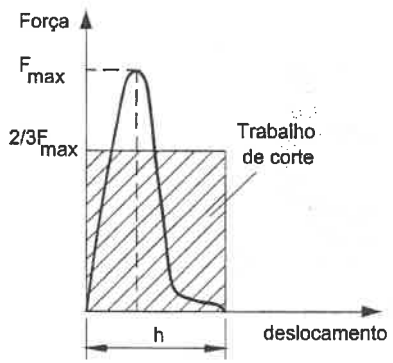
Para se determinar o perímetro de corte sabe-se que é produzida uma peça a cada golpe da prensa, então o perímetro de corte total é igual à soma do perímetro dos três furos interiores mais o perímetro do contorno exterior, ou seja,

$$p = p_{int} + p_{ext} = \\ = (2\times\pi 5 + 2\times 22 + 2\times 10) + (60 + 90 + 2\times 20 + 2\times 22 + 2\times 15) = 359.42\ \text{mm} \qquad (10.1.2)$$

Substituindo valores na equação (10.1.1), obtém-se o valor da força de corte máxima do processo,

$$F_{max} = C\,\sigma_R\,p\,h = 0.75\times 110\times 359.4\times 2 = 59301\ \text{N} \cong 59.3\ \text{kN} \qquad (10.1.3)$$

b) O trabalho de corte é dado pela área delimitada pela curva da força de corte com o deslocamento do punção como ilustra a figura seguinte. Contudo, não se conhecendo a equação desta curva, é habitual determinar-se o valor do trabalho de corte a partir de uma estimativa do valor médio da força de corte, F_{med}, que se admite ser igual a $2/3\ F_{max}$.

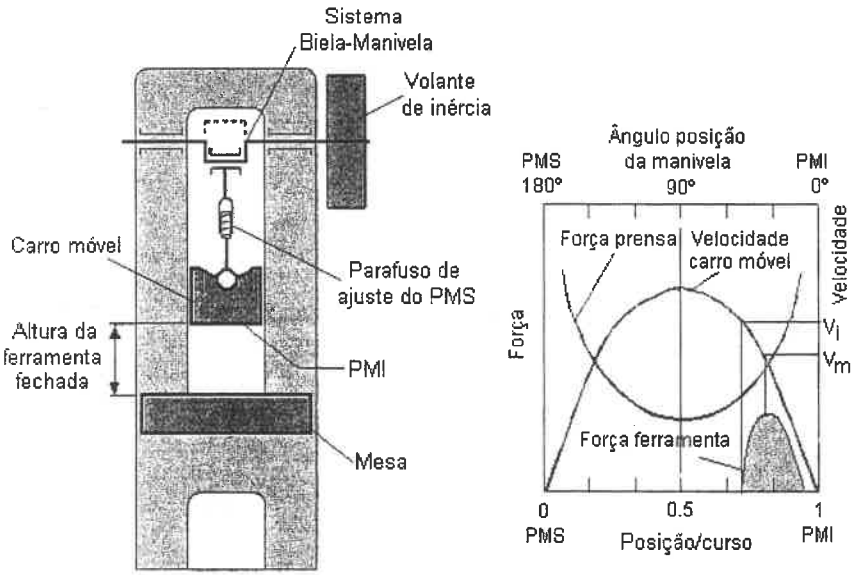


Deste modo, o trabalho de corte determina-se do seguinte modo,

$$W = F_{med}\,h = \frac{2}{3}F_{max}\,h = \frac{2}{3}\times 59301\times 2\times 10^{-3} = 79.1\ \text{Nm} \qquad (10.1.4)$$

c) Tratando-se de uma prensa mecânica em que o sistema de accionamento é do tipo biela-manivela, cuja constituição básica se apresenta esquematicamente na figura seguinte (lado esquerdo), a velocidade do carro móvel varia desde zero no PMS (Ponto Morto Superior) até se anular de novo no PMI (Ponto Morto Inferior), conforme se ilustra qualitativamente na figura seguinte (lado direito). Deste modo, quando o corte da chapa se inicia a velocidade de corte é V_i, reduzindo-se para V_m quando se atinge o valor máximo da força de corte. Então, o valor da potência de corte instantânea depende tanto da evolução da força de corte, como da velocidade de actuação da prensa, porém verifica-se que o seu valor máximo é atingido no instante em que a força de corte é máxima.

Uma vez que o valor máximo da força de corte já é conhecido, para estimar o valor da potência máxima de corte, falta conhecer o valor da velocidade de corte V_m. Como não existem dados sobre a prensa que permitem o cálculo exacto desta velocidade, resta a alternativa de se estimar o valor máximo da potência de corte considerando um valor médio da velocidade de corte, o qual pode ser obtido a partir do curso total da ferramenta e do número de golpes por minuto da prensa.



Para determinar a velocidade média da prensa por golpe, V_{med}, começa por se calcular o tempo de um golpe (ou de um ciclo) da prensa, t_c, ou seja,

$$t_c = \frac{60}{80} = 0.75 \text{ s} \qquad (10.1.5)$$

Uma vez que o tempo de um golpe considera uma volta completa da manivela (início e retorno ao PMS), enquanto que o curso da ferramenta se processa apenas em meia volta (do PMS até ao PMI), a velocidade média será,

$$V_{med} = \frac{c_f}{t_c/2} = \frac{10}{0.75/2} = 26.7 \text{ mm/s} \qquad (10.1.6)$$

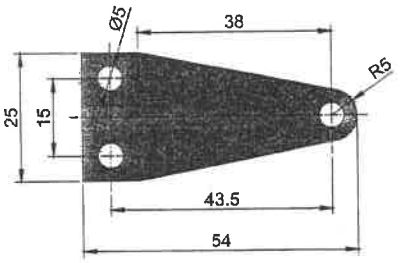
em que c_f é o curso da ferramenta e t_c é o tempo de um ciclo da prensa.

Então, uma estimativa da potência máxima instantânea de corte será dada por,

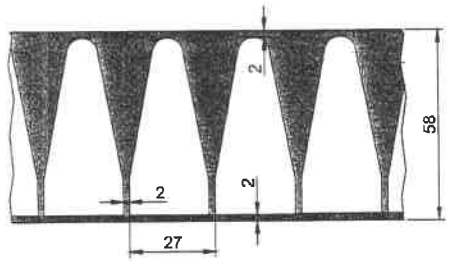
$$P_{max} = F_{max}\, V_{med} = 59301 \times 26.7 \times 10^{-3} = 1583.3 \text{ W} \cong 1.6 \text{ kW} \qquad (10.1.7)$$

Problema 10.2

Pretendem-se fabricar 500 000 peças iguais às que se encontram representadas na figura, adoptando um método de fabrico que conduza à implantação do arco que se mostra na mesma figura.



Peça



Implantação no arco

As peças têm 2 mm de espessura e deverão ser fabricadas num latão com uma tensão de rotura $\sigma_R = 330$ MPa.

A ferramenta utilizada na produção da peça deverá ser instalada numa prensa mecânica com uma carga nominal de 0.5 MN e uma cadência de 80 golpes/min.

a) Determine a força de corte admitindo que se fabrica uma peça a cada golpe da prensa.

b) Determine a energia e a potência máxima necessária à operação admitindo que se fabrica uma peça a cada golpe da prensa e ainda que no instante de corte a velocidade é aproximadamente constante e igual a 20 mm/s. Considere que a prensa tem um rendimento, $\eta = 0.8$.

c) Determine a percentagem de aproveitamento do arco e apresente uma estimativa do tempo de produção para o fabrico das 500 000 peças, tendo por base o corte de uma peça a cada golpe da prensa com a implantação proposta (admita que a espessura das pontes dos lados e de avanço são iguais e valem 2 mm, conforme ilustrado na figura anterior).

d) Considerando o fabrico de duas peças por cada golpe da prensa numa ferramenta progressiva, apresente uma implantação alternativa que propicie um melhor aproveitamento da chapa. Apresente em esboço a sequência de fabrico da solução proposta. Determine a percentagem de aproveitamento do arco.

Resolução

a) Uma vez que a ferramenta produz uma peça por cada golpe, o perímetro total que se corte deve contabilizar o perímetro dos três furos interiores, mais o perímetro do corte do contorno exterior. Nestas condições, o perímetro de corte total em cada golpe é igual a,

$$p = p_{int} + p_{ext} = 3\times(\pi\times 5)+\left(25+2\times 11+\pi\times 5+2\times\sqrt{38^2+7.5^2}\right) = 187.3\,\text{mm} \qquad (10.2.1)$$

Pelo que o valor da força máxima de corte para realizar esta operação, atendendo a que a chapa é de latão, $C = 0.7$ (tabela do problema 10.1), vem dada por,

$$F_{max} = C\,\sigma_R\,p\,h = 0.7\times 330\times 187.3\times 2 = 86532.6\,\text{N} \cong 86.5\ \text{kN} \qquad (10.2.2)$$

Como a força máxima necessária para efectuar o corte é inferior à disponível na prensa conclui-se que esta operação pode ser realizada nesta prensa com uma margem de segurança elevada, de facto a força máxima de corte totaliza apenas cerca de 17.3% da capacidade nominal da prensa,

$$\frac{F_{max}}{F_{nom}} = \frac{86532.6}{0.5\times 10^6} = 0.173 \qquad (10.2.3)$$

b) A energia necessária ao corte, ou trabalho de corte, calcula-se aplicando a equação (10.1.4), ou seja,

$$W = \frac{2}{3}F_{max}\,h = \frac{2}{3}\times 86532.6\times 2\times 10^{-3} = 115.38\,\text{Nm} \qquad (10.2.4)$$

Conforme discutido no problema anterior, a potência máxima exigida à prensa calcula-se no instante correspondente à força máxima de corte. Considerando o rendimento de $\eta = 0.8$ para o sistema de transmissão de força da prensa, no instante em que a força de corte atinge o seu valor máximo a potência de corte será,

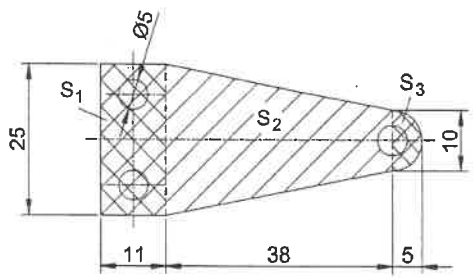
$$P_{max} = \frac{1}{\eta}F_{max}\,v = \frac{1}{0.8}\times 86532.6\times 20\times 10^{-3} = 2163.3\ \text{W} \cong 2.2\ \text{kW} \qquad (10.2.5)$$

c) O aproveitamento do arco pode ser determinado relacionando a área de arco necessária ao fabrico de uma peça com a área da peça, ou seja, o aproveitamento do arco em percentagem é dado por,

$$A_u = \frac{S_{peça}}{S_{arco}}x100 = \frac{S_{peça}}{p_p xL}x100 \qquad (10.2.6)$$

em que, p_p é o passo entre peças, L a largura do arco e S_p a área da peça.

Para calcular a área da peça considere-se a decomposição da sua área em 3 sub áreas, mais a área dos 3 furos interiores, conforme se ilustra na figura seguinte,



sendo então a área total da peça, S_p, dada por,

$$S_{peça} = S_1 + S_2 + S_3 - 3S_f = (11\times 25)+\left(10\times 38+\frac{2}{2}\times 38\times 7.5\right)+\left(\frac{\pi}{2}\times 5^2\right)-3\pi\times 2.5^2 = 920.4\,\text{mm}^2 \qquad (10.2.7)$$

Substituindo valores na equação (10.2.6), obtém-se o valor do aproveitamento do arco para esta opção de fabrico,

$$A_u = \frac{S_{peça}}{p_p xL}x100 = \frac{920.4}{27\times 58}\times 100 = 58.8\% \qquad (10.2.8)$$

valor que efectivamente corresponde a um baixo aproveitamento do arco, uma vez que cerca de 41% da matéria prima será transformada em desperdício.

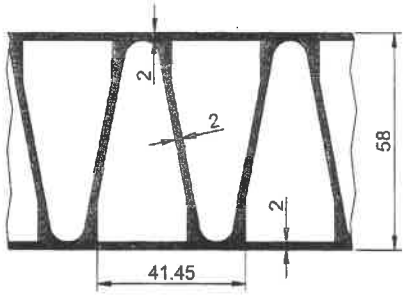
Para estimar o tempo necessário à produção, sabe-se que a cadência da prensa é de 80 golpes/minuto, pelo que o tempo de um golpe será,

$$t_g = \frac{60}{80} = 0.75 \text{ s} \qquad (10.2.9)$$

Levando a que o tempo necessário para produzir 500 000 peças seja,

$$T = 500000 \times 0.75 = 375000 \text{ s} \cong 6250 \text{ min} \cong 104.2 \text{ h} \qquad (10.2.10)$$

d) Uma implantação possível resultante da produção de duas peças por golpe da prensa é a que se encontra representada na figura seguinte.



Para calcular a percentagem de aproveitamento do arco retoma-se a equação (10.2.6). Notando que neste caso se produzem 2 peças por cada passo entre peças, a substituição de valores nesta equação fornece o seguinte valor do aproveitamento do arco,

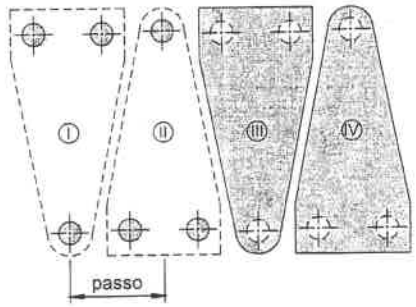
$$A_u = \frac{S_{peça}}{p_p x L} x100 = \frac{2 \times 920.4}{41.45 \times 58} \times 100 = 76.6\% \qquad (10.2.11)$$

O valor obtido pode parecer pequeno, no entanto deve-se assinalar que neste cálculo foi contabilizado o inevitável desperdício dos furos interiores. Não obstante, relativamente à implantação inicial o aproveitamento de matéria prima sofre um aumento significativo.

A decisão sobre a implantação que deve ser adoptada situa-se num plano económico que depende fundamentalmente da dimensão do lote a fabricar. Se por um lado existe um ganho significativo no aproveitamento da matéria prima quando se aumenta o número de peças produzidas por golpe, por outro lado a ferramenta inevitavelmente aumenta de dimensão (bases, tectos, porta punções,..) devido ao facto de serem necessários mais elementos activos de corte (punções, matrizes,..). Em conclusão, para as pequenas e médias séries de fabrico, como é o caso deste problema, geralmente o benefício que se

obtém com o melhor aproveitamento da matéria prima não é compensado pelo agravamento dos custos associados à ferramenta. Porém, este tipo de análise deverá ser feito caso a caso.

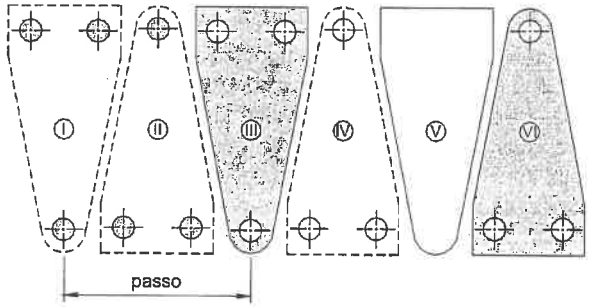
Na generalidade dos casos, associado ao aumento do número de peças produzidas por golpe, surgem alguns problemas conceptuais que conduzem a uma maior complexidade da ferramenta. Para ilustrar alguns destes problemas vai discutir-se de seguida a sequência de fabrico da solução proposta numa ferramenta progressiva. A solução que parece óbvia para a matriz é aquela que se apresenta na figura seguinte, a qual é basicamente constituída por 4 estações; as duas primeiras usadas para fazer os furos circulares interiores e as duas últimas para efectuar o corte exterior da peça (na figura as zonas sombreadas indicam as áreas que estão a ser cortadas). Porém, verifica-se que a parede da matriz que separa as matrizes das estações III e IV fica com uma espessura muito reduzida, da ordem de grandeza dos 2 mm, facto que para além de poder inviabilizar a realização dos tratamentos térmicos da matriz, promove uma fragilização que em fabrico rapidamente conduz à sua fractura. Como valor indicativo de projecto, o valor mínimo para a espessura da parede deve situar-se entre os 8 e os 10 mm.



Então, se a solução fosse a de aumentar a espessura da parede da matriz, de modo a assegurar o valor mínimo aconselhado, a consequência seria a alteração da implantação da peça no arco, com o aumento do desperdício da matéria prima. Assim, a resolução deste problema tem que passar pela alteração da sequência de fabrico, com a introdução de novas estações na ferramenta.

Uma hipótese que viabiliza a implantação proposta encontra-se esquematizada na figura seguinte, na qual o passo do arco é duplicado e são introduzidas as estações "mortas" IV e V, onde não se processa qualquer alteração do arco, apenas com o

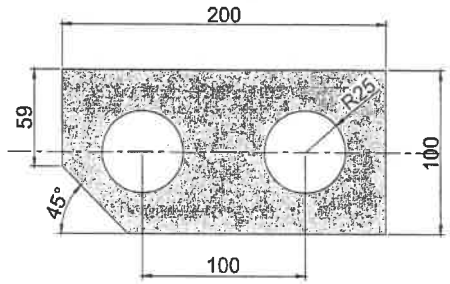
objectivo de afastar as matrizes das estações III e VI para valores seguros e simultaneamente permitir a coordenação do passo do arco na ferramenta.



Como nota final, assinale-se que desta solução resulta um aumento dimensional da ferramenta que não está apenas associado à duplicação dos elementos activos, mas tem em conta igualmente os aspectos de projecto.

Problema 10.3

Uma empresa recebe uma encomenda para produzir 500000 peças com a geometria representada na figura seguinte. Porém, o fabrico destina-se apenas ao corte dos dois furos circulares, já que a matéria prima é fornecida sob a forma de chapas com o corte exterior definido.



As chapas têm uma espessura de 3 mm, sendo o material uma liga de Alumínio Al 6061 T6 com as características mecânicas dadas na tabela seguinte.

Módulo de Elasticidade (GPa)	Coeficiente de Poisson	Dureza Brinell	Tensão Limite de Elasticidade (MPa)	Tensão de Rotura (MPa)	Alongamento na fractura (%)
68.9	0.33	95	276	310	12.0

Sabendo que a opção de fabrico consiste no corte dos dois furos em simultâneo e que se dispõe de uma prensa com uma capacidade nominal de 500 kN, com uma cadência de 90 golpes/min,

a) Calcule a força e a energia necessária ao fabrico dos dois furos. Verifique se os cortes podem ser efectuados na prensa mecânica disponível.

b) Dimensione os punções e as matrizes.

c) Esboce uma ferramenta que permita realizar o fabrico.

Resolução

a) Para se determinar a força necessária ao fabrico, sabe-se que a força de corte máxima é dada por,

$$F_{max} = C\,\sigma_R\,p\,h \qquad (10.3.1)$$

em que p é o perímetro de corte, h a espessura da chapa, σ_R a tensão de rotura do material e C uma constante que permite calcular a tensão de rotura ao corte do material, τ_R, a partir da tensão de rotura do ensaio de tracção uniaxial, σ_R.

O perímetro de corte correspondente a cada furo é de,

$$p = \pi\,D_f = \pi \times 50 = 157.1\,\text{mm} \qquad (10.3.2)$$

Então, o valor da força máxima de corte necessária ao corte de um furo calcula-se de acordo com a equação (10.3.1), considerando o valor da constante $C = 0.75$, para chapas de alumínio (ver tabela do problema 10.1), obtendo-se,

$$(F_{max})_{1\ furo} = C\,\sigma_R\,p\,h = 0.75 \times 310 \times 157.1 \times 3 = 109577.3\ \text{N} \cong 109.6\ \text{kN} \qquad (10.2.3)$$

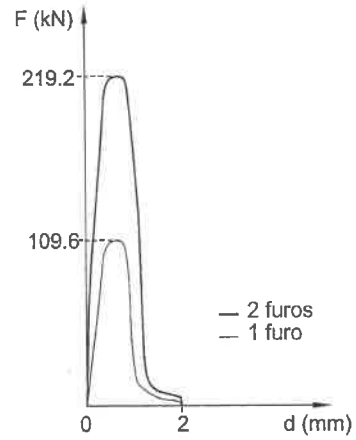
Como são realizados dois furos em simultâneo, a força de corte máxima será,

$$(F_{max})_{2\ furos} = 2 \times 109577.3 = 219154.5\ \text{N} \cong 219.2\ \text{kN} \qquad (10.3.4)$$

A figura seguinte mostra a evolução da força de corte com o deslocamento do punção para o corte de um furo e de dois furos em simultâneo. Nestas condições, conclui-se que a prensa mecânica tem capacidade para efectuar os dois furos em simultâneo, uma vez que a força de corte máxima necessária a esta operação é inferior à capacidade nominal da prensa que é de 500 kN.

A energia a fornecer para efectuar o corte dos dois furos corresponde ao trabalho de corte. De acordo com o exposto no problema 10.1, o trabalho de corte corresponde ao valor da área delimitada pela curva da força de corte (para cortar os dois furos em simultâneo) com o deslocamento do punção, calculando-se do seguinte modo,

$$W = \frac{2}{3}F_{max}\,h = \frac{2}{3} \times 0.75 \times \sigma_R\,p\,h^2 = \\ = \frac{2}{3} \times 0.75 \times 310 \times 10^6 \times \left(2 \times 157.1 \times 10^{-3}\right) \times \left(3 \times 10^{-3}\right)^2 = 438.3\,\text{Nm} \qquad (10.3.5)$$



b) Para dimensionar os punções e as matrizes é necessário definir o valor da folga por lado, neste caso folga radial. Não havendo requisitos definidos para a qualidade das superfícies dos furos opta-se por uma folga do tipo III que, de acordo com a tabela seguinte, e em face das características mecânicas do material será de 7% da espessura.

Material	Folga – percentagem da espessura do arco				
	Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV	Tipo V
Aço elevado teor carbono	23	18	15	12	-
Aço macio	21	12	9	6.5	2
Aço inoxidável	23	13	10	4	1.5
Cobre					
Duro	25	11	4	3.5	1.25
Macio	26	8	6	3	0.75
Bronze fosforoso	25	13	11	4.5	2.5
Latão					
Duro	24	10	7	4	0.8
Macio	21	9	6	2.5	1
Alumínio					
Duro	20	15	10	6	1
Macio	17	9	7	3	1
Magnésio	16	6	4	2	0.75
Chumbo	22	9	7	5	2.5

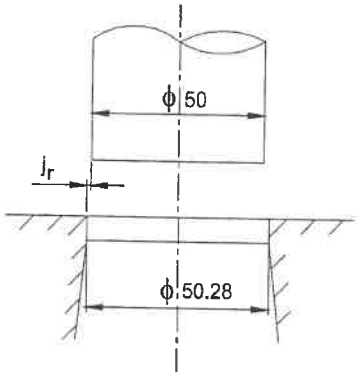
Então, o valor da folga radial será,

$$j_r = 0.07 \times h = 0.07 \times 2 = 0.14 \text{ mm} \qquad (10.3.6)$$

Para definir os diâmetros nominais do punção e da matriz da ferramenta, sabe-se que o diâmetro do furo será definido na zona de penetração pelas dimensões da zona cilíndrica do punção, nestas condições,

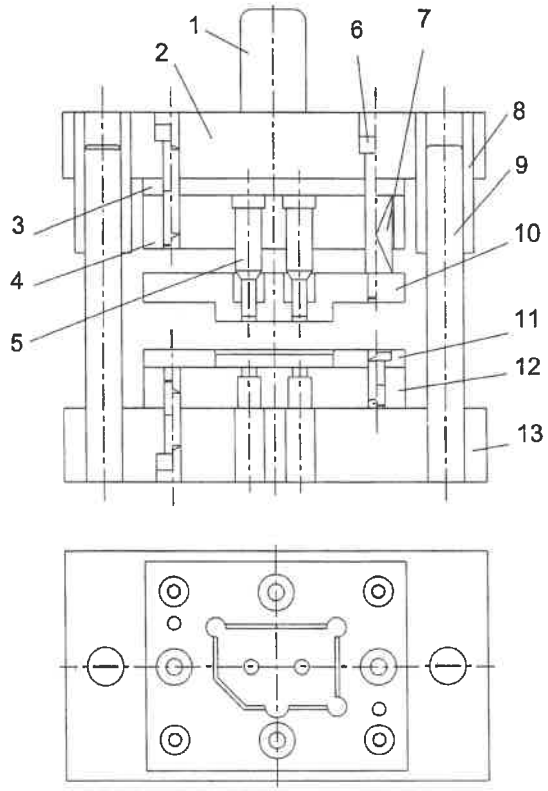
$$d_p = D_f = 50 \text{ mm}$$
$$d_m = D_f + 2\,j_r = 50.28 \text{ mm} \qquad (10.3.7)$$

em que D_f, d_p e d_m são os diâmetros do furo, do punção e da matriz, respectivamente, conforme se ilustra na figura seguinte.



c) A questão fundamental que se põe na concepção de uma ferramenta adequada às características deste tipo de fabrico está associada à alimentação da matéria prima e recolha da peça. De facto, a alimentação terá que ser feita unidade a unidade, pelo que a ferramenta deve estar concebida com um dispositivo de auto centragem da matéria prima que dependerá do tipo de alimentação (manual ou automática). Em face da dimensão do lote vai admitir-se que tanto a alimentação manual, como a recolha manual da peça é suficiente para cumprir os requisitos da encomenda. De notar que neste caso a cadência da prensa não tem qualquer interesse para estimar o tempo de produção, pois a prensa deverá funcionar golpe a golpe, accionada pelo operador. Este é um caso em que os dispositivos de segurança assumem uma importância acrescida, em virtude do operador

ter de aceder à zona de corte quer para posicionar a matéria prima, quer para recolher a peça.



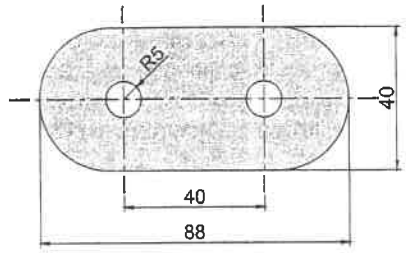
Legenda: 1-Encabadouro, 2-Tecto, 3- Placa de choque, 4-Porta punções, 5-Punções, 6-Parafuso placa móvel/encostador, 7-Mola, 8-Casquilho, 9-Coluna, 10-Placa móvel/encostador, 11-Placa guia, 12-Matriz, 13-Base.

Em face do exposto, apresenta-se na figura anterior um esboço de ferramenta preparada para alimentação e recolha manual (ver zona de posicionamento da placa) e dotada com uma placa de encosto móvel com funcionalidade dupla; a primeira, a de permitir que os furos sejam efectuados com a chapa pressionada evitando, assim, deformações indesejadas da peça e a segunda, a de assegurar que a peça depois de

cortada permanece no alojamento da matriz (não é arrastada pelos punções), para posterior recolha. No entanto, a placa móvel/encostador funciona ainda como placa guia dos punções, permitindo uma melhor centragem destes com a matriz e simultaneamente precaver contra eventuais fracturas dos punções.

Problema 10.4

Pretende-se produzir por corte por arrombamento convencional a peça representada na figura seguinte.



A peça com uma espessura de 2 mm deve ser fabricada em latão 70/30 (ISO CuZn30), com as características mecânicas que se apresentam na tabela seguinte:

Módulo de Elasticidade (GPa)	Coeficiente de Poisson	Dureza Rockwell F	Tensão Limite de Elasticidade (MPa)	Tensão de Rotura (MPa)	Alongamento na fractura (50 mm) (%)
210	0.375	54	75	300	68.0

Como requisitos de fabrico, pede-se que as peças tenham boa planicidade, que as rebarbas sejam reduzidas e se localizem apenas de um dos lados da peça e que a precisão no posicionamento dos furos relativamente ao contorno exterior seja boa.

A prensa disponível para o fabrico desta peça tem uma capacidade nominal de 10 ton e pode executar 90 ciclos/min.

a) Esboce uma ferramenta de corte por arrombamento que permita fabricar a peça com os requisitos apresentados.

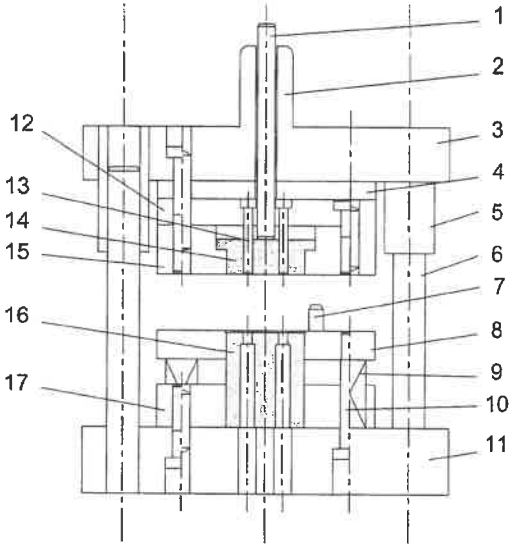
b) Defina o passo da ferramenta, determine as dimensões do arco e respectivo aproveitamento. Calcule a velocidade de alimentação do arco.

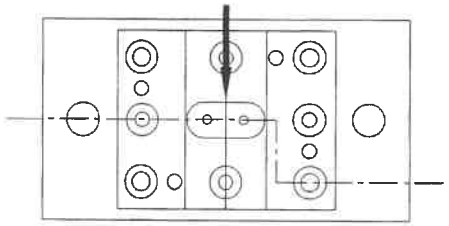
c) Estabeleça as dimensões nominais dos punções e das respectivas matrizes utilizadas na ferramenta.

d) Calcule as forças envolvidas na ferramenta, considerando a solução de fabrico proposta anteriormente. Sugira alterações ao fabrico caso verifique que a prensa não tem capacidade para realizar o corte.

Resolução

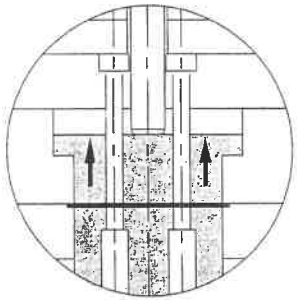
a) Na figura seguinte apresenta-se a estrutura básica de uma ferramenta de corte total que assegura a generalidade dos requisitos exigidos para a peça.



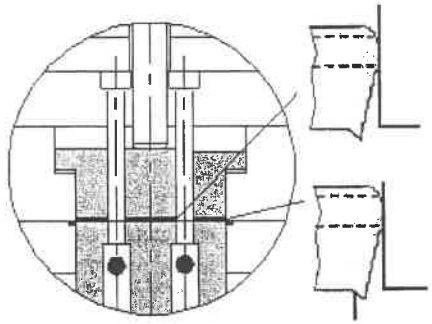


Legenda: 1-Barra extractora (2º efeito), 2-Encabadouro, 3-Tecto, 4-Placa de choque, 5-Casquilho, 6-Coluna, 7-Pino guia/centrador, 8-Placa móvel/encostador, 9-Mola, 10-Parafuso placa móvel, 11-Base, 12-Porta punções, 13-Punção circular, 14-Extractor, 15-Porta matriz, 16-Punção de recorte e 17-Porta punção.

As ferramentas de corte total em geral permitem; (1) reduzir o número de estações de processamento, (2) aumentar a precisão de fabrico do componente, uma vez que o posicionamento dos furos relativamente ao corte exterior é determinado pela construção da ferramenta, (3) assegurar a planicidade da peça, pois o trabalho de corte é realizado com a matéria prima presa pelo encostador e pelos punções e (4) obter uma peça em que a direcção da rebarba dos furos e do corte exterior é para o mesmo lado. Estas conclusões podem ser retiradas analisando a figura seguinte, na qual se apresenta o instante em que ambos os punções tocam a chapa (pormenor A) e o instante em que ambos os punções circulares e o de corte exterior já avançaram a espessura da chapa (pormenor B).



Pormenor A

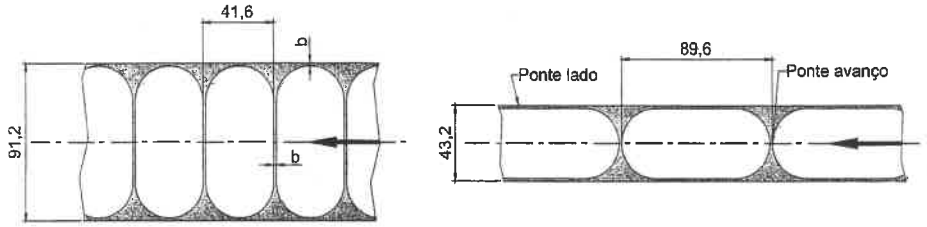


Pormenor B

Deve, porém, assinalar-se que este tipo de ferramenta apresenta algumas desvantagens, das quais se destacam; a sua maior complexidade, o facto de ser exigido um 2º efeito para extracção da peça do interior da matriz. No caso do esboço anteriormente apresentado admitiu-se que a prensa dispunha de um 2ª efeito independente (accionada na ferramenta através da barra extractora), no entanto, no caso da prensa não possuir tal dispositivo, o sistema de extracção da peça pode ser desenvolvido na própria ferramenta recorrendo a sistemas elásticos (por exemplo, molas ou elastómeros). Ainda no que se refere às desvantagens desta solução deve referir-se que a recolha da peça da ferramenta é feita usando o movimento de alimentação do arco, já que a peça é extraída da matriz e colocada sobre o arco recortado, sendo recolhida numa estação posterior, à saída da ferramenta, através de um sistema mecânico ou, mais habitualmente, através de um sopro de ar comprimido.

b) Considerando o fabrico de uma peça por golpe, existem duas hipóteses de implantação da peça no arco que convém analisar e que se mostram na figura seguinte, já que quando se implanta a peça no arco com o seu eixo inclinado o aproveitamento cai drasticamente.

Consultando a tabela que fornece os excessos para as pontes de avanço e dos lados, conclui-se que os valores de a e b (ver figura seguinte) são iguais e valem a=b=1.6 mm.



Implantação horizontal Implantação vertical

Nas figuras anteriores define-se ainda a largura do arco e o passo para as duas implantações consideradas. Assim, resta determinar o aproveitamento do arco em cada um dos casos para se tomar uma decisão. Definindo o aproveitamento do arco em percentagem com base na área de arco necessária ao fabrico de uma peça obtém-se,

$$A_u = \frac{S_{peça}}{S_{arco}} x100 = \frac{S_{peça}}{p_a x L} x100 \qquad (10.4.1)$$

em que, p_a é o passo, L a largura do arco e S_p a área da peça, sendo a área da peça dada por:

$$S_{peça} = S_{rect} + S_{circ} - S_{2cir} = 40x48 + \pi x20^2 - 2x\pi x5^2 = 3019.6\,mm^2 \qquad (10.4.2)$$

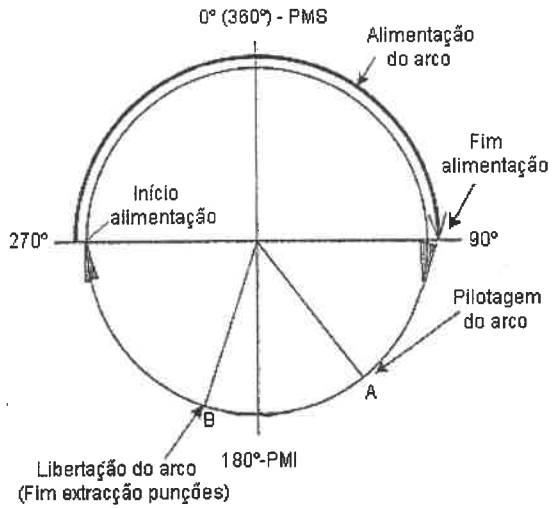
Substituindo na equação (10.4.1), vem,

$$A_h = \frac{S_{peça}}{S_{arco}} x100 = \frac{3019.6}{41.6x91.2} x100 = 79.6\%$$
$$A_v = \frac{S_{peça}}{S_{arco}} x100 = \frac{3019.6}{89.6x43.2} x100 = 78.0\% \qquad (10.4.3)$$

Optando-se naturalmente pela implantação horizontal, a qual apresenta ainda a vantagem de ser mais estável na alimentação devido à maior rigidez das pontes dos lados.

Antes de se proceder ao cálculo da velocidade de alimentação do arco, necessária para regular o dispositivo auxiliar de alimentação, convém compreender como é que os movimentos de alimentação e de corte devem estar coordenados. Para tal considere-se o diagrama da figura seguinte no qual se mostra de modo esquemático como o movimento de alimentação deve estar coordenado com o ângulo de rotação da manivela (ver esquema de accionamento de uma prensa de excêntrico, problema 10.1).

Interpretando o esquema da figura seguinte, conclui-se que o carro móvel da prensa desenvolve o seu movimento descendente desde o PMS (0°) até ao PMI (180°), iniciando, então, o movimento ascendente de retrocesso até voltar de novo ao PMS (360°). O movimento de alimentação do arco deve ser realizado enquanto o arco está livre na ferramenta sendo, por isso, habitualmente efectuado entre o ponto intermédio de retrocesso (270°) e o ponto intermédio de avanço (90°).



Com esta estratégia ficam disponíveis partes do curso da ferramenta para a actuação dos dispositivos de pilotagem do arco (ponto A do diagrama, indicando que os pilotos da ferramenta iniciam aqui a centragem), usados para eliminar eventuais erros de alimentação, com origem nos próprios alimentadores, bem como os sistemas de fixação

do arco. Naturalmente que estes últimos só devem começar a prender o arco depois de acabada a fase de centragem, pelo que o início da sua actuação se fará depois do A e antes do PMI, finalizando a sua acção já depois do PMI (ponto B no diagrama), de modo a garantir a extracção dos punções do arco e, assim, evitar empenos nas peças e no próprio arco.

Em face deste procedimento, constata-se que a alimentação do arco deve ser efectuada num tempo correspondente a meio golpe da prensa, pelo que a velocidade de alimentação do arco deve ser estimada do seguinte modo,

$$v_a = \frac{p_a}{t_g/2} = \frac{41.6}{(60/90)/2} = 124.8 \text{ mm/s} \qquad (10.4.4)$$

em que t_g é o tempo de um golpe da prensa e p_a o passo do arco na ferramenta.

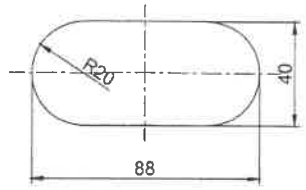
c) Para se dimensionar os punções e matrizes é necessário definir o valor da folga. Assim, adoptando uma superfície cortada do tipo IV e tendo em atenção as características mecânicas do material, a consulta da tabela de folgas apresentada no problema 10.3, obtém-se que a folga por lado deve ser 4% da espessura.

Ou seja, o valor da folga por lado deverá ser,

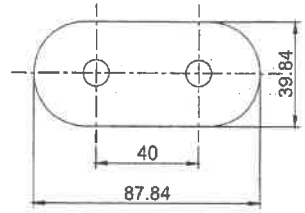
$$j_r = 0.04 \times h = 0.04 \times 2 = 0.08 \text{ mm} \qquad (10.4.5)$$

No caso do corte exterior da peça, para que esta fique com as dimensões exigidas, a cota nominal da peça deve ser atribuída à matriz (uma vez que a matriz reproduz a sua dimensão na zona de penetração da peça), sendo a folga e as tolerâncias de fabrico estabelecidas a partir desse valor nominal.

Pelo contrário, no caso dos furos circulares a cota nominal de referência deve ser definida no punção. De acordo com esta metodologia apresenta-se na figura seguinte as dimensões nominais da matriz e do punção do corte exterior.



Matriz



Punção

Enquanto que para os punções e matrizes circulares as dimensões nominais serão,

$$d_p = D_{furo} = 10 \text{ mm}$$
$$d_m = D_{furo} + 2\, j_r = 10.16 \text{ mm} \qquad (10.4.6)$$

Para que o dimensionamento dos punções e matrizes fique completo resta colocar as respectivas tolerâncias de fabrico.

d) Analisando o esboço da ferramenta proposta para o fabrico identificam-se três tipos de força diferentes; a força para efectuar os cortes da peça, a força do 2º efeito, necessária para extrair a peça da matriz e a força do sistema elástico, essencial para assegurar o desembainhamento dos punções circulares do arco sem deformação deste, de modo a evitar problemas na alimentação do arco e no funcionamento da ferramenta.

A força de corte máxima determina-se a partir da seguinte expressão,

$$F_{max} = C\, \sigma_R\, p\, h \qquad (10.4.7)$$

em que, p é o perímetro de corte ao longo do qual se encontram aplicadas as forças de corte, h é a espessura da chapa, σ_R é a tensão de rotura do material e C é uma constante de correcção da tensão de rotura do ensaio de tracção uniaxial , σ_R, para a tensão de rotura ao corte, τ_R .

No presente caso em cada golpe da prensa realizam-se em simultâneo os cortes interiores e o corte exterior o que permite obter uma peça acabada. Nestas condições, e uma vez que todos os punções actuam o arco no mesmo instante, a força de corte máxima é igual à soma da força de corte máxima para efectuar os cortes dos furos interiores e do contorno exterior. Tendo em consideração que o material é um latão, para o qual $C = 0.7$ (ver tabela do problema 10.1), vem,

$$\begin{aligned} p_{int} &= 2\times 10\pi = 62.8\,\text{mm} \\ \Rightarrow F_{max\,(int)} &= 0.7\times 300\times 62.8\times 2 = 26376.0\,\text{N} \end{aligned} \tag{10.4.8}$$

$$\begin{aligned} p_{ext} &= 20\pi + 2\times 48 = 158.8\,\text{mm} \\ \Rightarrow F_{max\,(ext)} &= 0.7\times 300\times 158.8\times 2 = 66696.0\,\text{N} \end{aligned} \tag{10.4.9}$$

Consequentemente a força máxima de corte será,

$$F_{max} = F_{max\,(int)} + F_{max\,(ext)} = 26376.0 + 66696.0 = 93072.0\,\text{N} \cong 93.1\,\text{kN} \tag{10.4.10}$$

No que se refere à força que o 2º efeito deve efectuar para expulsar a peça do interior da matriz é habitual o seu valor ser determinado a partir do valor da força máxima de corte da peça, sendo dado por,

$$F_{exp} = 0.05 \text{ a } 0.1 F_{max} \tag{10.4.11}$$

dependendo o valor de afectação da força máxima das características mecânicas do material que se está a cortar e da complexidade geométrica da peça. Para o presente caso, embora a geometria da peça seja pouco irregular, o facto da folga ser relativamente pequena e o material apresentar uma extensão na rotura de cerca de 68%, aconselha a que se toma o valor mais elevado, ou seja,

$$F_{exp} = 0.1\left(F_{max}\right)_{ext} = 0.1\times 66696.0 = 6669.6\,\text{N} \tag{10.4.12}$$

De modo semelhante, para a força de extracção dos punções do arco é habitual considerarem-se os seguintes valores em função da espessura da chapa que se está a cortar,

$$F_{ext} = \begin{cases} 0.03 \text{ a } 0.08\ F_{max} & \text{para} \quad h \le 1\,\text{mm} \\ 0.08 \text{ a } 0.10\ F_{max} & \text{para} \quad 1 < h \le 2\,\text{mm} \\ 0.10 \text{ a } 0.13\ F_{max} & \text{para} \quad 2 < h \le 4\,\text{mm} \end{cases} \tag{10.4.13}$$

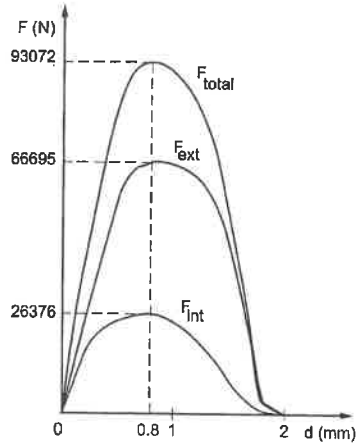
Deste modo, a força que o sistema elástico de extracção dos punções tem que executar será,

$$F_{ext} = 0.1\left(F_{max}\right)_{int} = 0.1\times 26376.0 = 2637.6\,\text{N} \tag{10.4.14}$$

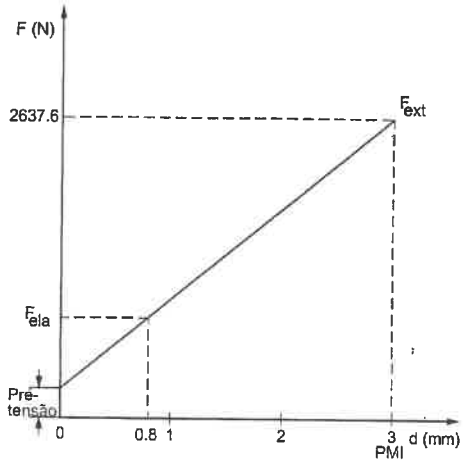
Numa primeira análise conclui-se que a prensa com uma capacidade nominal de 10 ton é adequada para realizar o corte, uma vez que a força máxima na ferramenta será, em primeira aproximação, dada pela soma da força máxima de corte com a força no sistema elástico, já que a força do 2º efeito provém de um sistema independente. Convém, desde já, assinalar que esta conclusão deriva apenas da análise das forças envolvidas no processo, não contemplando verificações de natureza dimensional entre a ferramenta e a prensa.

Anteriormente foi referido que a força máxima na ferramenta era aproximadamente dada pela soma da força máxima de corte com a do sistema elástico. O facto de se considerar o valor da força máxima na ferramenta como aproximada, ou melhor majorada, deve-se às fases diferentes do curso da ferramenta em que elas surgem. Enquanto que a força de corte surge a 30~40% de penetração dos cunhos na chapa (ver figura seguinte), a força do sistema elástico deve acontecer no PMI (Ponto Morto Inferior), pois será nesta altura que devido à inversão de movimento do carro superior da prensa os punções irão iniciar o movimento de desembainhamento (para uma discussão mais detalhada ver problema 10.5). Na figura seguinte mostra-se de modo qualitativo a evolução da força no sistema elástico considerando que o PMI da ferramenta é a 3 mm. Em conclusão, calcular a força máxima da ferramenta somando as duas forças resulta numa majoração do seu valor. Porém, para os objectivos do problema esta hipótese é perfeitamente admissível, pelo que será considerada no que se segue. Assim, a força máxima na ferramenta será,

$$\left(F_{total}\right)_{max} \approx F_{max} + F_{ext} = 93072.0 + 2637.6 = 95709.6\,\text{N} \cong 95.7\,\text{kN} \tag{10.4.15}$$



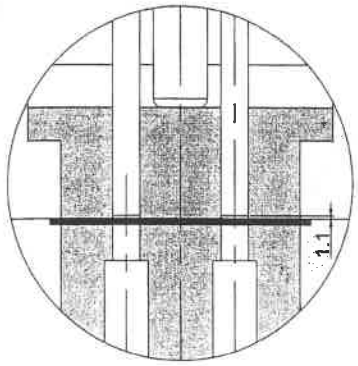
Evolução qualitativa da força de corte



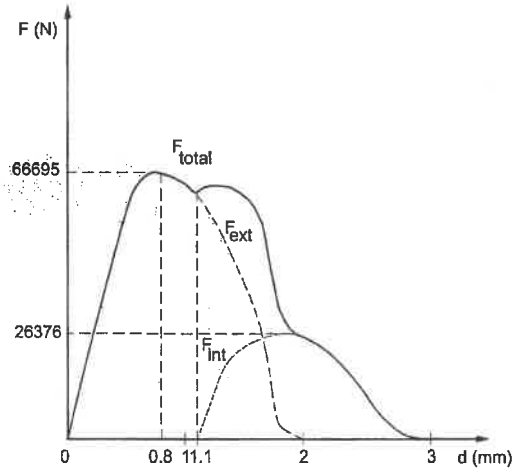
Evolução qualitativa da força no sistema elástico

Retomando a discussão sobre a avaliação da capacidade da prensa para realizar este trabalho, constata-se que a força na ferramenta é cerca de 97.7% da capacidade nominal da prensa, o que na perspectiva da vida da ferramenta e da própria prensa não é aconselhável. De facto, se o trabalho de corte for realizado com forças próximas da capacidade máxima da prensa, a vida da ferramenta vem reduzida devido aos efeitos associados à deformação da estrutura e da mesa da prensa. Então, para preservar tanto a vida da ferramenta, como da prensa, o trabalho de corte deve ser realizado deixando alguma margem relativamente à capacidade da prensa. Em geral, considera-se uma boa solução quando o trabalho de corte é realizado com forças na ordem dos 60 a 70% da capacidade nominal da prensa.

Tendo em consideração estes aspectos de natureza funcional torna-se necessário reduzir o valor da força máxima de corte no problema em análise, o que se consegue de um modo simples, sem alterar praticamente nada das características da ferramenta, decalando os punções circulares relativamente ao do corte exterior. Na decalagem de punções, para assegurar que de facto os valores máximos das forças ficam efectivamente desfasados, é habitual considerar-se uma diferença entre as respectivas alturas de 50 a 60% da espessura da chapa. Adoptando para o caso do presente problema um valor de 55%, o que equivale a uma diferença de 1.1 mm, mostra-se na figura seguinte a evolução previsível das forças de corte em face das alterações dimensionais dos punções.



Pormenor
Decalagem de punções



Evolução qualitativa da força com decalagem de punções

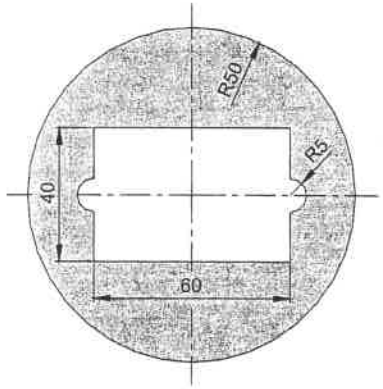
Pode então concluir-se que a força máxima de corte na ferramenta, incluindo o sistema elástico de desembainhamento dos punções, será agora de,

$$(F_{total})_{max} \approx F_{max} + F_{ext} = 66695.0 + 2637.6 = 69332.6 \text{ N} \cong 69.3 \text{ kN} \qquad (10.4.16)$$

Ou seja, valor que é cerca de 70.7% da capacidade nominal da prensa, dentro dos valores aconselhados. Finalmente, convém referir que a principal consequência para o fabrico será o aumento do curso da ferramenta, passando o PMI de 3 mm para 4.1 mm (considerou-se que depois de cortada a chapa os punções devem avançar mais 1 mm para assegurar a completa separação da peça do arco). Este facto tem como consequência adicional que o sistema elástico deve ser redimensionado, uma vez que a altura de compressão das molas aumentou.

Problema 10.5

Pretende-se produzir anualmente por corte por arrombamento 2.1 milhões de peças com a geometria e dimensões representadas na figura seguinte.



A peça tem uma espessura de 1 mm e o material é uma liga de alumínio 3003 com as características mecânicas que se apresentam na tabela seguinte.

Módulo de Elasticidade (GPa)	Coeficiente de Poisson	Tensão Limite de Elasticidade (MPa)	Tensão de Rotura (MPa)	Extensão de rotura	Extensão na fractura (50 mm)
76.7	0.463	56.3	101	0.27	0.398

Do conjunto de prensas existentes apenas está disponível uma prensa mecânica de excêntrico com a capacidade de 45 ton, cujas principais características se apresentam na tabela seguinte,

Capacidade (ton)	Curso variável (mm)	Número Ciclos/min	Claridade (mm)	Dimensões Carro móvel (mm)	Dimensões Mesa (mm)	Potência motor (kW)
45	6-100	130	350	350x250	650x430	5.5

Nestas condições, pretende-se desenvolver um ante-projecto de fabrico para este componente, o qual deve seguir as seguintes etapas,

a) Esboço de uma ferramenta de corte em fases progressivas que permita produzir a peça a partir de bobines de chapa, considerando que a ferramenta tem encostador. Para a ferramenta estime o passo do arco, o curso da ferramenta e verifique se as suas dimensões globais são compatíveis com as da prensa.

b) Definição das cotas nominais dos punções e das matrizes considerando que a folga é a ideal.

c) Considerando que o encostador pode ser accionado por (i) molas, (ii) elastómeros ou (iii) cilindros a gás, seleccionar e dimensionar o sistema de actuação mais adequado.

d) Considerando os casos da alínea anterior, esboçar a variação da força na ferramenta desde o PMS até ao PMI, indicando o valor máximo da força.

e) Determinação do centro de forças da ferramenta considerando que o sistema de actuação do encostador é realizado por molas.

f) Determinação do trabalho necessário ao corte.

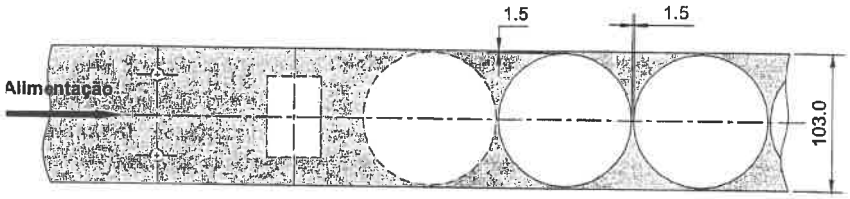
Resolução

a) Antes de se iniciar o esboço da ferramenta é necessário definir a estratégia de corte a seguir para que se possa definir as dimensões globais do arco. Em primeiro lugar, torna-se indispensável saber quantas peças têm que ser produzidas por golpe para cumprir a produção requerida no caderno de encargos. Então, admitindo que a produção anual é feita durante 11 meses (M), com 22 dias úteis por mês (D), por um período de 8 horas de trabalho diário (H), a estimativa anual de produção será:

$$P_{anual} = 0.8 C_p H D M = 0.8 \times 130 \times 60 \times 8 \times 22 \times 11 = 12\,080\,640 \text{ peças/ano} \qquad (10.5.1)$$

em que C_p é a cadência da prensa e 0.8 um coeficiente que permite contemplar as paragens de produção, seja para substituição dos rolos, seja para substituição das ferramentas.

Em face deste resultado conclui-se que a produção de uma peça por golpe é suficiente para cumprir o prazo da encomenda, ficando o arco após passagem pela ferramenta conforme se ilustra na figura seguinte.

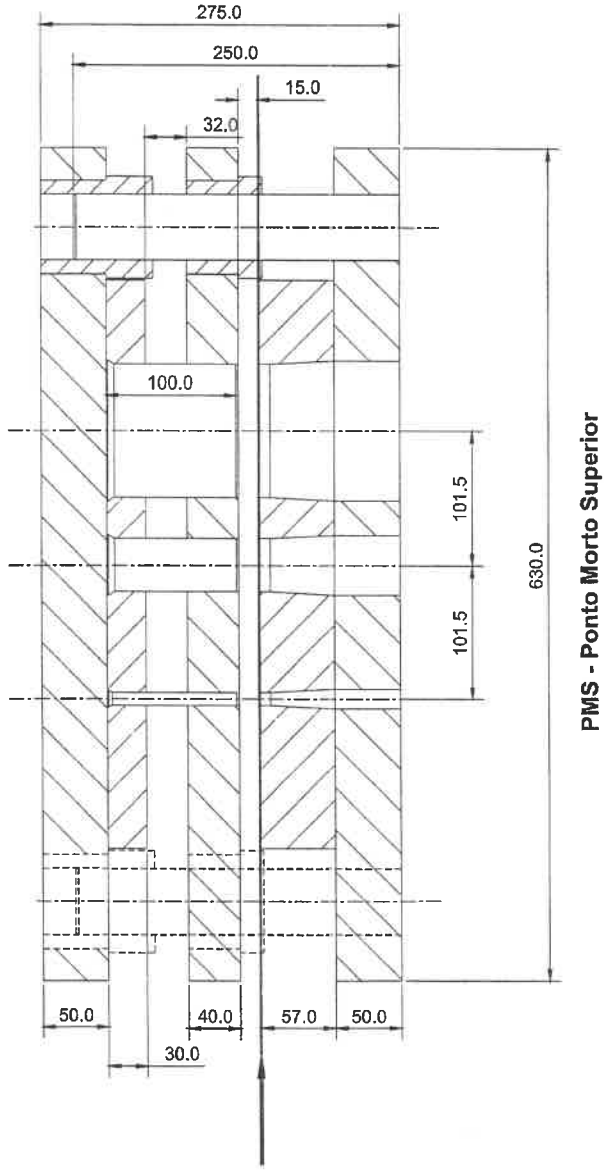


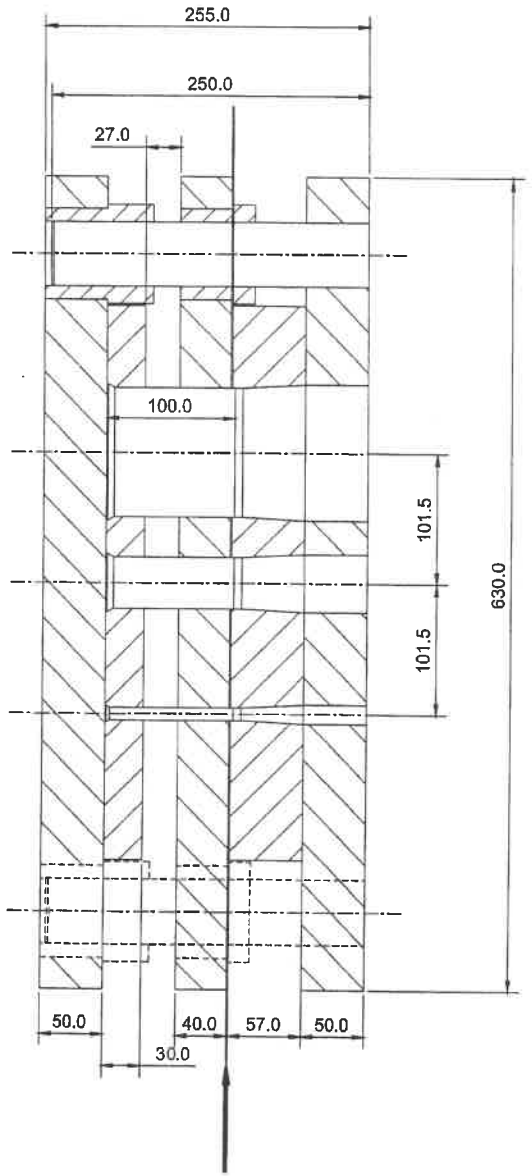
Uma vez que entre cortes, bem como entre o recorte da peça e o bordo do arco, se adoptou por um excesso de material de 1.5 mm (para evitar defeitos de forma e assegurar rigidez ao arco para não empenar durante o movimento de alimentação), a largura nominal do arco será de 103 mm, enquanto que o passo na ferramenta deverá ser de $p = 101.5\ mm$.

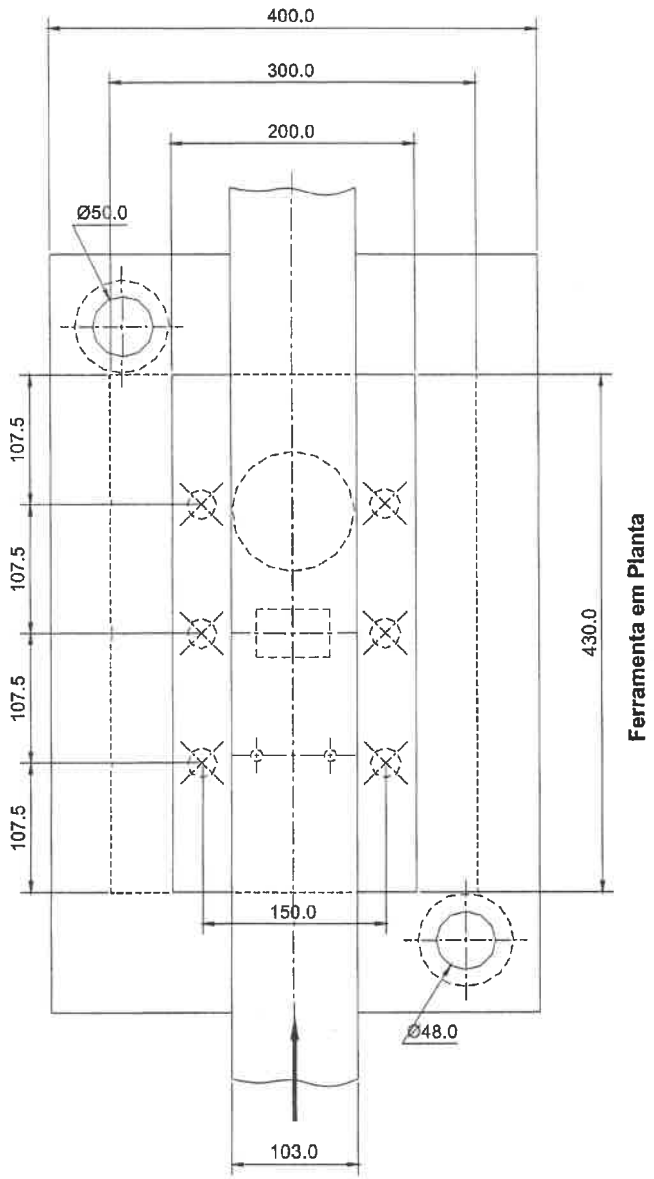
Seguindo a estratégia de corte apresentada na figura anterior a ferramenta irá ter três estações de corte, a primeira onde serão executados dois furos circulares, sendo a geometria interior da peça completada na segunda estação com a execução do corte de geometria rectangular. Por fim, a terceira estação destina-se ao corte exterior e extracção da peça na forma final. Nas figuras seguintes apresenta-se um esboço da ferramenta na posição aberta, PMS (Ponto Morto Superior), na posição fechada, PMI (Ponto Morto inferior) e ainda a ferramenta em planta.

A análise destas figuras permite concluir que a ferramenta tem uma altura (275 mm, no PMS) compatível com a claridade da prensa (350 mm) e que o seu curso é de 20 mm.

Através da última figura, na qual se apresenta o esboço da ferramenta em planta, pode confirmar-se igualmente que as dimensões globais da base (630x400 mm) permitem a sua montagem na mesa da prensa (650x430 mm).




255.0
250.0
27.0
100.0
101.5
101.5
630.0
PMI -Ponto Morto Inferior
50.0
30.0
40.0
57.0
50.0


400.0
300.0
200.0
Ø50.0
107.5
107.5
107.5
107.5
430.0
Ferramenta em Planta
150.0
Ø48.0
103.0

b) Para definir as cotas nominais dos punções/matrizes vai começar por se determinar o valor da folga. Assim, consultando a tabela de folgas do problema 10.3, verifica-se que para um alumínio macio a folga por lado aconselhada para um acabamento do tipo III (folga ideal) é de 7% da espessura do arco, o que conduz a uma folga por lado de $j = 0.07 \times 1 = 0.07$ mm.

No entanto, é interessante verificar o valor que se obtém para a folga por lado, j, no caso de se utilizar a seguinte equação empírica,

$$j = C_h h \sqrt{\tau_R} \tag{10.5.2}$$

em que C_h um coeficiente que depende da espessura do arco ($C_h = 0.00145 \sim 0.00963$ até espessuras de 3 mm e $C_h = 0.00205 \sim 0.012$ para espessuras superiores a 3 mm), h é a espessura do arco e τ_R (MPa) é a tensão de rotura ao corte do material.

Admitindo que a tensão de rotura ao corte é dada por $\tau_R = 0.8\,\sigma_R$, uma vez que se trata de corte por arrombamento, obtém-se para a folga por lado,

$$j = 0.00554 \times 1 \times \sqrt{0.8 \times 101} = 0.05 \text{ mm} \tag{10.5.3}$$

Verifica-se assim a utilidade da equação anterior para os casos em que não existam tabelas disponíveis com o tipo de material que se pretende trabalhar. Deste modo, fixa-se o valor da folga por lado em j=0.05 mm. Então as cotas nominais das ferramentas serão:

1ª Estação (Corte circular de 5 mm de raio)

- Diâmetro do punção: $d_p = 10$ mm
- Diâmetro da matriz: $d_M = 10.1$ mm

2ª Estação (Corte rectangular)

- Dimensões do punção: $d_p = 40 \times 60$ mm
- Dimensão da matriz: $d_M = 40.1 \times 60.1$ mm

3ª Estação (Corte circular de 50 mm de raio)

- Diâmetro do punção: $d_p = 99.9$ mm
- Diâmetro da matriz: $d_M = 100$ mm

Para o dimensionamento dos punções e das matrizes ficar completo apenas falta aplicar as tolerâncias de fabrico.

c) Independentemente do sistema de actuação do encostador tem que se estimar o valor da força que este deverá aplicar para assegurar a extracção do conjunto de punções do arco, para evitar deformações indesejáveis. Para tal, é habitual considerar-se a relação seguinte que estabelece esse valor em função da força máxima de corte,

$$F_{ext} = \begin{cases} 0.03 \text{ a } 0.08\, F_{max} & \text{para} \quad h \le 1\,\text{mm} \\ 0.08 \text{ a } 0.10\, F_{max} & \text{para} \quad 1 < h \le 2\,\text{mm} \\ 0.10 \text{ a } 0.13\, F_{max} & \text{para} \quad 2 < h \le 4\,\text{mm} \end{cases} \tag{10.5.4}$$

Sabendo que a espessura do arco é de h=1 mm, então a força de extracção dos punções é, neste caso, dada por, $F_{ext} = 0.08 \times F_{max}$, faltando apenas conhecer o valor da força máxima de corte. A força máxima de corte é dada por,

$$F_{max} = 0.8\,\sigma_R\, h\,(p_1 + p_2 + p_3) \tag{10.5.5}$$

em que p_1, p_2 e p_3 são respectivamente os perímetros dos dois furos circulares (1ª estação), do furo rectangular (2ª estação) e do corte do contorno exterior da peça (3ª estação). Nestas condições, a força de corte máxima vem dada por,

$$F_{max} = 0.8 \times 101 \times 1 \times [2\pi \times (50 + 5) + 200] = 44082.5\ \text{N} \cong 44.1\ \text{kN} \tag{10.5.6}$$

Sendo, finalmente, a força necessária à extracção dos punções dada por,

$$F_{ext} = 0.08 \times F_{max} = 0.08 \times 44082.5 = 3528\ \text{N} \cong 3.5\ \text{kN} \tag{10.5.7}$$

Nesta fase é necessário decidir qual é o sistema de accionamento do encostador mais adequado para a ferramenta e posteriormente proceder ao seu dimensionamento. Considerando os três dispositivos sugeridos no enunciado; i) molas, ii) elastómeros e iii) cilindros a gás (azoto) (ver figura seguinte, na qual se mostra cada um destes elementos), interessa agora discutir as suas principais vantagens e desvantagens, bem como as respectivas aplicações típicas.

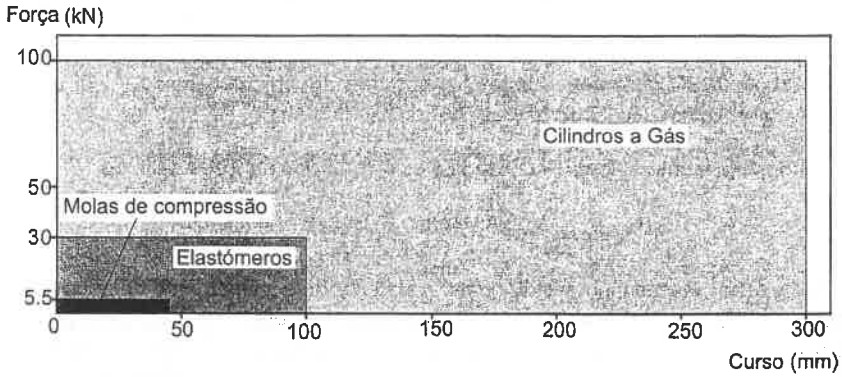
Mola helicoidal

Elastómero tubular

Cilindro a gás

Fonte: FIBRO

A figura seguinte apresenta em termos de curso-força disponível as gamas aconselhadas para cada um dos tipos de sistema de actuação, destacando-se as molas de compressão para pequenos cursos e baixas forças e os cilindros a gás para os casos em que os cursos são grandes e as forças elevadas.



Fonte: FIBRO

Um outro aspecto importante que se deve ter presente na selecção do sistema de accionamento do encostador prende-se com a taxa de crescimento da força aplicada durante a actuação do sistema. De facto, o sistema de mola de compressão é aquele cujo crescimento da força em função do curso é mais acentuado, elegendo-se os cilindros a gás para os processos onde o fabrico exige uma maior constância da força aplicada durante o curso.

Resta ainda referir que os sistemas constituídos por cilindros a gás exibem geralmente uma limitação importante que habitualmente inviabiliza a sua utilização em processos com

elevadas cadências de fabrico, como é o caso do presente estudo, e que se deve às limitações na velocidade máxima com que o cilindro actuador se pode deslocar.

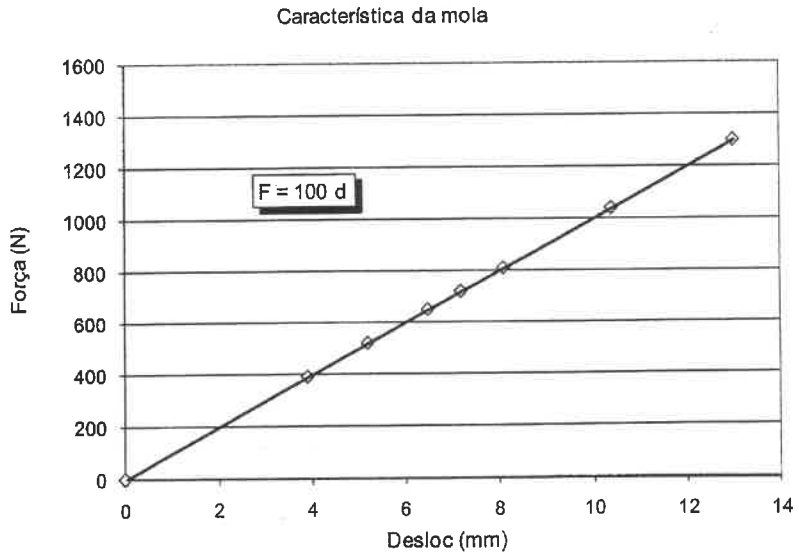
Em conclusão, o sistema de accionamento do encostador com cilindros a gás revela-se desadequado para este tipo de fabrico, restando como aplicáveis os sistemas de molas e com elastómeros. De entre estes, aquele que mais se adapta às exigências do sistema elástico é o das molas de compressão, porém, para que se possa avaliar as suas diferenças, ambos serão analisados.

i) Selecção das molas de compressão

A decisão sobre o número de molas a utilizar prende-se, no essencial, com:

- as dimensões da ferramenta e consequentemente das molas
- o curso necessário para se ter a força desejada no encostador.
- a disposição na ferramenta de modo a ter um sistema de forças equilibrado.

Depois de ponderados estes factores optou-se por usar 6 molas com diâmetro de 25 mm (cor verde, designação da Fibro), posicionadas na ferramenta conforme se mostra na figura anterior (ferramenta em planta), com as características individuais que se apresentam de seguida,



Do gráfico da figura anterior conclui-se que a constante de rigidez da mola é de $k = 100$ N/mm e que apresenta linearidade na totalidade do curso. Como informação adicional o fabricante aconselha uma pré-tensão de montagem da mola de 1.7 mm.

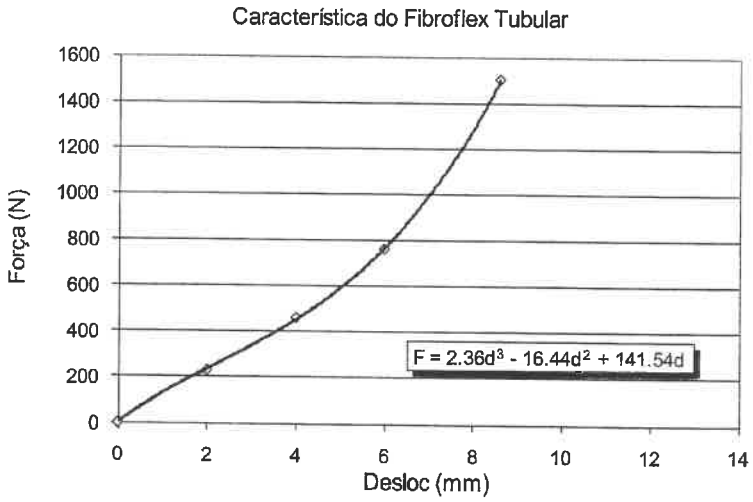
Uma vez que o curso da ferramenta já se encontra definido, pode agora determinar-se a força que o encostador fará no PMI quando accionado por 6 molas. Considerando a pré-tensão aconselhada pelo fabricante, $C_p = 1.7$ mm, e notando que o curso de corte da ferramenta é de 5 mm, conclui-se que no PMI o encostador fará uma força de,

$$F_{enc} = N_m \times k \times (C_p + C) = 6 \times 100 \times (1.7 + 5) = 4020 \text{ N} \qquad (10.5.8)$$

valor que excede em cerca de 14% o valor determinado para a força de extracção, $F_{ext} = 3528$ N. Não sendo significativa a diferença, em face da funcionalidade do elemento e do facto do valor da força de extracção ter sido obtido de um modo empírico, adopta-se esta solução.

ii) Selecção dos elastómeros

A metodologia a seguir na selecção dos elastómeros é a mesma que se estabeleceu anteriormente para as molas. Assim, consultando o catálogo do fabricante (FIBRO) e optando por seleccionar um elastómero tubular com a mesma altura inicial das molas (25 mm), verifica-se aquele que melhor se adapta aos nossos requisitos é um Fibroflex de cor verde (dureza 90 Shore A), com um diâmetro de 20 mm, apresentando a seguinte variação da força com o deslocamento,



Do gráfico da figura anterior conclui-se que a constante de rigidez do elastómero é variável, perdendo a sua linearidade a partir de uma compressão de cerca de 4~5 mm.

Nestas condições, conclui-se que no PMI o conjunto dos 6 elastómeros desenvolvem uma força de,

$$F_{enc} = N_e \times k_e = 6 \times (2.36 \times 5^3 - 16.44 \times 5^2 + 141.54 \times 5) = 3550.2 \text{ N} \qquad (10.5.9)$$

valor que está de acordo com a força de extracção calculada anteriormente ($F_{ext} = 3528$ N).

Convém, no entanto, referir que este elemento durante a solicitação sofre deformação radial, apresentando uma deformação na forma de efeito de barril que pode variar entre 4 e 7% do seu comprimento inicial. Este facto, é importante, uma vez que impõe cuidados adicionais de montagem que devem ser tidos em conta durante a fase de projecto da ferramenta.

d) Em seguida apresenta-se, para os casos estudados anteriormente, a evolução da força na ferramenta desde o PMS até ao PMI. O valor máximo da força necessária ao corte é igualmente calculado e o respectivo valor apresentado.

i) Encostador accionado por molas

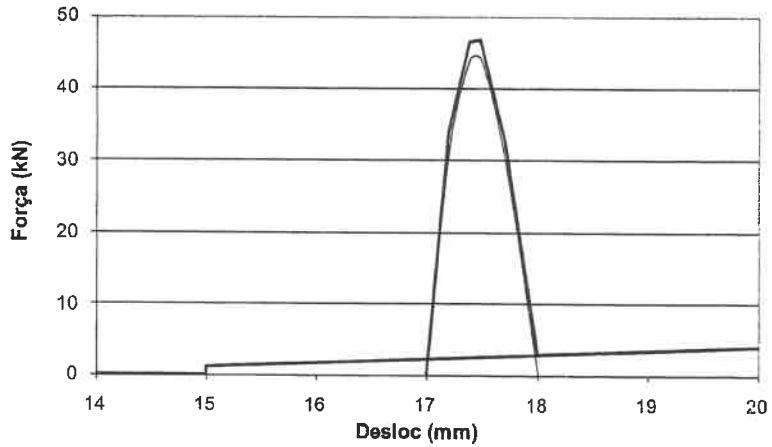
Na figura seguinte apresenta-se a curva de força na ferramenta quando o encostador é accionado por molas.

Para determinar o valor máximo da força necessária ao corte sabe-se que no corte por arrombamento o valor máximo da força de corte surge quando o cunho penetra cerca de 1/3 da espessura da chapa e tem o valor que se calculou na alínea anterior, $F_{max} = 44.1$kN.

Então, a força máxima de corte na ferramenta será dada por,

$$\begin{aligned}(F_{fer})_{max} &= (F_c)_{max} + N_m \times k \times (C_p + C) \\ &= 44.1 + 6 \times 0.1 \times (1.7 + 2.34) = 46.5 \text{ kN}\end{aligned} \qquad (10.5.10)$$

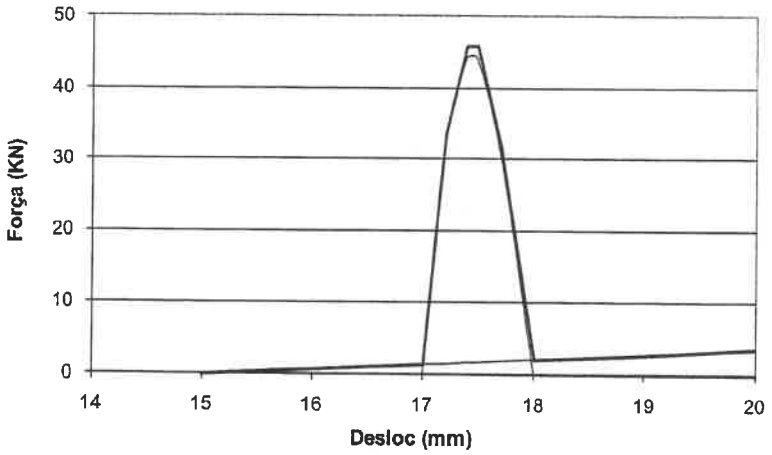
Evolução da força (Molas)



ii) Encostador accionado por Elastómeros

Na figura seguinte apresenta-se a curva de força na ferramenta quando o encostador é accionado por elastómeros.

Evolução da força (Fibroflex)

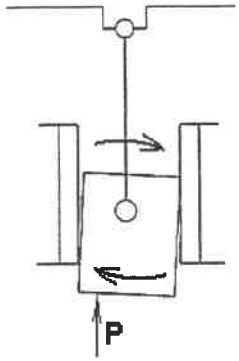


À semelhança do caso anterior a força máxima na ferramenta será,

$$(F_{fer})_{max} = (F_c)_{max} + N_e k_e$$
$$= 44.1 + 6 \times \left(2.36 \times 2.34^3 - 16.44 \times 2.34^2 + 141.54 \times 2.34\right) \times 10^{-3} \qquad (10.5.11)$$
$$= 45.7 \text{ kN}$$

e) Nem sempre o centro geométrico de uma ferramenta coincide com o seu centro de forças. Este facto levanta algumas questões na montagem da ferramenta na prensa, uma vez que sendo esta montada em relação ao seu centro geométrico pode dar origem a um sistema de forças descentrado relativamente ao eixo da prensa.

Este facto encontra-se ilustrado na figura seguinte para uma prensa de excêntrico simples, e na qual se pode verificar as consequências que esse facto pode provocar ao nível das corrediças do carro móvel da prensa e que são também extensíveis à ferramenta. Conforme ilustra a figura, o descentramento da força da ferramenta em relação ao eixo do cabeçote móvel da prensa provoca rotação neste com consequências para o sistema de guiamento e em última análise para o paralelismo do carro móvel. Naturalmente que esta inclinação depende directamente da intensidade da força, do valor do descentramento e do modo como é feita a ligação entre a ferramenta e o carro móvel.



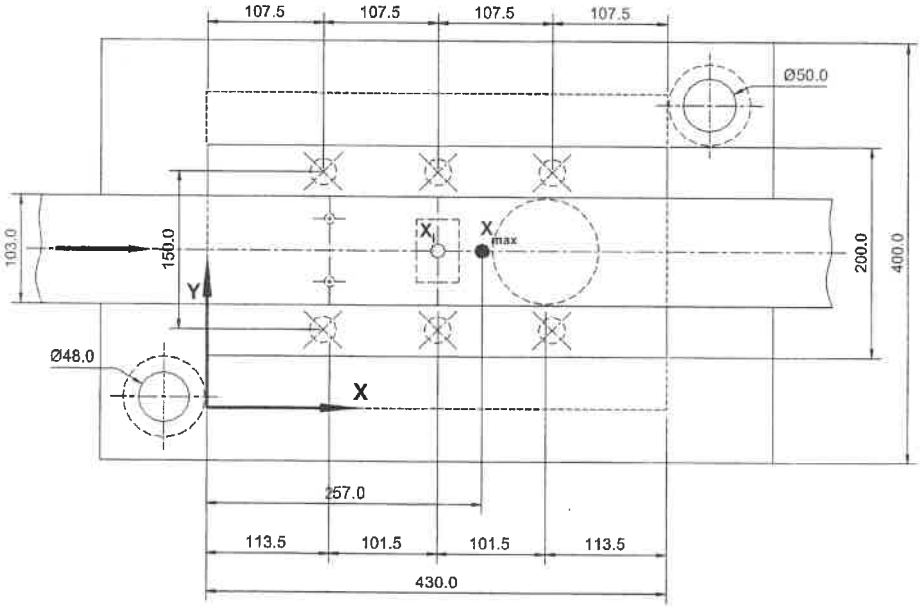
Compreende-se, assim, que o conhecimento do ponto de aplicação da resultante das forças da ferramenta pode fornecer informação adicional para a correcta montagem da ferramenta e, desse modo, contribuir para o aumento da vida quer da prensa, quer da ferramenta.

Determinar o ponto de aplicação da resultante de forças na ferramenta equivale a encontrar o ponto onde o somatório dos vários momentos resultantes das diferentes forças actuantes se anula. Considerando que a origem do sistema de eixos se encontra

num dos cantos da matriz, ver figura seguinte, as coordenadas do ponto em que os momentos se anulam serão dadas por,

$$x = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \cdots + F_nx_n}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

$$y = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + \cdots + F_ny_n}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad (10.5.12)$$



Analisando o sistema de forças aplicado na ferramenta verifica-se que a resultante estará sempre no eixo central da matriz na direcção y, devido à simetria dos elementos de

força relativamente a este eixo. Contudo, segundo a direcção x irá variar desde o início do corte até ao final. Por exemplo, no início do corte quando os punções tocam a chapa, apenas o sistema elástico está a actuar, por isso o centro da resultante estará no centro da matriz (ponto X_i na figura anterior), sendo a intensidade da resultante,

$$(F_{fer})_{CI} = 6 \times 0.1 \times (1.7 + 2) = 2.2\ kN \qquad (10.5.13)$$

Por outro lado, quando os punções penetrarem na chapa 1/3 da espessura da chapa, altura em que a força de corte é máxima a posição da resultante, segundo o eixo x, já terá que ser calculada. Aplicando a equação (10.5.12), obtém-se,

$$X_{max} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{12 \times 404 \times 107.5 + 2 \times 2538.4 \times 113.5 + 16160 \times 215 + 25384 \times 316.5}{6 \times 404 + 2 \times 2538.4 + 16160 + 25384} = 257\,\text{mm} \qquad (10.5.14)$$

A figura anterior mostra a posição do centro de forças no instante de força máxima (ponto X_{max}).

Em resumo, no instante inicial do corte a resultante tem um valor de 2.2 kN e está aplicada no ponto X_i, com o avanço do curso desloca-se para o ponto X_{max}, onde atinge o valor máximo de 46.5 kN, movendo-se seguidamente deste ponto em direcção ao ponto X_i, altura que atinge o PMI, e a resultante alcança o valor de 4.0 kN.

f) O trabalho consumido na ferramenta durante o corte não se deve exclusivamente ao processo de arrombamento, uma vez que também o sistema de accionamento dos encostadores consome trabalho, levando, a que em cada golpe, o trabalho consumido seja constituído por duas parcelas,

$$W_{golpe} = W_c + W_{enc} \qquad (10.5.15)$$

em que W_c é o trabalho consumido no corte por arrombamento e W_{enc} o trabalho consumido no sistema de accionamento do encostador.

Como se sabe o trabalho necessário ao corte por arrombamento é dado por,

$$W_c = \frac{2}{3} F_{max}\, h = \frac{2}{3} \times 44100 \times 1 \times 10^{-3} = 29.4\ \text{J} \qquad (10.5.16)$$

em que F_{max} é a força máxima de corte e h a espessura.

Enquanto que o trabalho consumido pelos sistemas elásticos do encostador é dado por,

Sistema de molas: $(W_{enc})_m = 6x100 \times \left(1.7 + \frac{5}{2}\right) \times 5x10^{-3} = 12.6\ \text{J}$

(10.5.17)

Elastómeros: $(W_{enc})_e \cong \frac{3550.2}{2} \times 5x10^{-3} = 8.9\ \text{J}$

De referir que para calcular o trabalho consumido pelos elastómeros admitiu-se que na zona de trabalho o seu comportamento era aproximadamente linear, conforme se pode comprovar no gráfico de evolução da força com o deslocamento que se apresentou na alínea c).

Então, nestas condições, o trabalho total requerido à prensa será dado por,

Com sistema de molas: $W_{golpe} = W_c + (W_{enc})_m = 29.4 + 12.6 = 42.0\ \text{J}$

(10.5.18)

Com elastómeros: $W_{golpe} = W_c + (W_{enc})_e = 29.4 + 8.9 = 38.3\ \text{J}$

Problema 10.6

Nas características de uma guilhotina hidráulica constam as seguintes informações:

- Espessura máxima de corte de chapa em aço macio com $\sigma_R = 450$ MPa , 6 mm.
- Comprimento máximo de corte, 3100 mm.
- Ângulo de inclinação da lâmina, 1.5°.
- Curso máximo da lâmina superior, 120 mm.
- Cadência 8 a 20 golpes/min.
- Potência do motor principal, 11 kW.

a) No caso de se pretender cortar uma chapa de aço inoxidável com uma tensão de rotura de $\sigma_R = 700$ MPa , determine a espessura máxima que se pode cortar.

b) Verifique se o curso máximo da lâmina superior é suficiente para realizar o corte da chapa de aço macio nas condições limites de espessura e comprimento.

c) Nas condições da alínea anterior, calcule a energia consumida no corte. Determine ainda a potência de corte máxima instantânea exigida no corte e verifique se a capacidade do motor é suficiente para o assegurar. Admita que o sistema hidráulico é de actuação directa e que quando o curso é o máximo a cadência é a menor que o fabricante especifica.

Resolução

a) Para determinar a espessura máxima que se pode cortar no caso da chapa de aço inoxidável é necessário conhecer a capacidade máxima da guilhotina hidráulica. Uma vez que essa informação não é disponibilizada pelo fabricante, as características máximas podem ser estimadas a partir do corte da chapa em aço macio nas condições extremas especificadas pelo fabricante.

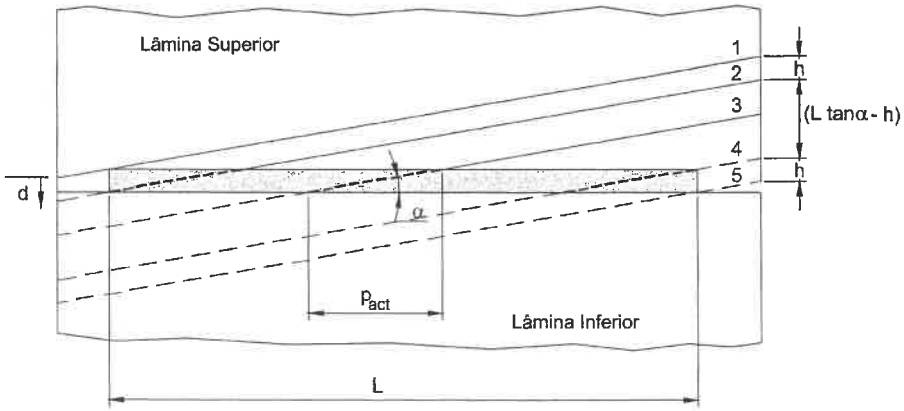
Para tal sabe-se que a força máxima de corte no caso de se usarem arestas de corte inclinadas é dada por,

$$F_{max} = \frac{2}{3} \tau_R\, p_{act}\, h = \frac{2}{3} C\, \sigma_R\, p_{act}\, h \qquad (10.6.1)$$

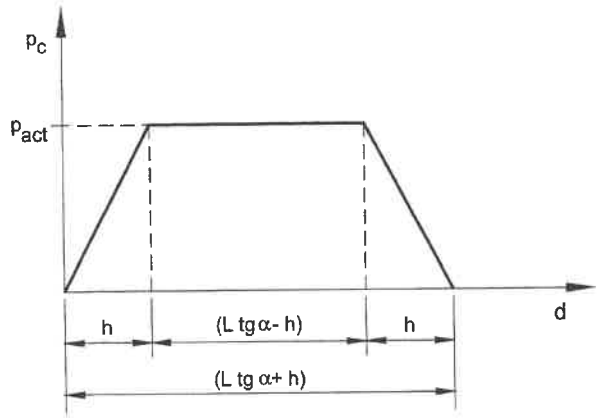
em que $\tau_R = C\,\sigma_R$ é a tensão de corte à rotura do material da chapa, C é uma constante que relaciona as tensões de rotura, dada na tabela do problema 10.1, h é a espessura da

chapa e p_{act} é o perímetro de corte máximo durante a operação, uma vez que este perímetro é variável durante a operação.

Para melhor ilustrar a variação do perímetro activo ao longo do corte considere-se a figura seguinte, na qual se ilustra a operação de corte numa guilhotina em cinco posições específicas do curso da lâmina superior.



O movimento de corte inicia-se na posição 1 com o contacto da lâmina na chapa e continua até à posição 2, deslocando-se a espessura da chapa. Durante este percurso o perímetro de corte variou desde zero até alcançar o valor máximo, p_{act}. O movimento da lâmina móvel prossegue até alcançar a posição 4, correspondendo a um avanço da lâmina de $(L\,\mathrm{tg}\,\alpha - h)$, com o perímetro de corte a manter-se constante e igual ao perímetro activo, p_{act}. Uma vez alcançada a posição 4 a lâmina de corte avançará a espessura da chapa até atingir a posição 5, altura em que se dá a separação completa da chapa e o perímetro de corte se anula. Esta evolução do perímetro de corte com o deslocamento da lâmina superior durante o corte encontra-se representada na figura seguinte.



Retomando a equação (10.6.1) verifica-se que é necessário determinar o perímetro activo para as condições extremas de corte do aço macio, ou seja,

$$\frac{h}{p_{act}} = \mathrm{tg}\,\alpha \Leftrightarrow p_{act} = \frac{h}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{6}{\mathrm{tg}\,1.5} = 229.1 \text{ mm} \qquad (10.6.2)$$

Então a capacidade máxima da guilhotina hidráulica, obtida a partir do corte de uma chapa de aço macio ($C = 0.7$) em condições extremas será,

$$F_{max} = \frac{2}{3} C\,\sigma_R\,p_{act}\,h = \frac{2}{3} \times 0.7 \times 450 \times 229.1 \times 6 = 288666 \text{ N} \cong 288.7 \text{ kN} \qquad (10.6.3)$$

Considerando que este é o valor da força máxima disponível na guilhotina, é então possível estimar a espessura máxima da chapa de aço inoxidável que é possível cortar. Retomando a equação (10.6.1) e explicitando-o em relação à espessura, conclui-se que a espessura máxima que se pode cortar na guilhotina é apenas função da capacidade da máquina, F_{max}, do ângulo de inclinação das lâminas, α, e da tensão de rotura do material, σ_R, que se está a cortar, ou seja,

$$h_{max} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{F_{max}}{C\,\sigma_R}\,\mathrm{tg}\,\alpha} \qquad (10.6.4)$$

Substituindo valores nesta equação obtém-se o máximo da espessura da chapa em aço inoxidável ($C = 0.8$) que pode ser cortada na guilhotina,

$$h_{max} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{288666}{0.8 \times 700}} \operatorname{tg} 1.5 = 4.5 \text{ mm} \qquad (10.6.5)$$

b) Para verificar se o curso máximo de corte da lâmina móvel é suficiente para realizar o corte de uma chapa de aço macio com a espessura e comprimento máximo especificado pelo fabricante, sabe-se da análise efectuada na alínea anterior que o curso mínimo de corte, d_{min} , para uma chapa de comprimento L é dado por,

$$d_{min} = h + (L \operatorname{tg} \alpha - h) + h = h + L \operatorname{tg} \alpha \qquad (10.6.6)$$

em que h é a espessura da chapa e α o ângulo de inclinação da lâmina.

Substituindo valores para as condições limites de corte do aço macio, obtém-se,

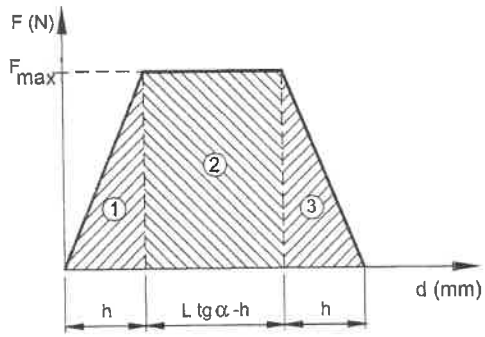
$$d_{min} = 6 + 3100 \times \operatorname{tg} 1.5 = 87.2 \text{ mm} \qquad (10.6.7)$$

valor que é inferior ao indicado nas especificações da guilhotina ($d_{max} = 120\,\text{mm}$).

c) A energia necessária para efectuar o corte corresponde à área do gráfico força-deslocamento. Em primeira aproximação pode considerar-se que a variação da força com o deslocamento da lâmina móvel apresenta um andamento análogo ao que se apresentou na alínea anterior para o perímetro de corte versus deslocamento, conforme se mostra graficamente na figura seguinte. De facto esta representação qualitativa da força não contempla a parcela necessária para a realização do trabalho redundante que está associado à flexão da chapa, motivo que conduz a que os resultados obtidos sejam inferiores ao que se verifica na realidade.

Nestas condições, uma boa estimativa para o trabalho de corte pode ser obtida calculando a área do gráfico da figura seguinte, ou seja,

$$W = F_{max} L \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} C \sigma_R L h^2 \qquad (10.6.8)$$



Substituindo valores na equação (10.6.8) obtém-se o trabalho de corte que é necessário fornecer ao processo,

$$W = \frac{2}{3} C \sigma_R L h^2 = \frac{2}{3} \times 0.7 \times 450 \times 3100 \times 6^2 = 23436 \times 10^3 \text{ N mm} = 23436 \text{ J} \qquad (10.6.9)$$

Para calcular a potência máxima instantânea é necessário conhecer a velocidade de actuação da lâmina móvel da guilhotina. Uma vez que o sistema de actuação é hidráulico, a velocidade média da lâmina pode ser calculada a partir da cadência (8 golpes/min) e do curso (120 mm),

$$v_{lam} = \frac{d}{t_g} = 2 d c_d = 2 \times 120 \times \frac{8}{60} = 32 \text{ mm/s} \qquad (10.6.10)$$

em que d é o curso, t_g o tempo para realizar o movimento descendente da lâmina (do PMS ao PMI, ou seja, meio ciclo) e c_d a cadência.

Deste modo, a potência máxima de corte instantânea será,

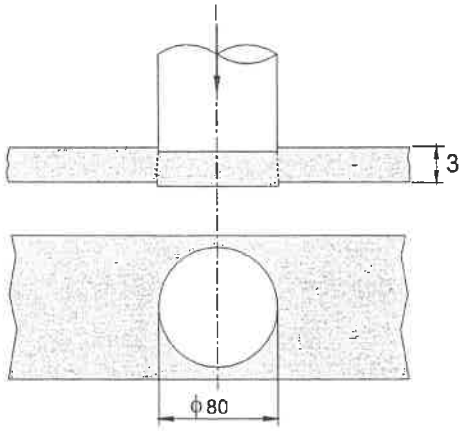
$$P_{max} = F_{max}\, v_{lam} = 288666 \times 32 \times 10^{-3} = 9237.3 \text{ W} \cong 9.2 \text{ kW} \qquad (10.6.11)$$

valor que sendo inferior ao do motor eléctrico ($P_{motor} = 11\text{kW}$) assegura a execução da operação de corte.

Problema 10.7

Pretende-se obter furos circulares com um diâmetro de 80 mm, numa chapa de aço AISI 1020 com 3 mm de espessura, através de corte por arrombamento.

O material tem uma tensão limite de elasticidade de 330 MPa, uma tensão de rotura de 450 MPa e um módulo de elasticidade de 210 GPa.



a) Calcule o trabalho e a força máxima necessária ao corte de um furo utilizando um punção com arestas de corte direitas.

b) Caso se pretende-se reduzir a força máxima de corte através da inclinação das arestas de corte, diga quais as arestas devem ser inclinadas, se as do punção, se as da matriz.

c) Nas condições da alínea anterior, calcule a força máxima e o trabalho de corte necessários ao corte do furo, utilizando uma inclinação das arestas de corte de 6°.

Resolução

a) O valor máximo da força de corte determina-se aplicando a equação (10.1.1) descrita no problema 10.1, ou seja,

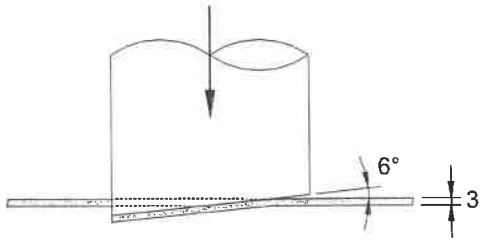
$$F_{mex} = C\,\sigma_R\,p\,h = 0.8\times 450\times 80\pi\times 3 = 271433.6\ \text{N} \cong 271.4\ \text{kN} \qquad (10.7.1)$$

em que p é o perímetro de corte, h é a espessura da chapa, σ_R é a tensão de rotura do material e C é uma constante de correcção da tensão de rotura do ensaio de tracção uniaxial, cujo valor para o aço apresenta o valor máximo de 0.8.

O trabalho de corte necessário para efectuar o furo circular será,

$$W = \frac{2}{3}F_{max}\,h = \frac{2}{3}\times 271433.6\times 3\times 10^{-3} = 542.9\ \text{J} \qquad (10.7.2)$$

b) A redução da força máxima de corte pode efectuar-se através da inclinação das arestas de corte. Nestas condições, o trabalho de corte é realizado progressivamente durante um curso maior, mas com uma força menor, no entanto, o trabalho total de corte é aproximadamente igual ao que teria de se aplicar caso o corte fosse efectuado com o punção/matriz sem inclinação. Uma vez que se pretendem obter furos circulares na chapa, ou seja, efectuar uma operação de puncionagem, deve inclinar-se as arestas do punção, já que assim apenas o rombo sairá deformado (como ilustra a figura seguinte), em consequência da chapa assumir a forma da superfície com a qual contacta.

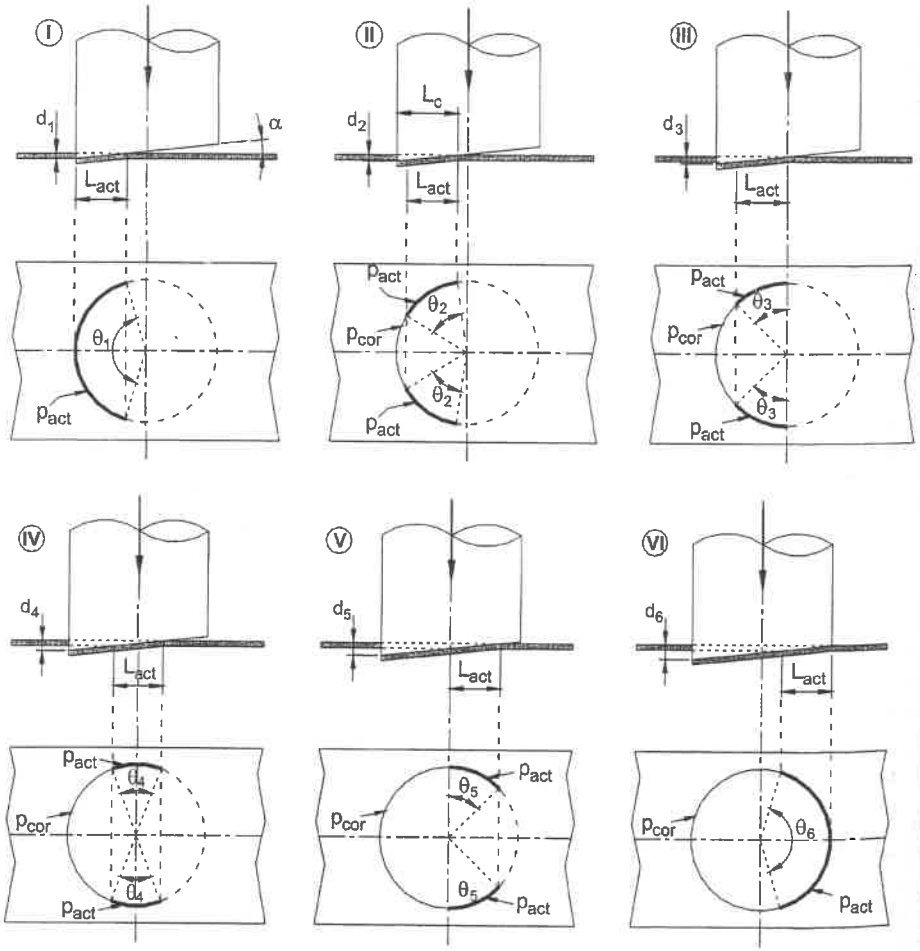


c) A força máxima de corte durante uma operação com arestas inclinadas, em conformidade com a discussão feita no problema 10.6, é dada por,

$$F_{max} = \frac{2}{3}\tau_R\,p_{act}\,h = \frac{2}{3}C\,\sigma_R\,p_{act}\,h \qquad (10.7.3)$$

em que $\tau_R = C\sigma_R$ é a tensão de corte à rotura do material da chapa, C é uma constante que relaciona as tensões de rotura, dada na tabela do problema 10.1, h é a espessura da chapa e p_{act} é o perímetro de corte máximo durante a operação.

Para calcular a força de corte máxima torna-se então necessário determinar o deslocamento do punção que dá origem a um perímetro de corte activo máximo. Para tal considere-se a figura seguinte, na qual se ilustra a operação de corte do furo circular com um punção de arestas inclinadas para seis instantes típicos do corte.



Da análise do modo como o corte se processa pode retirar-se a conclusão que, para este caso, o comprimento activo de corte, L_{act}, se mantém constante durante todo o processo, sendo dado por,

$$L_{act} = \frac{h}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{3}{\text{tg}\,6} = 28.54 \text{ mm} \qquad (10.7.4)$$

Descrevendo um pouco mais em detalhe o modo como o corte se processa, na figura anterior começa por se representar a primeira fase do corte, durante a qual o punção se deslocou a espessura da chapa, $d_1 = 3\text{mm}$ e o perímetro activo de corte, p_{act}, variou desde zero até ao valor máximo representado para a posição I. A partir deste instante, o perímetro activo vai reduzindo-se, ou seja, o perímetro activo na posição III ($d_3 = 4.2042\text{mm}$) é menor do que o da posição II ($d_2 = 3.6\text{mm}$), atingindo o valor mínimo na posição IV ($d_4 = 5.7042\text{mm}$). Depois de alcançada esta posição a variação do perímetro activo inverte-se, querendo isto significar que passa a aumentar. Assim, o perímetro activo da posição V ($d_5 = 7.2042\text{mm}$) é maior do que o da posição IV, mas menor do que o da posição VI, altura em que o punção já se deslocou $d_6 = 8.4084\text{mm}$ e apenas falta avançar 3 mm para que se dê a separação do rombo da chapa e o furo esteja concluído.

Com o objectivo de se representar a evolução da força de corte ao longo do processo seguidamente irá desenvolver-se o cálculo da força de corte para cada um dos instantes considerados na figura anterior.

Posição I ($d_1 = 3\text{mm}$)

Neste instante o ângulo que delimita a zona que está a ser cortada, de acordo com a figura, é dado por,

$$L_{act} = R\left(1 - \cos\frac{\theta_1}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\frac{\theta_1}{2} = 1 - \frac{L_{act}}{R} = 1 - \frac{28.54}{40} \Leftrightarrow \theta_1 = 146.70^\circ \qquad (10.7.5)$$

Sendo o respectivo perímetro activo de corte,

$$(p_{act})_I = R\,\theta_1 \Leftrightarrow (p_{act})_I = 40 \times 146.70 \times \frac{\pi}{180} = 102.42 \text{ mm} \qquad (10.7.6)$$

Posição II ($d_1 = 3.6\,\text{mm}$)

Para posicionar o comprimento activo de corte nesta fase é necessário começar por calcular o comprimento de contacto, L_c (ver figura), o qual é dado por,

$$L_c = \frac{d_2}{tg\,\alpha} = \frac{3.6}{tg\,6°} = 34.25\,\text{mm} \tag{10.7.7}$$

Então o ângulo associado a este comprimento será,

$$L_c = R(1-\cos\theta_c) \Leftrightarrow \cos\theta_c = 1-\frac{L_c}{R} = 1-\frac{34.25}{40} \Leftrightarrow \theta_c = 81.74° \tag{10.7.8}$$

Procedendo de igual modo para o outro extremo do comprimento activo, vem,

$$(L_c - L_{act}) = \frac{d_2 - h}{tg\,\alpha} = \frac{0.6}{tg\,6°} = 5.71\text{mm}$$

$$(L_c - L_{act}) = R(1-\cos\theta_i) \Leftrightarrow \cos\theta_i = 1-\frac{(L_c - L_{act})}{R} = 1-\frac{5.71}{40} \Leftrightarrow \theta_c = 31° \tag{10.7.9}$$

$$\theta_2 = \theta_c - \theta_i = 81.74 - 31 = 50.74°$$

Sendo o perímetro activo de corte total, dado por,

$$(p_{act})_{II} = 2R\,\theta_2 \Leftrightarrow (p_{act})_{II} = 2\times 40\times 50.74\times\frac{\pi}{180} = 70.85\,\text{mm} \tag{10.7.10}$$

Posição III ($d_3 = 4.2042\,\text{mm}$)

Seguindo a mesma metodologia de cálculo, obtém-se,

$$L_{act} = R\,sen\,\theta_3 \Leftrightarrow sen\,\theta_3 = \frac{L_{act}}{R} = \frac{28.54}{40} \Leftrightarrow \theta_3 = 45.52° \tag{10.7.11}$$

$$(p_{act})_{III} = 2R\,\theta_3 \Leftrightarrow (p_{act})_{III} = 2\times 40\times 45.52\times\frac{\pi}{180} = 63.56\ \text{mm}$$

Posição IV ($d_4 = 5.7042\,\text{mm}$)

De modo análogo, obtém-se para esta posição,

$$\frac{L_{act}}{2} = R\,sen\frac{\theta_4}{2} \Leftrightarrow sen\frac{\theta_4}{2} = \frac{L_{act}}{2R} = \frac{28.54}{80} \Leftrightarrow \theta_4 = 41.80° \tag{10.7.12}$$

$$(p_{act})_{IV} = 2R\,\theta_4 \Leftrightarrow (p_{act})_{IV} = 2\times 40\times 41.80\times\frac{\pi}{180} = 58.37\ \text{mm}$$

Posição V ($d_5 = 7.2042\,\text{mm}$)

Devido à simetria do corte os valores para esta posição coincidem com os da posição III, ou seja,

$$\theta_5 = \theta_3 = 45.52° \Rightarrow (p_{act})_V = (p_{act})_{III} = 63.56\ \text{mm} \tag{10.7.13}$$

Posição VI ($d_6 = 8.4084\,\text{mm}$)

À semelhança do caso anterior, a simetria do corte conduz a que os valores para esta posição coincidam com os da posição I, ou seja,

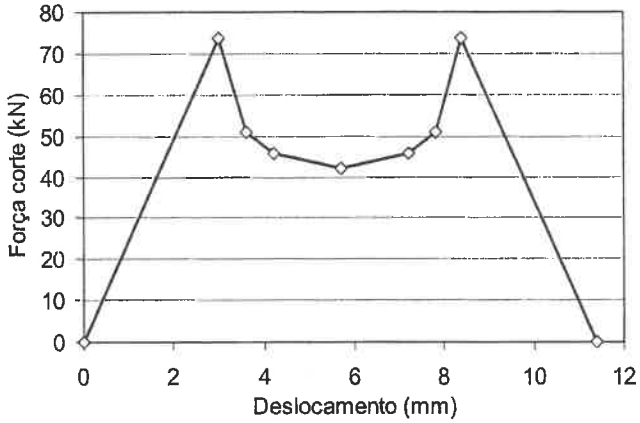
$$\theta_6 = \theta_1 = 146.70° \Rightarrow (p_{act})_{VI} = (p_{act})_I = 102.42\ \text{mm} \tag{10.7.14}$$

Considerando o valor da tensão de rotura do material, $\sigma_R = 450\,\text{MPa}$, e um valor da constante C=0.8, a evolução da força de corte pode ser obtida aplicando estes valores na equação (10.7.3), resumindo-se os valores na tabela seguinte,

Posição	I	II	III	IV	V	VI
d (mm)	3	3.6	4.2042	5.7042	7.2042	8.4084
θ total (°)	146.70	101.48	91.04	83.6	91.04	146.70
P_{act} (mm)	102.42	70.85	63.56	58.37	63.56	102.42
F_c (kN)	73.74	51.01	45.76	42.03	45.76	73.74

Na figura seguinte mostra-se a evolução da força de corte traçada com base na tabela anterior. Conforme concluído anteriormente, constata-se que a força atinge os seus valores máximos no início e no final do corte, altura em que o perímetro de corte alcança o

valor máximo. Relativamente ao valor de força de corte necessária para o corte sem inclinação ($F_c = 271.4\,\text{kN}$), constata-se que a inclinação das arestas de corte reduz o valor máximo da força de corte em cerca de 72.8%, consequência da diminuição do perímetro de corte em 59.2% e do facto da tensão de corte aplicada no perímetro de corte ser um valor médio da tensão de corte máxima ($\tau_{med} = 2/3\,\tau_R$).



Por outro lado, verifica-se um aumento significativo do curso de corte da ferramenta relativamente ao corte sem inclinação, o qual passa de 3 mm para cerca 11.4 mm, consequência do valor elevado do ângulo de inclinação adoptado para o punção.

Finalmente, para estimar o valor do trabalho de corte necessário à operação de corte inclinado, pode recorrer-se ao gráfico da figura anterior e de um modo aproximado calcular a área delimitada pela curva da força de corte. Notando que a curva é simétrica relativamente à posição IV ($d_4 = 5.7042\,\text{mm}$), a tabela seguinte resume este cálculo,

Assim, o trabalho total de corte para esta operação será $W_i = 486.2\,\text{J}$, o qual difere em cerca de 10% do determinado para o corte direito $W_d = 542.9\,\text{J}$. Esta diferença pode estar associada a erros de cálculo associados ao método de cálculo usado para o corte inclinado e ainda aos valores usados para as constantes empíricas.

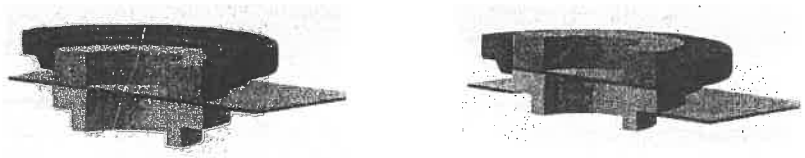
Intervalo de Deslocamento (mm)	**Força (N)**	**Trabalho Elementar (N mm)**
0 a 3	0 – 73742.4	110613.6
3 a 3.6	73742.4 - 51012	37426.3
3.6 a 4.2042	51012 – 45763.2	29235.8
4.2042 a 5.7042	45763.2 – 42026.4	65842.2
	Metade do trabalho total	243117.9

11. ESTAMPAGEM

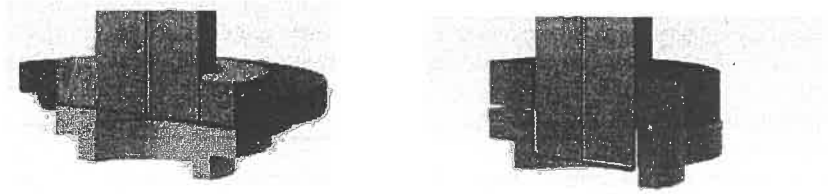
Neste capítulo apresenta-se um conjunto de problemas que abordam o processo tecnológico da estampagem.

Problema 11.1

Considere a seguinte sequência de fabrico de latas de refrigerantes; o processo inicia-se com o corte por arrombamento de um disco de chapa de Alumínio AA3104-H19, com 140 mm de diâmetro e 0.25 mm de espessura, seguindo-se a estampagem do disco de modo a obter uma taça cilíndrica. O fabrico por estampagem desenrola-se numa única operação, caracterizada por ter uma relação de estampagem de $m = 0.635$. Na figura seguinte ilustra-se a sequência de fabrico apresentando a operação de corte por arrombamento (em cima) e a de estampagem (em baixo).



Corte por Arrombamento



Estampagem

A tensão de rotura da liga de alumínio AA3104-H19 é $\sigma_R = 290$ MPa.

a) Observe as figuras anteriores e estabeleça as dimensões nominais do punção e da matriz a utilizar para cortar o disco de chapa. Admita que o valor da folga radial é igual a 5% da espessura da chapa. Justifique a sua resposta.

b) Para o corte por arrombamento calcule a força máxima e o trabalho de corte.

c) Determine a altura e o diâmetro da taça cilíndrica estampada.

d) Para a estampagem calcule o valor da força máxima e do trabalho dispendido na operação. (Admita $Q_f = 0.76$ e $Q_w = 0.7$).

Resolução

a) No presente caso pretende-se efectuar um corte em que se tem que assegurar a dimensão da estampa plana (disco). Uma vez que no corte por arrombamento o diâmetro da peça, $D_{peça}$, é definido na zona de penetração pela dimensão da zona cilíndrica do furo da matriz, a dimensão da matriz deverá ser a que se pretende para a estampa plana, sendo a folga dada ao punção.

Sendo a folga radial 5% da espessura da chapa, ou seja,

$$j_r = 0.05 \times h = 0.05 \times 0.25 = 0.0125 \text{mm} \tag{11.1.1}$$

os diâmetros nominais do punção, d_p, e da matriz, d_m, da ferramenta serão os seguintes,

$$\begin{aligned} d_m &= D_{peça} = 140 \ \text{mm} \\ d_p &= d_m - 2\,j_r = 140 - 2 \times 0.0125 = 139.975 \ \text{mm} \end{aligned} \tag{11.1.2}$$

b) Para se calcular a força máxima da operação de corte por arrombamento, sabe-se que esta é dada por,

$$F_{max} = C\,\sigma_R\,p\,h \tag{11.1.3}$$

em que p é o perímetro de corte ao longo do qual se encontram aplicadas as forças de corte, h é a espessura da chapa, σ_R é a tensão de rotura do material e C é uma constante de correcção da tensão de rotura do ensaio de tracção uniaxial, σ_R, para a tensão de rotura ao corte, τ_R.

Os valores da constante C dependem fundamentalmente do tipo de material e das respectivas características mecânicas. Consultando a tabela do problema 10.1 onde estão definidos os valores da constante C verifica-se que para ligas de alumínio o seu valor máximo é de 0.75. Nestas condições, de acordo com a equação (11.1.3), a força máxima necessária ao corte dos discos será,

$$(F_{max})_a = 0.75 \times 290 \times (\pi \times 140) \times 0.25 = 23915.4 \ \text{N} \cong 23.9 \,\text{kN} \tag{11.1.4}$$

Relativamente ao trabalho de corte, W, sabe-se que é dado por,

$$W_c = \frac{2}{3} F_{max} h \tag{11.1.5}$$

em que F_{max} é a força de corte máxima e h a espessura da chapa.

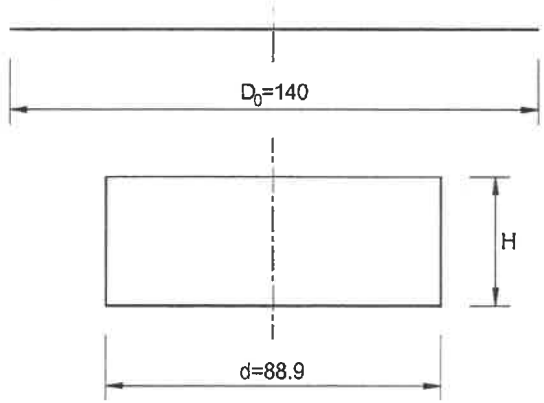
Substituindo valores, obtém-se,

$$W_c = \frac{2}{3} \times 23915.4 \times 0.25 \times 10^{-3} = 3.99 \,\text{N.m} \tag{11.1.6}$$

c) Para se determinar a geometria da taça conhece-se a relação de estampagem da operação, $m = 0.635$, o qual é definido como o quociente entre o diâmetro da taça, d, e o diâmetro da estampa plana, D_0, Então, o diâmetro da taça cilíndrica estampada será,

$$m = \frac{d}{D_0} = \frac{d}{140} = 0.635 \ \Rightarrow \ d = 88.9 \ \text{mm} \tag{11.1.7}$$

A altura da taça cilíndrica, H, determina-se através da conservação de volume, característica da deformação plástica dos materiais metálicos. Admitindo que a espessura média da taça é igual à da estampa plana a conservação de volume entre a estampa plana e a taça converte-se numa igualdade de áreas. Então, desprezando a zona do canto do cunho (zona de concordância entre a parede e o fundo da taça), conforme se mostra na figura seguinte, da igualdade de áreas obtém-se,



$$\frac{\pi \times 140^2}{4} = \frac{\pi \times 88.9^2}{4} + \pi \times 88.9 \times H \quad \Leftrightarrow \quad H = 32.9\,\text{mm} \tag{11.1.8}$$

d) O valor máximo da força de estampagem calcula-se a partir da seguinte expressão,

$$F_{max} = Q_f \pi\, d\, h\, \sigma_R \tag{11.1.9}$$

em que d é o diâmetro médio da parede da taça, h é a espessura da taça, σ_R, é a tensão de rotura do material e Q_f é um factor correctivo da tensão de rotura que depende da relação de estampagem da operação, m.

Substituindo valores na equação (11.1.9), com $Q_f = 0.76$, obtém-se,

$$(F_{max})_e = 0.76 \times \pi \times 88.9 \times 0.25 \times 290 = 15388.7\,\text{N} \cong 15.4\,\text{kN} \tag{11.1.10}$$

Finalmente, o trabalho de corte consumido na operação de estampagem é dada por,

$$W_e = Q_w F_{max}\, H \tag{11.1.11}$$

em que F_{max} é a força máxima de estampagem, H a altura da taça e Q_w um factor correctivo da curva força-deslocamento.

Substituindo valores na equação (11.1.11) e notando que $Q_w = 0.7$, obtém-se,

$$W_e = 0.7 \times 15388.7 \times 32.9 \times 10^{-3} = 354.4\,\text{N.m} \tag{11.1.12}$$

Problema 11.2

Pretende-se fabricar por estampagem um recipiente cilíndrico numa liga de alumínio AA5052-H32, com 290 mm de diâmetro, 175 mm de altura e 1.5 mm de espessura. Na tabela seguinte apresentam-se as características mecânicas da liga de alumínio.

E (GPa)	ν	σ_e (MPa)	σ_R (MPa)	e_f (%)
70.3	0.33	193	228	12

Sendo a matéria prima fornecida em rolos com uma largura de 540 mm, determine,

a) A geometria e dimensões da estampa plana. Verifique se é necessário recorre à estampagem múltipla para fabricar a taça.

b) Para a primeira operação de estampagem esboce uma ferramenta que permita cortar a estampa plana e simultaneamente realizar a estampagem. Considere que se dispõe de uma prensa de triplo efeito.

c) A força máxima em cada um dos efeitos da prensa.

Resolução

a) Contrariamente aos processos de flexão em domínio plástico a estampa plana das peças obtidas por estampagem não pode ser obtida através da planificação da peça, pela simples razão que estas peças não são planificáveis. No caso particular do fabrico de uma taça cilíndrica a estampa plana tem geometria circular. Uma vez que a estampagem é um processo de deformação plástica, o cálculo das dimensões da estampa plana faz-se com base no princípio da conservação de volume que caracteriza os materiais que habitualmente são transformados por este processo. Porém, para a generalidade dos casos é difícil fazer-se uma previsão da espessura da peça depois de estampada, pelo que é habitual considerar-se que em termos médios a espessura da chapa, h, se mantém constante durante a estampagem, o que permite transformar o cálculo da estampa plana numa igualdade de áreas. Nestas condições, admitindo que as dimensões da taça se referem à linha média, o diâmetro inicial, D_0, da estampa plana obtém-se através da igualdade entre as áreas da estampa plana e da peça final, ou seja,

$$\frac{\pi D_0^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4} + \pi d H \quad \Rightarrow \quad D_0 = \sqrt{d^2 + 4 d H} \tag{11.2.1}$$

em que d é o diâmetro da taça e H a altura da taça.

De notar que a equação (11.2.1) fornece uma dimensão aproximada da estampa plana, uma vez que neste cálculo não foi considerada a zona do canto do cunho, zona circular que define a concordância entre a parede e o fundo da taça e que tem que existir sempre numa peça estampada.

Substituindo valores na equação (11.2.1) obtém-se a dimensão da estampa plana nas condições enunciadas,

$$D_0 = \sqrt{290^2 + 4 \times 290 \times 175} = 535.8\,\text{mm} \qquad (11.2.2)$$

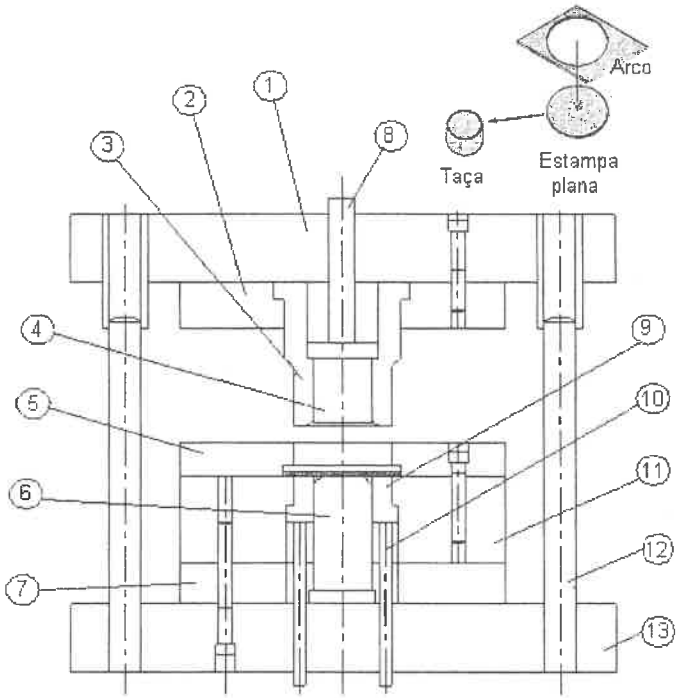
Para verificar se é possível produzir com sucesso a peça numa única operação de estampagem tem que se apurar se o coeficiente da estampagem não é inferior ao coeficiente limite de estampagem do material para um primeira operação, M_1. Consultando a tabela seguinte, onde se apresenta o valor do coeficiente limite de estampagem para alguns dos materiais mais usados em estampagem, constata-se que para o alumínio o coeficiente limite de estampagem vale $M_1 = 0.53 \sim 0.6$.

Por outro lado, o coeficiente de estampagem da operação (m), que se define como sendo o quociente entre o diâmetro da taça, d, e o diâmetro da estampa plana, D_0, é dado por,

$$m = \frac{d}{D_0} = \frac{290}{535.8} = 0.54 > M_1 = 0.53 - 0.6 \qquad (11.2.3)$$

Material	M_1 (1ª Fase)	M_2 (Fases seguintes)
Aço para estampagem	0.60 – 0.65	0.80
Aço para estampagem profunda	0.55 – 0.60	0.75 – 0.80
Aço para carroçaria automóvel	0.52 – 0.58	0.75 – 0.80
Aço inoxidável	0.50 – 0.55	0.80 – 0.85
Folha de flandres	0.50 – 0.55	0.75 – 0.80
Cobre	0.55 – 0.60	0.85
Latão	0.50 – 0.55	0.75 – 0.80
Zinco	0.65 – 0.70	0.85 – 0.90
Alumínio	0.53 – 0.60	0.80
Duralumínio	0.55 – 0.60	0.90
Níquel; Monel; Inconel	0.60 – 0.65	0.80

A condição anterior determina que o limite de redução admissível do material da chapa não é alcançado nesta operação. Nestas circunstâncias o fabrico da peça pode ser efectuado apenas numa operação de estampagem.



Legenda

1- Tecto
2- Porta punções
3- Punção de corte e matriz de estampagem
4- Desembainhador
5- Placa fixa
6- Cunho de estampagem
7- Porta punções
8- Haste de accionamento do desembainhador
9- Encostador
10- Haste de accionamento do encostador
11- Matriz de corte
12- Coluna
13- Base

b) Na figura anterior apresenta-se o esboço de uma ferramenta com capacidade para executar de um modo sequencial a operação de arrombamento da estampa plana e a estampagem da taça cilíndrica. A ferramenta utiliza os 3 efeitos disponíveis na prensa; o efeito principal actuará directamente sobre o tecto da ferramenta (1) e será o responsável pelo movimento de corte e de enformação da peça, o segundo efeito, localizado na zona inferior da prensa, actua o encostador (9) através das hastes de accionamento (10), enquanto que o terceiro efeito actua o desembainhador (4), através da haste de accionamento (8) e destina-se a ejectar a taça da ferramenta no final da operação.

Com o movimento de descida da ferramenta o punção de corte (3), de geometria circular, contacta o arco, posicionado na placa fixa (5), e inicia o corte da estampa plana na matriz de corte (11), a qual sofre a contra pressão do encostador (10) na zona da aba da operação de estampagem. Uma vez que o punção de estampagem (6) não tem movimento, por estar fixado na base (13) através do porta punções (7), a estampagem inicia-se ainda antes da operação de corte por arrombamento terminar.

Com a continuação do movimento de descida da ferramenta completa-se a operação de estampagem com a penetração do cunho (6) na matriz de estampagem (3) e a subida do desembainhador (4). Alcançado o PMI (Ponto Morto Inferior) a prensa inverte o movimento principal e acciona o movimento de desembainhamento da peça, ejectando a peça do interior da matriz de estampagem.

A ferramenta proposta para o fabrico desta peça é apenas uma possibilidade entre muitas. De facto, é possível conceber uma ferramenta com os mesmos efeitos para instalar numa prensa de simples ou duplo efeito. Naturalmente que para estes casos os efeitos complementares (encostador e desembainhador) terão que ser criados na própria ferramenta com a introdução de sistemas elásticos auxiliares, aumentando significativamente a sua complexidade.

c) Na alínea anterior fez-se uma breve descrição do modo de funcionamento da ferramenta. Como se viu a ferramenta possui três efeitos independentes, em associação com os efeitos existentes na prensa. Iniciando a análise das forças pelos efeitos considerados auxiliares, sabe-se que o "efeito de desembainhamento" foi incluído com o objectivo de ejectar a peça da matriz no fim da estampagem, ou seja, apenas nesta altura do ciclo é necessário dispor da força máxima neste efeito. A força que se opõe à extracção da peça da matriz depende de vários factores, sendo de destacar a dimensão da folga, o valor do coeficiente de estampagem, o raio do canto da matriz, a geometria interior da matriz, as propriedades elásticas do material e as condições tribológicas entre o material da peça e da matriz. Não obstante, é habitual admitir-se que uma força igual a 30% da força máxima de estampagem é suficiente para garantir a ejecção da peça, ou seja,

$$F_{eje} = 0.3\,(F_{est})_{max} \tag{11.2.4}$$

No que diz respeito à acção do encostador pode dizer-se que nesta ferramenta a sua função é dupla; numa primeira fase exerce uma contra pressão ao punção de corte por arrombamento, fixando o arco e contribuindo para evitar eventuais empenos da estampa plana. Numa segunda fase, depois de terminado o corte da estampa plana, actua como encostador da operação de estampagem, evitando o engelhamento da aba. Sem dúvida que esta última função será aquela que irá determinar a força que o encostador tem que exercer, a qual pode ser determinada a partir da seguinte expressão,

$$F_{enc} = p_{enc}\,A_e \tag{11.2.5}$$

em que p_e é a pressão no encostador para evitar o engelhamento da aba e A_e é a área de actuação do encostador.

A pressão a exercer pelo encostador, p_{enc}, pode ser determinada a partir da seguinte expressão semi-empírica, a qual tem a vantagem de fazer depender o valor da pressão do encostador das principais variáveis da operação de estampagem,

$$p_{enc} = \left[\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{d}{200\,h}\right]\frac{\sigma_R}{400} \tag{11.2.6}$$

em que $p_{enc}\,(\mathrm{N/mm^2})$ é a pressão do encostador, m é o coeficiente de estampagem, $d\,(\mathrm{mm})$ é o diâmetro do cunho, $h\,(\mathrm{mm})$ é a espessura da chapa e $\sigma_R\,(\mathrm{N/mm^2})$ é a tensão de rotura do material.

Por outro lado, a área de actuação do encostador, A_e, tem a geometria de uma coroa circular com a seguinte definição,

$$A_e = \frac{\pi}{4}\left(D_0^2 - d_{int}^2\right) \quad \text{com} \quad d_{int} = d + 2j_r + 2r_{cm} \tag{11.2.7}$$

em que D_0 é o diâmetro da estampa plana, d_{int} o diâmetro interior de contacto, d o diâmetro do cunho, j_r a folga radial e r_{cm} o raio do canto da matriz. De referir que no caso do presente problema os valores da folga radial e do raio do canto da matriz serão desprezados por questões de simplicidade.

Então, a força no encostador pode ser determinada substituindo valores nas equações (11.2.6) e (11.2.7), obtendo-se,

$$F_{enc} = p_{enc} A_e = \frac{228}{400} \times \left[\left(\frac{1}{0.54} - 1 \right)^2 + \frac{290}{200 \times 1.5} \right] \times \frac{\pi}{4} \times \left(535.8^2 - 290^2 \right) \quad (11.2.8)$$

$$= 165249.1\text{N} \cong 165.2\text{kN}$$

Analisando agora as forças que se desenvolvem no efeito principal, sabe-se que o processo se inicia com o corte por arrombamento da estampa plana, seguindo-se-lhe a operação de estampagem. Significa isto que na parte descendente do curso deverão surgir dois máximos de força, um associado ao corte por arrombamento e outro proveniente da estampagem. Assim, interessa agora determinar o máximo de força em cada um destes processos. Iniciando com o corte por arrombamento sabe-se que o máximo da força de corte surge quando o punção penetrou cerca de 40% da espessura da chapa, $d_a = 0.4h$, e pode ser calculado a partir da seguinte expressão,

$$F_{max} = C \sigma_R \, p \, h \quad (11.2.9)$$

em que p é o perímetro sobre o qual actuam as forças de corte, h a espessura da chapa, σ_R a tensão de rotura do material e C uma constante que permite determinar a tensão de rotura ao corte do material, τ_R, a partir da tensão de rotura do ensaio de tracção uniaxial, σ_R.

Adoptando para a liga de alumínio AA5052-H32 um valor da constante $C = 0.75$, obtém-se para a força máxima do corte por arrombamento, $(F_{max})_a$,

$$(F_{max})_a = 0.75 \times 228 \times \pi \times 535.8 \times 1.5 = 431757.6\text{N} \cong 431.8\,\text{kN} \quad (11.2.10)$$

Para determinar a força máxima de estampagem $(F_{max})_e$, sabe-se que o valor máximo surge para uma penetração do cunho da ordem de grandeza da soma do raio do canto da matriz (r_{cm}) com o raio do canto do cunho (r_{cc}), $(d_e = r_{cm} + r_{cc} = 6h + 4h = 10h)$, sendo o seu valor obtido a partir da seguinte expressão,

$$F_{max} = Q_f \, \pi \, d_m \, h \, \sigma_R \quad (11.2.11)$$

em que d_m é o diâmetro médio da parede da taça, h é a espessura da taça, σ_R, é a tensão de rotura do material e Q_f é um factor correctivo da tensão de rotura que depende da relação de estampagem da operação, m.

Consultando a tabela seguinte verificamos que o factor correctivo $Q_f = 1$, uma vez que o coeficiente de estampagem da operação é $m = 0.54$.

m	0.55	0.575	0.6	0.625	0.65	0.675	0.7	0.725	0.75	0.775	0.8
Q_f	1	0.93	0.86	0.79	0.72	0.66	0.6	0.55	0.5	0.45	0.4

Então, o valor da força máxima de estampagem será,

$$(F_{max})_e = 1 \times \pi \times 290 \times 1.5 \times 228 = 311583.2 \text{ N} \cong 311.6\text{kN} \quad (11.2.12)$$

Conhecidos os valores máximos associados a cada um dos processos que se desenvolvem no efeito principal da prensa interessa agora fazer uma representação qualitativa da evolução da força para, desse modo, identificar os máximos de força. Assim, considerando a figura seguinte, verifica-se que ambos os processos (corte e estampagem) se iniciam ao mesmo tempo e que a força do encostador (F_{enc}) está disponível no 2º efeito logo que o punção de corte toca a chapa.

A partir deste instante o corte por arrombamento desenvolve-se até alcançar o valor máximo de força, $(F_{max})_a$, para um deslocamento do punção da ordem de grandeza de $d_a \approx 0.4h$. No entanto, neste instante a força exigida à prensa contempla três parcelas; a do corte por arrombamento, a do encostador e uma parcela pequena (que, por isso, será desprezado nos cálculos que se seguem) correspondente à estampagem.

Terminado o processo de corte, correspondente a um deslocamento do punção da ordem de grandeza da espessura, tem lugar a operação de estampagem propriamente dita, surgindo o máximo de força $((F_{max})_e)$quando, agora a matriz da estampagem, se tiver deslocado cerca de $d_e = 10h$. No entanto, como o encostador continua a actuar o valor exigido à prensa neste instante deverá contemplar o respectivo valor.

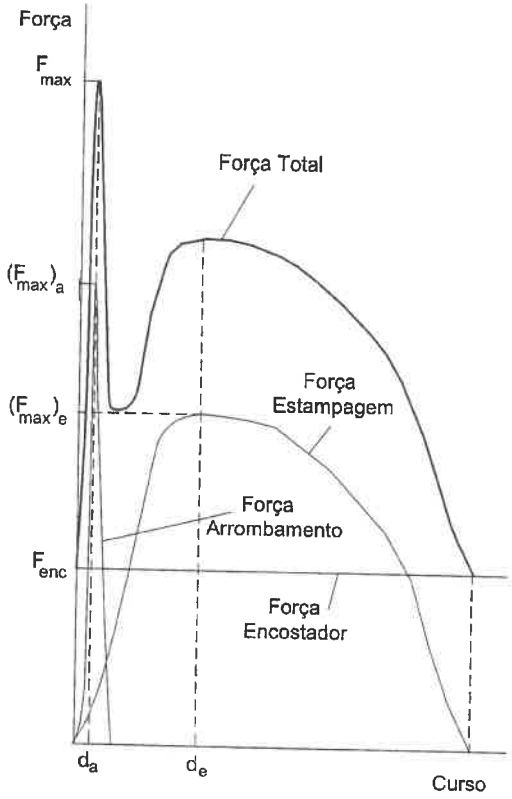
Da anterior descrição conclui-se que o máximo da força total surgirá associado ou ao máximo da força de corte ou então ao máximo da força de estampagem, ou seja,

$$F_{max} = \begin{cases} (F_{max})_a + F_{enc} + F_{est} & \text{para} \quad c = d_a \approx 0.4h \\ (F_{max})_e + F_{enc} & \text{para} \quad c = d_e \approx 10h \end{cases} \quad (11.2.13)$$

Substituindo valores, obtém-se,

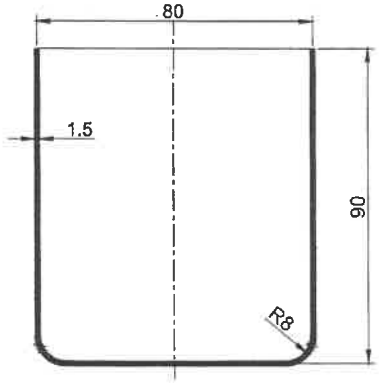
$$F_{max} = \begin{cases} 431.8 + 165.2 = 597.0\text{kN} & \text{para} \quad c = d_a \approx 0.4h = 0.6 \text{ mm} \\ 311.6 + 165.2 = 476.8\text{kN} & \text{para} \quad c = d_e \approx 10h = 15 \text{ mm} \end{cases} \quad (11.2.14)$$

Conclui-se, assim, que o corte por arrombamento surge como o processo mais exigente em termos de força, requerendo no efeito principal da prensa, praticamente no início do curso, $d_a = 0.6\,\text{mm}$, uma força máxima de cerca de $58.5\,\text{ton}$.



Problema 11.3

Considere que se pretende fabricar por estampagem o recipiente cilíndrico em aço AISI 1008 que se encontra representado na figura. Como é habitual as dimensões da peça referem-se à linha média.



As propriedades mecânicas do aço AISI 1008 são as da tabela seguinte,

E (GPa)	ν	σ_e (MPa)	σ_R (MPa)	e_f (%)
200	0.29	240	358	42

a) Determine as dimensões da estampa plana. Compare o valor obtido com aquele que se obtém desprezando o raio de concordância entre a parede e o fundo da taça.

b) Verifique se existe necessidade de se proceder a estampagem múltipla. Em caso afirmativo, estabeleça o número de passos e determine as dimensões da taça para os passos intermédios.

c) Esboce um conjunto de ferramentas que permita produzir a peça. Para a 1ª operação intermédia estime o valor da espessura da zona superior da parede da taça, desprezando a acção do encostador.

d) Para as diferentes ferramentas esboçadas na alínea anterior determine; o valor do raio do canto da matriz, o valor da folga, a força no encostador e de estampagem. Calcule ainda a potência necessária à estampagem sabendo que a velocidade de trabalho da prensa é de 15 mm/s.

Resolução

a) Para calcular o diâmetro da estampa plana irá seguir-se a mesma metodologia utilizada nos problemas anteriores. Assim, o D_0 da estampa plana obtém-se através da igualdade entre a área da estampa plana e a área da peça final, pois considera-se que a espessura média da taça é igual à espessura inicial.

Iniciando o cálculo pela solução simplificada, ou seja, desprezando a zona do canto do cunho, obtém-se,

$$\frac{\pi D_0^2}{4} = \frac{\pi \times 80^2}{4} + \pi \times 80 \times 90 \quad \Rightarrow \quad D_0 = 187.6\,\text{mm} \tag{11.3.1}$$

Para determinar o diâmetro da estampa plana considerando a geometria real da peça a sua área é obtida dividindo a peça em três regiões; a zona do fundo da taça, a zona do canto do cunho e a zona cilíndrica, cujas áreas são dadas por,

$$\begin{aligned} A_f &= \pi \times r_f^2 = \pi \times (40-8)^2 = 3217\,\text{mm}^2 \\ A_{cc} &= 2\pi (r_{cg})_{cc} \times (\alpha r_{cc}) = 2\pi \left(r_f + \frac{2}{\pi} r_{cc} \right) \times \left(\frac{\pi}{2} r_{cc} \right) \\ &= 2\pi \left(32 + \frac{2}{\pi} \times 8 \right) \times \left(\frac{\pi}{2} \times 8 \right) = 2928.7\,\text{mm}^2 \\ A_c &= 2\pi r_c l_c = 2\pi \times 40 \times (90-8) = 20608.8\,\text{mm}^2 \end{aligned} \tag{11.3.2}$$

A área da zona do canto do cunho foi calculada aplicando o teorema de Pappus-Guldin.

A área total da taça é igual à soma das áreas parcelares acima calculadas, ou seja,

$$A_{peça} = A_f + A_{cc} + A_c = 3217 + 2928.7 + 20608.8 = 26754.5\,\text{mm}^2 \tag{11.3.3}$$

e, portanto, a estampa plana deverá ter geometria circular com 1.5 mm de espessura e com um diâmetro de,

$$D_0 = \sqrt{\frac{4}{\pi} A_{peça}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \times 26754.5} = 184.6\,\text{mm} \tag{11.3.4}$$

Quando se despreza a zona do canto do cunho o valor da estampa plana é ligeiramente superior, dependendo, naturalmente, essa diferença do raio do canto do

cunho. Em face do valor determinado vai fixar-se o diâmetro da estampa plana em 185 mm.

b) Para se verificar se a peça pode ser fabricada numa única operação tem que se determinar a relação de estampagem da operação, m, e comparar esse valor com o coeficiente limite de estampagem do aço AISI 1008, M_1, indicado na tabela do problema 11.2 como aço de estampagem profunda, ou seja,

$$m = \frac{d}{D_0} = \frac{80}{185} = 0.43 < M_1 = 0.55 - 0.6 \tag{11.3.5}$$

Conclui-se, portanto, que a taça tem que ser produzida por estampagem múltipla. O número de fases necessárias ao fabrico da peça será determinado em consonância com a redução máxima permitida em cada fase de estampagem. Notando que o coeficiente limite de estampagem do material para a primeira operação é igual a $M_1 = 0.55 - 0.6$ e para as seguintes igual a $M_2 = 0.75$ (tabela do problema 11.2), constata-se que são necessárias duas fases para produzir a peça já que os diâmetros mínimos que se podem obter são os seguintes,

$$\begin{aligned} &1^a\text{Fase:} \quad d_1 = M_1 \times D_0 = 0.55 \times 185 = 101.75\ \text{mm} \\ &2^a\text{Fase:} \quad d_2 = M_2 \times d_1 = 0.75 \times 101.75 = 76.3\,\text{mm} < 80\,\text{mm} \end{aligned} \tag{11.3.6}$$

Para evitar que a na 1ª fase se execute uma redução máxima, estabelece-se a seguinte sequência,

$$\begin{aligned} &1^a\text{Fase:} \quad D_0 = 185\text{mm} \rightarrow d_1 = 105\text{mm} \Rightarrow \quad m = \frac{105}{185} = 0.568 \\ &2^a\text{Fase:} \quad d_1 = 105\text{mm} \rightarrow d_2 = 80\text{mm} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{80}{105} = 0.762 \end{aligned} \tag{11.3.7}$$

Então, para calcular as dimensões da taça intermédia usa-se o mesmo principio da conservação de volume aplicado anteriormente. No entanto, falta definir o raio de concordância da zona do fundo desta operação. Habitualmente procede-se a uma redução escalonada deste raio, dependendo o escalonamento do número de operações e das dimensões da taça. Neste caso, vai admitir-se um factor de escala de 2, significando isso que para a operação intermédia o raio de concordância entre a parede e o fundo será igual $(r_{cc})_1 = 16\,\text{mm}$. Assim, tendo a taça um diâmetro de 105 mm, a altura da sua zona cilíndrica será,

$$A_{peça} = (A_f)_1 + (A_{cc})_1 + (A_c)_1$$

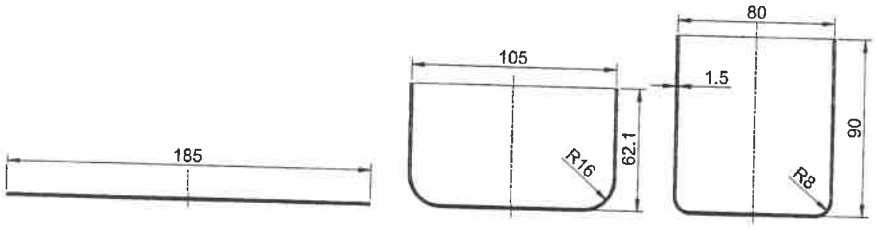
$$= \pi \times (r_f)_1^2 + 2\pi\left((r_f)_1 + \frac{2}{\pi}(r_{cc})_1\right) \times \left(\frac{\pi}{2}(r_{cc})_1\right) + 2\pi(r_c)_1$$

ou seja,

$$(l_c)_1 = \frac{A_{peça} - \pi \times (r_f)_1^2 - \pi^2 (r_{cc})_1 \left((r_f)_1 + \frac{2}{\pi}(r_{cc})_1\right)}{2\pi(r_c)_1} \qquad (11.3.8)$$

$$= \frac{26754.5 - \pi \times 36.5^2 - \pi^2 \times 16 \times \left(36.5 + \frac{2}{\pi} \times 16\right)}{\pi \times 105} = 46.1\text{mm}$$

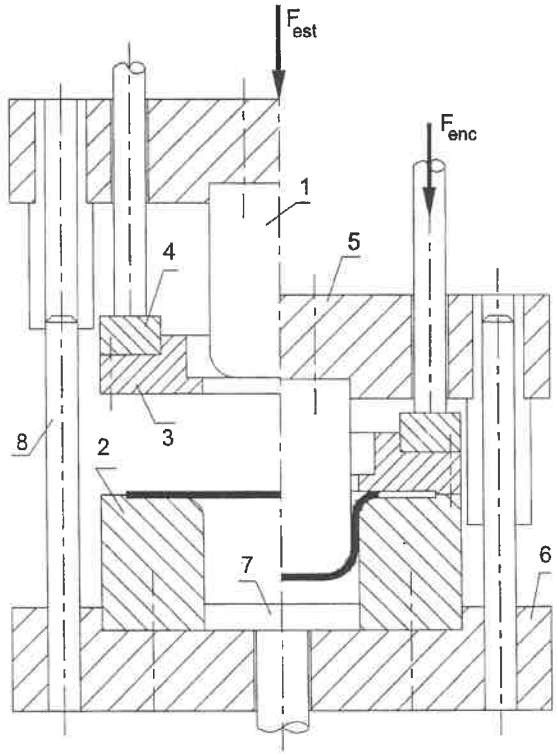
c) Em face da sequência de fabrico proposta serão necessárias duas ferramentas, uma para a 1ª fase e outra para a 2ª fase. Na figura seguinte resume-se a geometria e as dimensões das peças nas diferentes fases do processo de fabrico.



Na figura seguinte apresenta-se o esboço de uma ferramenta para a 1ª fase. Trata-se de uma ferramenta de triplo efeito que permite estampar a taça intermédia da figura anterior partindo da estampa plana.

O ciclo de estampagem começa com o posicionamento da estampa plana na matriz (2), seguindo-se a actuação do encostador (3), o qual irá aplicar uma força F_{enc} sobre a zona periférica da estampa plana para evitar o engelhamento da aba durante o processo de estampagem. Posicionado o encostador inicia-se o movimento de enformação propriamente dito através do movimento descendente do cunho (1) que está ligado ao tecto (5) da ferramenta que, por sua vez, é accionado pelo efeito principal da prensa. Concluído o curso descendente da ferramenta (atingido o PMI) todos os elementos activos desta primeira fase regressam ao PMS e dá-se início à fase de ejecção da taça do interior da matriz, usando, para o efeito, o ejector/desembainhador (7).

Retirada a peça do interior da ferramenta o ejector regressa à sua posição inicial e o ciclo de estampagem termina.

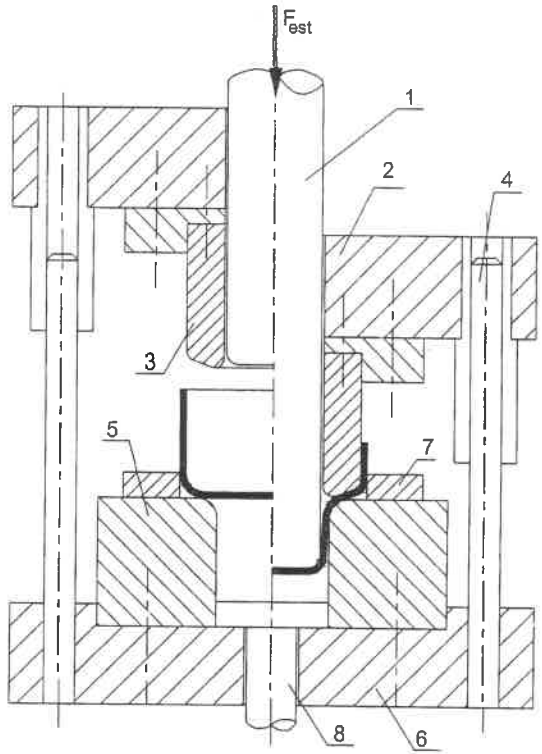


Legenda

1- Cunho
2- Matriz
3- Encostador
4- Haste de accionamento do encostador
5- Tecto
6- Base
7- Ejector/Desembainhador
8- Coluna

Nesta fase do fabrico a peça tem que ser transferida para outra estação do processo, na qual esteja instalada a ferramenta da 2ª fase, cujo esboço se apresenta na figura seguinte. Tal como a da 1ª fase esta ferramenta é de triplo efeito. A operação inicia-se com o posicionamento da taça intermédia no centrador (7) da matriz (5). De seguida o tecto (2) da ferramenta desce para posicionar o encostador (3). De referir que este encostador deve ser projectado respeitando os requisitos indicados para uma operação

intermédia de estampagem múltipla directa, conforme discussão efectuada no volume que trata dos aspectos teóricos da estampagem.



Legenda

1- Cunho
2- Tecto
3- Encostador
4- Coluna
5- Matriz
6- Base
7- Centrador da peça
8- Ejector/Desembaínhador

Uma vez posicionado o encostador que irá desempenhar uma função de guiamento da taça durante a estampagem, inicia-se o movimento de descida do cunho (1), dando então lugar à operação de estampagem. O ciclo da estampagem termina com a ejecção da peça final do interior da matriz através do movimento ascendente do ejector (8), depois de retirados o encostador e o cunho.

Para fazer uma estimativa da espessura da zona superior da parede da taça, desprezando a acção do encostador, sabe-se que essa região na configuração inicial se situava no extremo da estampa plana. Durante a estampagem esta região está sujeita a um estado de tensão uniaxial de compressão, caracterizado por,

$$\begin{cases}\sigma_\theta = -\sigma_e \\ \sigma_r = \sigma_z = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d\varepsilon_\theta < 0 \\ d\varepsilon_r = d\varepsilon_z = -\dfrac{1}{2}d\varepsilon_\theta > 0\end{cases} \qquad (11.3.9)$$

Por outro lado, entre o instante inicial (estampa plana) e final (taça estampada) a extensão tangencial da região periférica da aba é dada por,

$$\varepsilon_\theta = ln\frac{\pi d_1}{\pi D_0} = ln\frac{d_1}{D_0} = ln\frac{105}{185} = -0.566 \qquad (11.3.10)$$

Então, aplicando a definição de extensão segundo a espessura (z) e aplicando o princípio da conservação de volume chega-se a,

$$\varepsilon_z = ln\frac{h}{h_0} \Rightarrow h = h_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon_\theta} = 1.5 \times e^{(0.5\times 0.566)} = 1.99\,\text{mm} \qquad (11.3.11)$$

Ou seja, se o processo de deformação se desenrolasse sem encostador a espessura da zona periférica da aba sofreria um aumento de cerca de 32.6% durante a estampagem da taça. Este é o motivo que justifica o facto do valor da folga aumentar entre fase na estampagem múltipla, conforme se verá na alínea seguinte.

d) Pretende-se agora determinar as principais variáveis processuais de ambas as operações de estampagem.

1ª Fase de estampagem

Iniciando pela determinação da folga, j_r (mm), para a estampagem da 1ª fase irá usar-se a expressão proposta por Oehler e Kaiser para a estampagem cilíndrica

$$(j_r)_1 = h_{max} + k\sqrt{10 \times h_0} = 1.5 + 0.07 \times \sqrt{10 \times 1.5} = 1.77\,\text{mm} \cong 1.8\,\text{mm} \qquad (11.3.12)$$

em que h_{max} (mm) e h_0 (mm) são respectivamente a espessura máxima (considerando, portanto, a tolerância dimensional) e a espessura nominal da matéria prima, ambas em

mm, e k um parâmetro que depende do material (0.07 para o aço, 0.02 para o alumínio e 0.04 para outros materiais não ferrosos).

Para determinar o raio do canto da matriz, r_{cm}, pode usar-se a relação empírica que estabelece que, para a 1ª operação, deve variar entre 6 e 10 vezes a espessura da chapa. De facto, raios do canto da matriz muito pequenos impõem deformações adicionais muitas vezes inconvenientes ao processo, enquanto que raios demasiados elevados podem conduzir ao engelhamento da taça logo que a acção do encostador deixa de ser efectiva. Nestas condições, adopta-se,

$$(r_{cm})_1 = 6 \times h = 6 \times 1.5 = 9\,\text{mm} \tag{11.3.13}$$

A força a exercer pelo encostador (F_{enc}) determina-se a partir da pressão (p_{enc}) que este tem que exercer sobre a aba para evitar o engelhamento da aba. Seguindo o mesmo procedimento que se apresentou no problema anterior a pressão a exercer pelo encostador pode ser determinada a partir da seguinte expressão,

$$\begin{aligned}(p_{enc})_1 &= \left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2 + \frac{d}{200\,h}\right]\frac{\sigma_R}{400} \\ &= \left[\left(\frac{1}{0.568}-1\right)^2 + \frac{105}{200\times 1.5}\right]\frac{358}{400} = 0.83\,\text{N/mm}^2\end{aligned} \tag{11.3.14}$$

em que $p_{enc}\,(\text{N/mm}^2)$ é a pressão que o encostador deve exercer, m é o coeficiente de estampagem, $d\,(\text{mm})$ é o diâmetro do cunho, $h\,(\text{mm})$ é a espessura da chapa e $\sigma_R\,(\text{N/mm}^2)$ é a tensão de rotura do material.

Enquanto que a força no encostador será,

$$\begin{aligned}&F_{enc} = p_{enc}\,A_e = p_{enc} \times \frac{\pi}{4}\left(D_0^2 - d_{int}^2\right)^2 \quad \text{com} \quad d_{int} = d + 2j_r + 2r_{cm} \\ &(F_{enc})_1 = p_{enc}\,A_e = 0.83 \times \frac{\pi}{4}\left(185^2 - 126.6^2\right) = 11862.6\,\text{N} \cong 11.9\,\text{kN}\end{aligned} \tag{11.3.15}$$

em que A_e é a área da chapa onde o encostador actua, D_0 é o diâmetro da estampa plana, d_{int} é o diâmetro interior de contacto, d o diâmetro do cunho, j_r é a folga radial e r_{cm} é o raio do canto da matriz.

No que se refere à força máxima de estampagem $(F_{max})_e$, sabe-se que o valor máximo pode ser calculado através de,

$$F_{max} = Q_f\,\pi\,d_m\,h\,\sigma_R \tag{11.3.16}$$

em que d_m é o diâmetro médio da parede da taça, h é a espessura da taça, σ_R é a tensão de rotura do material e Q_f é um factor correctivo da tensão de rotura que depende da relação de estampagem da operação, m.

Consultando a tabela do problema 11.2 tira-se que o factor correctivo da tensão de rotura é $Q_f = 0.95$, para uma relação de estampagem de $m = 0.568$, sendo então a força máxima de estampagem dada por,

$$(F_{max})_{e1} = 0.95 \times \pi \times 105 \times 1.5 \times 358 = 168281.8\ \text{N} \cong 168.3\,\text{kN} \tag{11.3.17}$$

Sendo a potência necessária ao fabrico da 1ª fase,

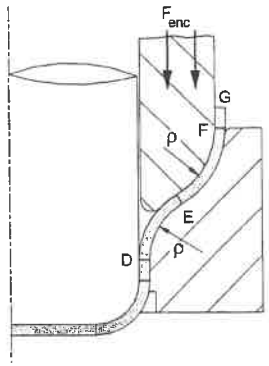
$$(P_{max})_{e1} = (F_{max})_{e1} v = 168281.8 \times 15 \times 10^{-3} = 2524.2\ \text{Nm/s} \cong 2.5\,\text{kW} \tag{11.3.18}$$

2ª Fase de estampagem

Devido à variação de espessura que a aba sofre durante a 1ª fase de estampagem (conforme se viu na alínea anterior) a folga na 2ª fase deve ser superior à da 1ª. Tomando como referência a folga da 1ª fase vai adoptar-se uma folga 5% superior, ou seja,

$$(j_r)_2 = 1.05 \times (j_r)_1 = 1.05 \times 1.8 = 1.89\,\text{mm} \cong 1.9\,\text{mm} \tag{11.3.19}$$

Para determinar o raio do canto da matriz, r_{cm}, tem que se analisar a geometria do encostador com maior detalhe. Para tal, considere-se a figura seguinte onde se apresenta a geometria adoptada para o encostador,



Para o encostador representado na figura anterior o raio do canto da matriz, ρ, será,

$$(r_{cm})_2 = \rho = \frac{d_{i-1} - d_i}{2} - h_0 = \frac{105-80}{2} - 1.5 = 11\text{mm} \qquad (11.3.20)$$

em que d_{i-1} e d_i são, respectivamente, o diâmetro da taça antes de estampar e depois de estampar e h_0 a espessura inicial da estampa.

A força a exercer pelo encostador nesta segunda fase determina-se igualmente a partir da pressão que este tem que exercer sobre a peça para evitar o engelhamento da taça. Contudo, a funcionalidade deste encostador é diferente do da 1ª fase, pois este tem fundamentalmente uma função de guiamento, até porque a zona cilíndrica da taça contraria o fenómeno do engelhamento. Por estas razões é habitual considerar-se nestes casos pressões de encosto mais baixas, variando entre 0.6~1.2 MPa. Então, adoptando $p_{enc} = 0.6\text{MPa}$ a força a exercer pelo encostador nesta 2ª operação será,

$$(F_{enc})_2 = p_{enc}(A_e)_p = p_{enc} \times \frac{\pi}{4}\left(d_{i-1}^2 - d_i^2\right) = 0.6 \times \frac{\pi}{4}\left(105^2 - 80^2\right) = 2179.5\text{N} \cong 2.2\text{kN} \qquad (11.3.21)$$

em que $(A_e)_p$ é a área projectada onde o encostador actua.

Para calcular a força máxima de estampagem $(F_{max})_e$, usa-se a mesma expressão com a qual se determinou a força máxima para a 1ª fase (equação (11.3.16)), porém aplica-se o factor correctivo da tensão de rotura, $Q_f = 1$, uma vez que o material já está encruado por ter sido deformado durante a primeira estampagem. Assim, substituindo valores obtém-se o valor máximo da força da estampagem da 2ªfase,

$$(F_{max})_{e2} = \pi d_m h \sigma_R = \pi \times 80 \times 1.5 \times 358 = 134962.8\text{N} \cong 135\text{kN} \qquad (11.3.22)$$

em que d_m é o diâmetro médio da parede da taça, h é a espessura da taça, σ_R é a tensão de rotura do material.

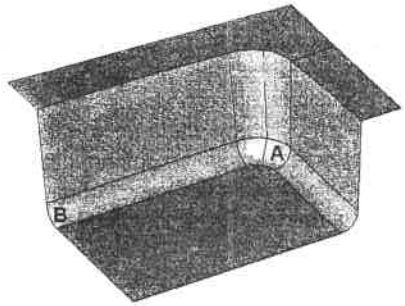
Sendo a potência necessária à operação da 2ª fase,

$$(P_{max})_{e2} = (F_{max})_{e2} v = 134962.8 \times 15 \times 10^{-3} = 2024.4\ \text{Nm/s} \cong 2.0\text{kW} \qquad (11.3.23)$$

Problema 11.4

Considere o fabrico de uma peça de geometria rectangular numa única fase de estampagem. A peça é produzida a partir de chapa de aço de estampagem com 1.5 mm de espessura e apresenta a seguinte lei de comportamento mecânico: $\overline{\sigma} = 520\,\overline{\varepsilon}^{0.14}$ MPa.

Requisitos de fabrico determinam que a redução de espessura na região A da zona do canto e na região B zona do lado (ver figura seguinte) não possa ultrapassar os 14% e 10%, respectivamente. Para efectuar este controlo foi marcada uma rede de círculos de 3 mm na estampa plana e, após efectuada a estampagem, medidos os eixos maior e menor da elipse mais deformada em cada uma das regiões, tendo-se obtido: E1 $(l_1 = 2.9\ \text{mm}; L_1 = 3.3\,\text{mm})$ e E2 $(l_2 = 3.1\ \text{mm}; L_2 = 3.4\,\text{mm})$.



Nestas condições,

a) Represente o plano das extensões principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, discuta o conceito de curva limite de estampagem (CLE). Neste mesmo plano represente as trajectórias de deformação correspondentes às seguintes solicitações: compressão uniaxial, tracção uniaxial, corte puro, expansão biaxial simétrica e deformação plana. Justifique a construção.

b) No plano das deformações principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, trace as trajectórias de deformação dos pontos correspondentes às elipses E1 e E2. Indique, justificando, a localização de cada um dos pontos na peça (canto/lado).

c) Verifique se os requisitos de projecto para a redução de espessura estão assegurados.

d) Calcule o valor das tensões principais que actuam em cada um dos pontos analisados.

Resolução

a) No plano das extensões principais $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ representam-se a extensão principal máxima e mínima que surgem na superfície das chapas em resultado de terem sido submetidas a operações de deformação plástica. Por convenção a maior e a menor extensão principal no plano da chapa designam-se por ε_1 e ε_2, respectivamente.

A curva limite de enformabilidade separa o plano das extensões principais em duas zonas distintas; a zona de segurança (zona de trabalho), que se situa abaixo da curva limite de enformabilidade e a zona perigosa, que se localiza acima da curva limite de enformabilidade. Os limites de enformabilidade para a generalidade das operações de estampagem resultam do aparecimento de estricções localizadas a partir das quais se desenvolvem as fracturas. A determinação destas curvas pode ser feita através de modelos teóricos ou de ensaios experimentais. A determinação experimental da curva limite de estampagem é efectuada a partir de ensaios laboratoriais concebidos de modo a obter os valores das extensões principais máxima, ε_1, e mínima, ε_2, no plano da chapa no instante correspondente ao início de estricção localizada.

Durante a deformação plástica da chapa cada ponto material (considerado no centro de cada círculo da grelha) tem uma trajectória de deformação que pode ser visualizada no plano das extensões principais e que pode ser traçada quantificando, a cada instante da deformação o valor do quociente entre os incrementos de extensão principais no plano da chapa $d\varepsilon_1$ e $d\varepsilon_2$ do seguinte modo,

$$\beta = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} \tag{11.4.1}$$

A generalidade dos processos tecnológicos de deformação plástica de chapa envolve trajectórias de deformação que se localizam no 2º e no 3º octante do plano das extensões principais.

Para representar as trajectórias de deformação correspondentes às solicitações enunciadas é necessário analisar os respectivos estados de deformação. O valor associado à trajectória de deformação em cada instante, β, pode determinar-se a partir das equações constitutivas de Levy-Mises conhecendo as tensões actuantes. Tendo presente que sob um carregamento proporcional, i.e., quando o quociente das tensões principais é constante,

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = C_1 \tag{11.4.2}$$

a trajectória de deformação do ponto material é linear ($\beta = C_2$) e por isso pode ser quantificada através do quociente entre as extensões principais do seguinte modo,

$$\beta = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = C_2 \tag{11.4.3}$$

Consideremos então cada uma das solicitações enunciadas, não esquecendo que se trata de uma operação de deformação plástica de chapa em condições de tensão plana (a tensão perpendicular ao plano da chapa é $\sigma_3 = 0$) para a qual por convenção se consideram direcções principais 1 e 2 as direcções segundo as quais se verificam a maior e a menor extensão principal no plano da chapa.

Compressão uniaxial, $\beta = -2$

Em condições de compressão uniaxial no plano da chapa as tensões principais que actuam são $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_2 = -\sigma$ ($\alpha = \sigma_2/\sigma_1 = -\infty$). De acordo com as equações constitutivas de Levy-Mises, o quociente entre as extensões principais no plano da chapa vem,

$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2 - \dfrac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]}{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]} = \frac{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[-\sigma - \dfrac{1}{2}(0+0)\right]}{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[0 - \dfrac{1}{2}(-\sigma+0)\right]} = \frac{-\sigma}{\frac{1}{2}\sigma} = -2 \tag{11.4.4}$$

Corte puro, $\beta = -1$

Em condições de corte puro no plano da chapa as tensões principais que actuam são $\sigma_1 = \sigma$ e $\sigma_2 = -\sigma$ ($\alpha = \sigma_2/\sigma_1 = -1$). Tomando as equações constitutivas de Levy-Mises, o quociente entre as extensões principais no plano da chapa vem,

$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2 - \dfrac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]}{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]} = \frac{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[-\sigma - \dfrac{1}{2}(\sigma+0)\right]}{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma - \dfrac{1}{2}(-\sigma+0)\right]} = \frac{-\frac{3}{2}\sigma}{\frac{3}{2}\sigma} = -1 \tag{11.4.5}$$

Tracção uniaxial, $\beta = -1/2$

Em condições de tracção uniaxial no plano da chapa as tensões principais que actuam são $\sigma_1 = \sigma$ e $\sigma_2 = 0$ ($\alpha = \sigma_2/\sigma_1 = 0$). Considerando as equações constitutivas de Levy-Mises, o quociente entre as extensões principais no plano da chapa vem,

$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]}{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]} = \frac{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[0 - \frac{1}{2}(\sigma+0)\right]}{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma - \frac{1}{2}(0+0)\right]} = \frac{-\frac{1}{2}\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{2} \qquad (11.4.6)$$

Deformação plana, $\beta = 0$

Em condições de deformação plana, no plano da chapa as extensões principais são $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Aplicando as equações constitutivas de Levy-Mises a este estado de deformação, a relação entre as tensões principais no plano da chapa vem,

$$d\varepsilon_2 = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right] = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1+0) = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_1 \qquad (11.4.7)$$

e o quociente entre as extensões e as tensões principais no plano da chapa vêm,

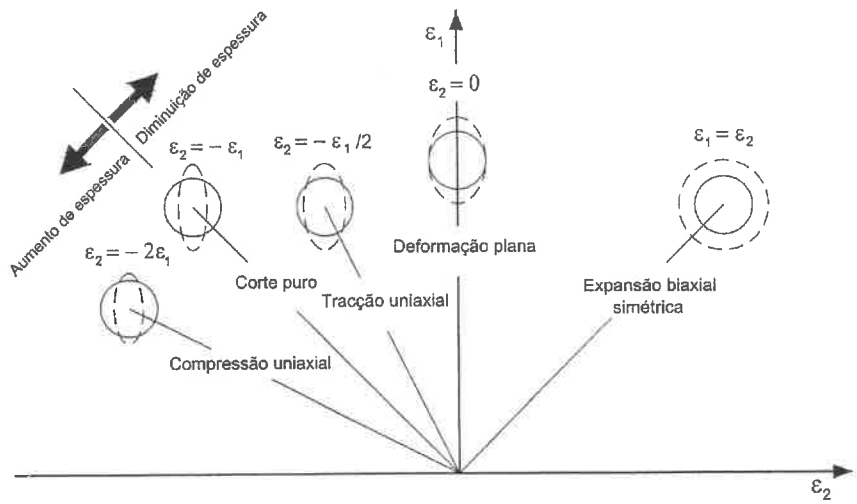
$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \qquad (11.4.8)$$

Expansão biaxial simétrica, $\beta = 1$

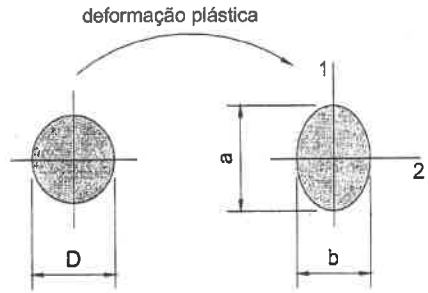
Em condições de expansão biaxial simétrica no plano da chapa as tensões principais que actuam são $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Aplicando as equações constitutivas de Levy-Mises a este estado de tensão, o quociente entre as extensões principais no plano da chapa vem,

$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]}{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]} = \frac{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma - \frac{1}{2}(\sigma+0)\right]}{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma - \frac{1}{2}(\sigma+0)\right]} = \frac{\frac{1}{2}\sigma}{\frac{1}{2}\sigma} = 1 \qquad (11.4.9)$$

Determinadas as relações entre as extensões principais no plano da chapa torna-se agora possível proceder à sua representação plano das extensões principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ conforme ilustra a figura seguinte.



b) A determinação experimental dos valores das extensões principais locais na superfície da chapa a que correspondem as elipses E1 e E2 é efectuada através dos valores das respectivas dimensões na direcção dos eixos maior, a, e menor, b, relativamente ao valor do diâmetro do correspondente círculo antes da deformação plástica, D. Uma vez que cada círculo da grelha de referência após a deformação plástica transforma-se numa elipse, cujas direcções dos eixos maior e menor coincidem com as direcções principais locais, conforme se ilustra na figura seguinte.



Nestas condições, os valores das extensões principais máxima, ε_1, e mínima, ε_2, no plano da chapa, na localização correspondente a cada uma das elipses, serão obtidas a partir da definição de extensão verdadeira, ou seja,

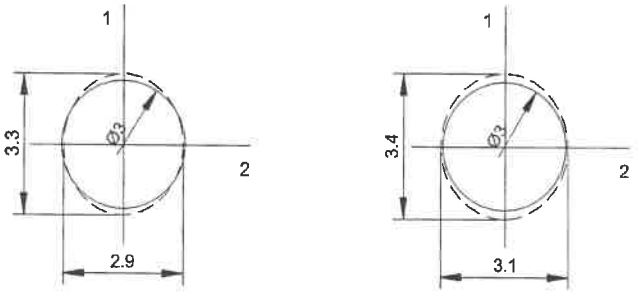
$$\varepsilon_1 = \ln\frac{a}{D} \qquad \varepsilon_2 = \ln\frac{b}{D} \tag{11.4.10}$$

Substituindo valores nesta equação obtêm-se os valores das extensões principais locais associadas às elipses E1 e E2,

$$\text{E1:}\begin{cases}\varepsilon_1 = \ln\dfrac{3.3}{3} = 0.095\\ \varepsilon_2 = \ln\dfrac{2.97}{3} = -0.01\end{cases}$$

$$\text{E2:}\begin{cases}\varepsilon_1 = \ln\dfrac{3.4}{3} = 0.125\\ \varepsilon_2 = \ln\dfrac{3.1}{3} = 0.033\end{cases} \tag{11.4.11}$$

A figura seguinte ilustra a deformação dos círculos iniciais da grelha de referência nas elipses E1 e E2.

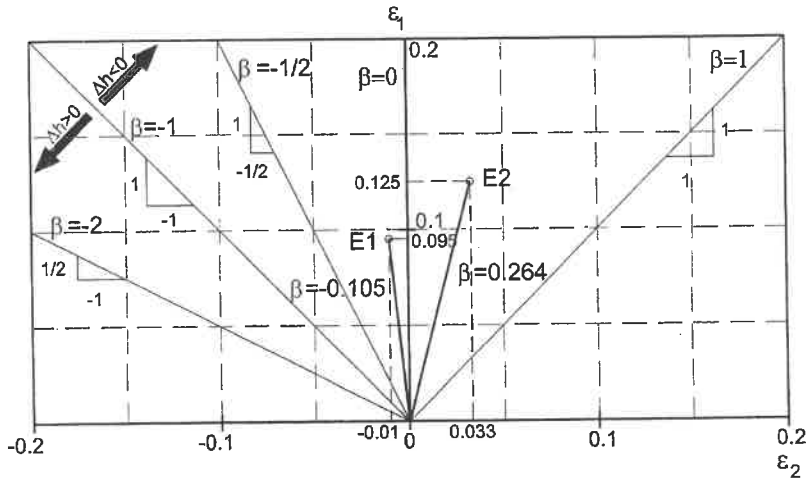


Admitindo que a trajectória de deformação de cada um dos pontos materiais foi linear, de acordo com a equação (11.4.3), o inverso do declive das trajectórias de deformação para cada uma das elipses no plano das extensões principais é,

$$\text{E1:}\quad \beta_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{0.01}{0.095} = -0.105$$

$$\text{E2:}\quad \beta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{0.033}{0.125} = 0.264 \tag{11.4.12}$$

As trajectórias de deformação dos pontos correspondentes às elipses E1 e E2 no plano das extensões principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ encontram-se representadas na figura seguinte. A análise desta figura permite verificar que o material da chapa na zona do cunho onde se situa a elipse E1 registou uma trajectória de deformação no segundo octante do plano das extensões principais muito próxima da deformação plana, enquanto o material da chapa na zona do cunho onde se situa a elipse E2 registou uma trajectória de deformação no primeiro octante do plano das extensões principais, ou seja, em expansão biaxial. De onde se pode concluir que a elipse E1 se situa no lado da peça, a que corresponde a dobragem chapa em condições muito próximas da deformação plana, enquanto que a elipse E2 se situa num canto da peça rectangular onde as trajectórias de deformação são de expansão biaxial, que são características da zona do canto do cunho em operações de estampagem cilíndrica.



O valor final da espessura da chapa nos pontos materiais correspondentes às elipses E1 e E2 determina-se a partir do valor da extensão principal na direcção normal ao plano da chapa, ε_3. Aplicando a condição de incompressibilidade, característica da deformação

plástica dos materiais metálicos, o valor da extensão principal segundo a direcção da espessura vem,

$$\begin{aligned} &\text{E1:}\quad \varepsilon_3 = -(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = -(0.095-0.01) = -0.085 \\ &\text{E2:}\quad \varepsilon_3 = -(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = -(0.125+0.033) = -0.158 \end{aligned} \qquad (11.4.13)$$

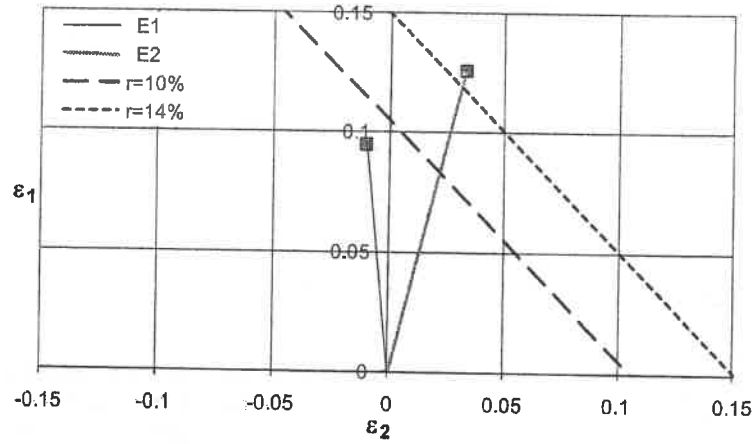
a que correspondem as seguintes espessuras da chapa,

$$\begin{aligned} &\text{E1:}\quad h_1 = h_0 \exp(-\varepsilon_3) = 1.5\exp(-0.085) = 1.38 \text{ mm} \\ &\text{E2:}\quad h_2 = 1.5\exp(-0.158) = 1.28 \text{ mm} \end{aligned} \qquad (11.4.14)$$

Então, a redução de espessura da chapa nos pontos materiais correspondentes às elipses E1 e E2 será,

$$\begin{aligned} &\text{E1:}\quad r_1 = \frac{h_0-h}{h_0}\times 100 = \frac{1.5-1.38}{1.5}\times 100 = 8\% \\ &\text{E2:}\quad r_2 = \frac{h_0-h}{h_0}\times 100 = \frac{1.5-1.28}{1.5}\times 100 = 14.7\% \end{aligned} \qquad (11.4.15)$$

Na figura seguinte confrontam-se as trajectórias de deformação de E1 e E2 com as rectas correspondentes aos limites de redução de espessura da chapa de 14% e 10%.



Conclui-se, assim, que de acordo com os requisitos de projecto para a redução de espessura, na região do canto do cunho, na zona do canto da peça, a taça sofreu uma redução de espessura inadmissível.

Para traçar os limites de redução de espessura no plano das extensões principais, conforme se fez na figura anterior, começa por se definir a extensão verdadeira segundo a espessura em função da redução de espessura, r, ou seja,

$$\varepsilon_3 = \ln\frac{h}{h_0} = \ln(1-r) \qquad (11.4.16)$$

Substituindo na condição de incompressibilidade a equação (11.4.16) chega-se à expressão que relaciona as extensões principais no plano da chapa com a redução de espessura,

$$\varepsilon_1 = -(\varepsilon_2 + \ln(1-r)) \qquad (11.4.17)$$

c) A determinação do quociente entre as tensões principais no plano da chapa, $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$, faz-se através das equações constitutivas de Levy-Mises, considerando que a trajectória de deformação dos pontos materiais correspondentes às duas elipses foi linear, ou seja, que o quociente entre as extensões principais no plano da chapa se manteve constante durante a deformação plástica, ou seja,

$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_2 - \dfrac{1}{2}(\sigma_1+0)\right]}{\dfrac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\left[\sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2+0)\right]} = \frac{\sigma_2 - \dfrac{1}{2}\sigma_1}{\sigma_1 - \dfrac{1}{2}\sigma_2} \qquad (11.4.18)$$

A manipulação da equação anterior permite reescrevê-la em função do quociente entre as tensões principais, α, que quantifica a trajectória de carregamento (equação (11.4.2)),

$$\beta = \frac{2\alpha-1}{2-\alpha} \qquad (11.4.19)$$

ou a trajectória de carregamento em função da trajectória de deformação,

$$\alpha = \frac{2\beta+1}{2+\beta} \qquad (11.4.20)$$

Substituindo na equação anterior os valores de β determinados para cada uma das elipses (equação (11.4.12)) obtêm-se os seguintes valores para o quociente entre as tensões principais no plano da chapa, α, nas respectivas elipses,

$$\begin{aligned} &\text{E1:}\quad \alpha_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2\times(-0.105)+1}{2+(-0.105)} = 0.417 \\ &\text{E2:}\quad \alpha_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2\times(0.262)+1}{2+0.262} = 0.670 \end{aligned} \tag{11.4.21}$$

Tomando a definição de tensão efectiva de von Mises e simplificando-o para condições de tensão plana, com $\sigma_3 = 0$, obtém-se,

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1)^2+(\sigma_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11.4.22}$$

Escrevendo a expressão anterior em função da trajectória de carregamento, α, vem,

$$\sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}}{\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{1/2}} \tag{11.4.23}$$

Pelo que para determinar a maior tensão principal num ponto material do plano da chapa, σ_1, é necessário conhecer o valor da tensão efectiva, $\bar{\sigma}$. A determinação deste valor faz-se recorrendo à lei de comportamento mecânico do material, através do correspondente valor de extensão efectiva, $\bar{\varepsilon}$, o qual é dado por,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{E1:}\ \bar{\varepsilon}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(0.095-(-0.01))^2+(-0.01-(-0.085))^2+(0.095-(-0.085))^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 0.104 \end{aligned} \tag{11.4.24}$$

$$\begin{aligned} \text{E2:}\ \bar{\varepsilon}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(0.125-(0.033))^2+(0.033-(-0.158))^2+(0.125-(-0.158))^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 0.167 \end{aligned}$$

A que correspondem os seguintes valores de tensão efectiva, considerando a lei de comportamento mecânico do material, $\bar{\sigma} = 520\,\bar{\varepsilon}^{0.14}$ MPa,

$$\begin{aligned} &\text{E1:}\quad \bar{\sigma}_1 = 520\times 0.104^{0.14} = 378.78\,\text{MPa} \\ &\text{E2:}\quad \bar{\sigma}_2 = 520\times 0.167^{0.14} = 404.64\,\text{MPa} \end{aligned} \tag{11.4.25}$$

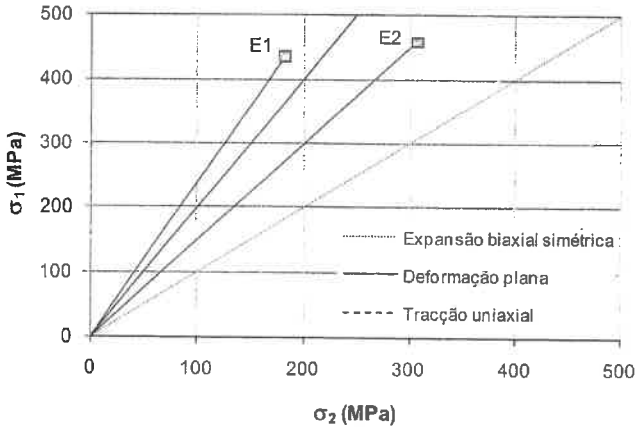
Substituindo estes valores de tensão efectiva e os valores de α, dados pelas equações (11.4.25) e (11.4.21), respectivamente, nas equações (11.4.23) e (11.4.2) obtêm-se os valores das tensões principais no plano da chapa que actuam nos pontos materiais correspondentes às elipses E1 e E2,

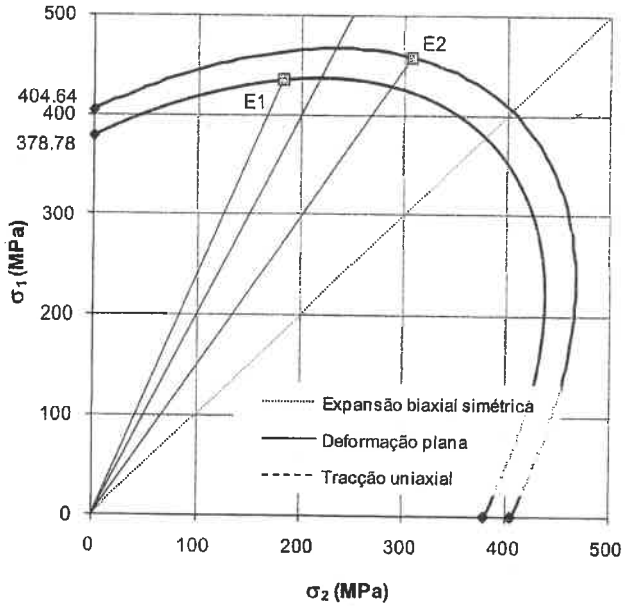
$$\text{E1:}\quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{378.78}{\left(1-0.417+0.417^2\right)^{1/2}} = 435.4\ \text{MPa} \\ \sigma_2 = \alpha\,\sigma_1 = 0.417\times 435.4 = 181{,}6\ \text{MPa} \end{cases}$$

$$\text{E2:}\quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{404.64}{\left(1-0.67+0.67^2\right)^{1/2}} = 458.5\ \text{MPa} \\ \sigma_2 = \alpha\,\sigma_1 = 0.67\times 458.5 = 302.7\ \text{MPa} \end{cases} \tag{11.4.26}$$

Por analogia com o plano das extensões principais, é também possível representar as tensões principais que se registam durante a deformação plástica no plano da chapa e as respectivas trajectórias de carregamento num plano de tensões principais (σ_1,σ_2), cujos eixos das abcissas e das ordenadas correspondem à tensão principal mínima e máxima, respectivamente. Seguindo este conceito, considerando os resultados anteriores é possível representar as trajectórias de carregamento dos pontos materiais correspondentes às elipses E1 e E2 no plano das tensões principais (σ_1,σ_2), conforme ilustra na figura seguinte, onde se assinalam igualmente as trajectórias de carregamento correspondentes a estados de expansão biaxial, deformação plana e tracção uniaxial.

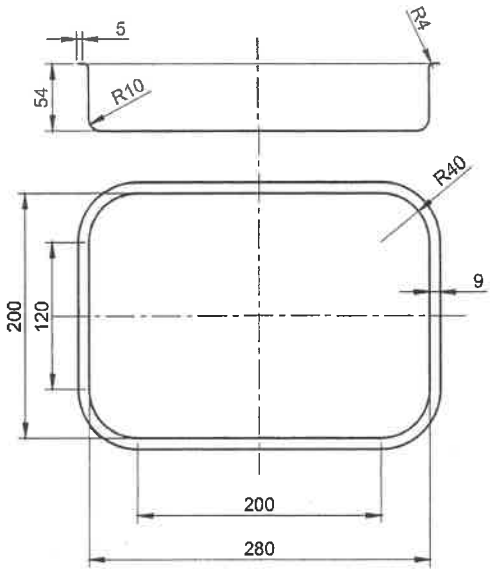
Importa salientar que este plano, não é mais do que o plano $\sigma_k = \sigma_3 = 0$ do espaço das tensões principais (de Haig-Westergaard) com $\sigma_i = \sigma_2$ e $\sigma_j = \sigma_1$, como ilustra a próxima figura. Em conformidade, as tensões principais no final da operação nos pontos materiais relativos às elipses E1 e E2 situam-se sobre as curvas limite de elasticidade do critério de plasticidade de von Mises respectivas, considerando o encruamento expresso na equação (11.4.25).

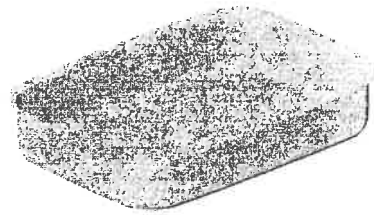




Problema 11.5

Pretende-se fabricar por estampagem a taça de geometria rectangular, com uma espessura de 1 mm e as dimensões representadas na figura seguinte. O material da peça é aço inoxidável AISI 304, cujas propriedades mecânicas estão especificadas na tabela seguinte.





Aço Inoxidável AISI 304:

E (GPa)	ν	$\sigma_{0.2}$ (MPa)	σ_R (MPa)	e_f (50mm) (%)
200	0.29	215	505	70

Para estas condições:

a) Determine a geometria e dimensões da estampa plana teórica.

b) Proponha uma estampa plana devidamente corrigida.

c) Determine o número de fases de estampagem necessárias ao fabrico da peça.

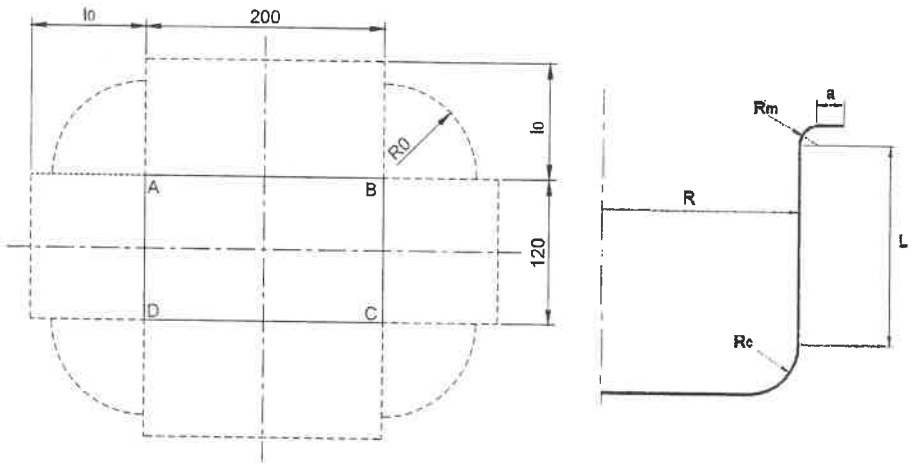
d) Calcule a força que deve ser aplicada pelo encostador.

e) Calcule a força máxima necessária à operação de estampagem.

Resolução

a) Para determinar as dimensões da estampa plana segue-se o princípio da conservação de volume característico da deformação plástica de materiais metálicos. Se adicionalmente se admitir que a espessura média da peça depois de enformada é igual à da estampa plana, o cálculo da estampa plana resume-se a igualar as áreas entre a geometria inicial e a final. Estabelecidas as regras para o cálculo dimensional, falta definir a geometria a adoptar para a estampa plana teórica. Fazendo uma decomposição da geometria da peça rectangular, pode considerar-se que os quatro cantos constituem uma taça cilíndrica, enquanto que os lados formam uma peça rectangular aberta nos cantos, cuja forma pode ser obtida através de quatro dobragens localizadas na região de concordância entre o fundo e a parede vertical.

Seguindo esta metodologia de cálculo pode definir-se a geometria da estampa plana para a peça rectangular, começando por se traçar a zona do fundo com as dimensões das paredes laterais, 200x120 (zona ABCD, na figura seguinte (esquerda)).



Para calcular as dimensões da zona dos cantos considera-se a igualdade da áreas, obtendo-se (nomenclatura definida na figura anterior (direita)),

$$\pi R_0^2 = A_{cantos} = A_f + A_c + A_p + A_m + A_a \qquad (11.5.1)$$

em que as diferentes áreas que constituem a peça são dadas por,

$$A_f = \pi(R-R_c)^2 = \pi\times(40-10)^2 = 2827.43\,\text{mm}^2$$

$$A_c = \pi^2 R_c\left(R-R_c+\frac{2}{\pi}R_c\right) = \pi^2\times10\times\left(40-10+\frac{2}{\pi}\times10\right) = 3589.20\,\text{mm}^2$$

$$A_p = 2\pi RL = 2\times\pi\times40\times40 = 10053.10\,\text{mm}^2$$

$$A_m = \pi^2 R_m\left(R+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)R_m\right) = \pi^2\times4\times\left(40+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\times4\right) = 1489.0\,\text{mm}^2 \qquad (11.5.2)$$

$$A_a = \pi\left[(R+R_m+a)^2-(R+R_m)^2\right]$$
$$= \pi\times\left[(40+4+5)^2-(40+4)^2\right] = 1460.84\,\text{mm}^2$$

$$A_{cantos} = 19419.57\,\text{mm}^2$$

Substituindo-se este valor na equação (11.5.1), obtém-se,

$$R_0 = \sqrt{\frac{A_{cantos}}{\pi}} = \sqrt{\frac{19419.57}{\pi}} = 78.62\,\text{mm}^2 \qquad (11.5.3)$$

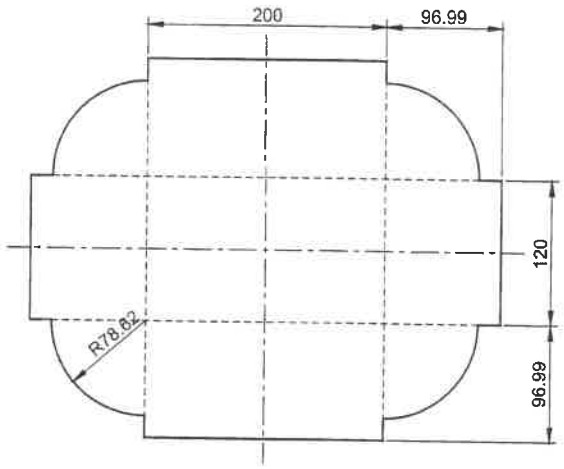
Para calcular a dimensão de cada uma das regiões dos lados da estampa plana admite-se que estas zonas podem ser obtidas a partir da planificação dos lados da peça. Então, admitindo que a linha que não varia de comprimento nas zonas de dobragem é a linha média, a dimensão dos lados na estampa plana será dada por (ver figura anterior),

$$l_0 = (R-R_c)+\frac{\pi}{2}R_c+L+\frac{\pi}{2}R_m+a$$
$$= (40-10)+\frac{\pi}{2}\times10+40+\frac{\pi}{2}\times4+5 = 96.99\,\text{mm}^2 \qquad (11.5.4)$$

Deste modo, a estampa plana teórica terá a geometria e dimensões que se apresenta na figura seguinte. Complementarmente pode determinar-se a área total da estampa plana, a qual vem dada por,

$$A_{ep} = A_{cantos} + A_{lados} + A_{fundo} = A_{cantos} + 2l_0\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) + \left(\overline{AB} \times \overline{BC}\right) \tag{11.5.5}$$

$$= 19419.57 + (2 \times 96.99 * 320) + (200 \times 120) = 105493.17\ \text{mm}^2$$



b) A necessidade de corrigir a geometria teórica da estampa plana provém fundamentalmente do facto de se ter calculado as suas dimensões separando a zona dos cantos da zona dos lados e, de facto, durante a deformação da chapa existir uma interacção entre estas duas regiões, consequência de cada uma delas apresentarem modos de deformação diferentes. De facto, na zona de transição entre o canto e o lado, durante a deformação irão surgir tensões de corte que farão com que a região do lado se eleve e a do canto fique com uma dimensão inferior à desejada, consequência do constrangimento imposto pelo lado.

Para compensar este efeito a AWF (Comité Alemão para o estudo de sistemas económicos de fabricação) recomenda, através do procedimento AWF 5791, um método de correcção para a estampa plana teórica que consiste em aumentar o material na zona dos cantos e reduzir na zona dos lados, mantendo constante a área total da estampa plana. Esta correcção é feita a partir de um factor de correcção Q_r que permite aumentar o raio da estampa, R_0, em função do raio do canto da taça, R, sendo dado por,

$$R_1 = Q_r R_0 \qquad \text{com} \qquad Q_r = 0.074\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + 0.0982 \tag{11.5.6}$$

Então, para manter a área total da estampa plana, a área que foi acrescentada à zona do canto tem que ser retirada das zonas dos lados. Notando que a área retirada aos cantos é dada por,

$$\Delta A_{cantos} = \pi R_0^2\left(Q_r^2 - 1\right) \tag{11.5.7}$$

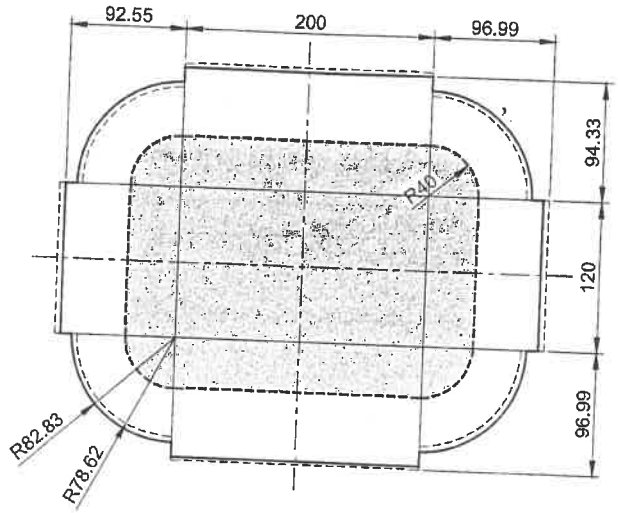
o comprimento corrigido dos lados, admitindo que esta área é diluída igualmente pelos 4 lados, vem dado por,

$$\begin{aligned} 2a\left(l_0 - l_a\right) &= \frac{\Delta A_{cantos}}{2} \quad \Rightarrow \quad l_a = l_0 - \frac{\pi R_0\left(Q_r^2 - 1\right)}{2a} \\ 2b\left(l_0 - l_b\right) &= \frac{\Delta A_{cantos}}{2} \quad \Rightarrow \quad l_b = l_0 - \frac{\pi R_0\left(Q_r^2 - 1\right)}{2b} \end{aligned} \tag{11.5.8}$$

Substituindo valores nas equações (11.5.6) e (11.5.8), obtém-se,

$$\begin{aligned} R_1 &= Q_r R_0 = 1.053 \times 79.82 = 82.83\,\text{mm} \\ l_a &= l_0 - \frac{\pi R_0\left(Q_r^2 - 1\right)}{2a} = 96.99 - \frac{\pi \times 79.82 \times \left(1.053^2 - 1\right)}{2 \times 200} = 94.33\ \text{mm} \\ l_b &= l_0 - \frac{\pi R_0\left(Q_r^2 - 1\right)}{2b} = 96.99 - \frac{\pi \times 79.82 \times \left(1.053^2 - 1\right)}{2 \times 120} = 92.55\ \text{mm} \end{aligned} \tag{11.5.9}$$

Sendo a geometria da estampa plana a que se mostra na figura seguinte.



Analisando a estampa plana resultante da anterior correcção dimensional (figura anterior), constata-se que a zona de transição entre os cantos e os lados apresenta uma descontinuidade geométrica que se irá traduzir num defeito na peça final. Por este motivo é habitual suavizar esta região de transição da estampa plana. Para decidir sobre o tipo de traçado correctivo que é possível realizar nesta região é necessário comparar a área da zona circular (A_c) do canto com a área da zona triangular definida pelas abas (A_t), ou seja,

$$\text{Se} \quad A_c \le A_t \quad \Rightarrow \text{Traçado simples}$$

$$\text{Se} \quad A_c > A_t \quad \Rightarrow \text{Traçado complexo}$$

$$A_c = \frac{\pi}{4} R_1^2 = \frac{\pi}{4} \times 82.83^2 = 5388.5\,\text{mm}^2 \qquad (11.5.10)$$

$$A_t = \frac{l_a l_b}{2} = \frac{94.33 \times 92.55}{2} = 4365.1\,\text{mm}^2$$

Em face do resultado anterior conclui-se que neste caso a correcção da estampa plana deve ser efectuada através de um traçado complexo, ou seja, a compensação entre o lado e o canto não pode ser feita através de um corte direito. De novo, a regra a seguir para realizar esta compensação é a da conservação de área da estampa plana; a área retirada deve ser igual à área acrescentada. Quanto à geometria a adoptar para a correcção não

existem regras específicas, sendo, na generalidade dos casos, obtidas por processos de tentativa e erro, actualmente muito facilitadas com o recurso a sistemas de CAD. Não obstante, procurou-se neste caso de estudo definir um processo semi-analítico que pode ser usado em muitos casos.

Em seguida apresenta-se a metodologia estabelecida para este cálculo, o qual deve ser usado com o recurso a uma folha de cálculo:

1. Estabelece-se um ângulo α na zona circular. A partir do ponto de intersecção na zona circular traça-se uma tangente até encontrar a zona de transição do lado (zona excedente do lado), a qual ficará dividida em duas partes. A dimensão da zona inferior, será designada por Δ e irá servir para controlar o processo, vindo dada por,

$$\Delta = \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) R_1 \qquad (11.5.11)$$

Então, a área que irá ser acrescentada à estampa plana será dada por,

$$A_{acr} = \frac{R_1^2 (\text{tg}\,\alpha - \alpha)}{2} \qquad (11.5.12)$$

2. Para definir a geometria na zona das abas e, desse modo a área que vai ser retirada, vai calcular-se o raio do arco de círculo que é em simultâneo tangente ao ponto de intersecção definido anteriormente (Δ) e à parte recta do lado, e que defina uma área igual à que foi acrescentada (A_{acr}), sendo o seu valor dado por,

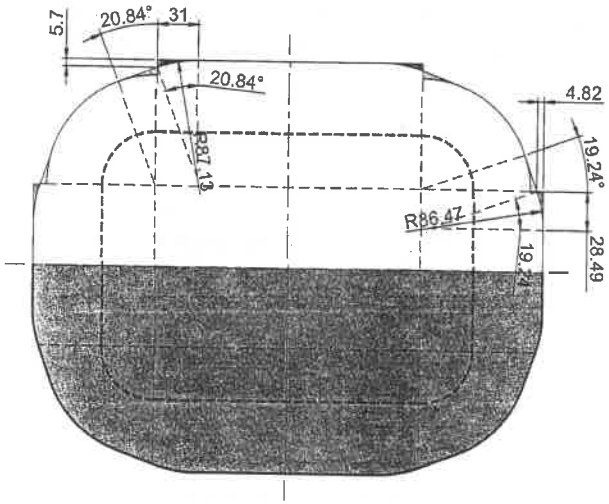
$$R_{cd} = \sqrt{\frac{2A_{acr}}{(2\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \alpha)}} \qquad (11.5.13)$$

3. A solução será encontrada recorrendo a um processo iterativo, no qual se vai sucessivamente modificando o valor do ângulo α até que o valor da variável Δ, que para a região onde se retira área é dada por,

$$\Delta = (l_{a/b} - R_1) - R_{cd}(1 - \cos\alpha) \qquad (11.5.14)$$

iguale o valor obtido na região onde se acrescentou área (equação (11.5.11)).

Aplicada esta metodologia de correcção ao problema em estudo, obteve-se a estampa plana que se apresenta na figura seguinte.



c) Para determinar o número de fases necessárias ao fabrico da taça rectangular é necessário conhecer o coeficiente limite de estampagem (M_R) e compará-lo com o coeficiente de estampagem da operação (m_R). A tabela seguinte apresenta o coeficiente limite de estampagem para a primeira fase da estampagem múltipla em função do tipo de material.

Material	M_R
Aço para estampagem	0.37
Aço para estampagem profunda	0.36
Aço para carroçaria automóvel	0.35
Aço inoxidável	0.40
Folha de flandres	0.33
Cobre	0.32
Latão	0.31
Zinco	0.38
Alumínio	0.33
Duralumínio	0.34
Níquel, Monel, Inconel	0.34

Da consulta da tabela anterior constata-se que o coeficiente limite de estampagem para o aço inoxidável que deve ser aplicado para a 1ª fase de estampagem é igual a

$M_R = 0.4$. No entanto, este coeficiente limite de estampagem quando aplicado à 1ª fase do sistema recto da estampagem múltipla sofre um agravamento de 20% devido à maior severidade da operação relativamente à do sistema arqueado. Uma vez que a taça que se pretende produzir apresenta paredes direitas (tal como no sistema recto) o coeficiente limite de estampagem a usar deverá ser $M_R = 1.2 \times 0.4 = 0.48$.

Determinado o valor do coeficiente limite de estampagem (M_R) torna-se agora necessário compará-lo com o coeficiente de estampagem da operação (m_R), ou seja,

$$m_R = \frac{R}{R_1} = \frac{40}{82.83} = 0.483 > M_R = 0.48 \qquad (11.5.15)$$

Deste modo, verifica-se que a taça pode ser produzida numa única fase de estampagem tendo, no entanto, em atenção a proximidade entre os coeficientes de estampagem da operação e o valor limite. A este propósito convém referir que esta verificação não deixa de ter um carácter indicativo, na medida em que a operação de estampagem rectangular depende de outras variáveis determinantes para a severidade da operação que não são contabilizadas na determinação do coeficiente limite de estampagem e das quais se podem destacar; as de natureza dimensional, como sejam a espessura da chapa, a relação entre o raio do canto e o comprimento do lado menor da taça e as de cariz operacional, como sejam a pressão no encostador, os raios dos cantos da matriz e do cunho, a lubrificação, apenas para citar os mais importantes.

d) Para estimar o valor da força a aplicar pelo encostador é necessário conhecer-se a pressão nominal de encosto, p_{enc}, adequada às características do material que se vai estampar. Existem algumas regras empíricas para determinar o valor p_{enc}, por exemplo, usando a expressão proposta por Dietrich, obtém-se,

$$p_{enc} = \left[\left(\frac{1}{m_R} - 1\right)^2 + \frac{R}{100h}\right]\frac{\sigma_R}{400} = \left[\left(\frac{1}{0.483} - 1\right)^2 + \frac{40}{100 \times 1}\right]\frac{505}{400} = 1.95\,\text{MPa} \qquad (11.5.16)$$

Outra possibilidade é a de determinar a pressão de encosto apenas a partir das características mecânicas do material, ou seja,

$$p_{enc} = (0.2\ a\ 0.5\%)(\sigma_e + \sigma_R) = (0.002\ a\ 0.005)(215 + 5005) = 1.4\ a\ 3.6\,\text{MPa} \qquad (11.5.17)$$

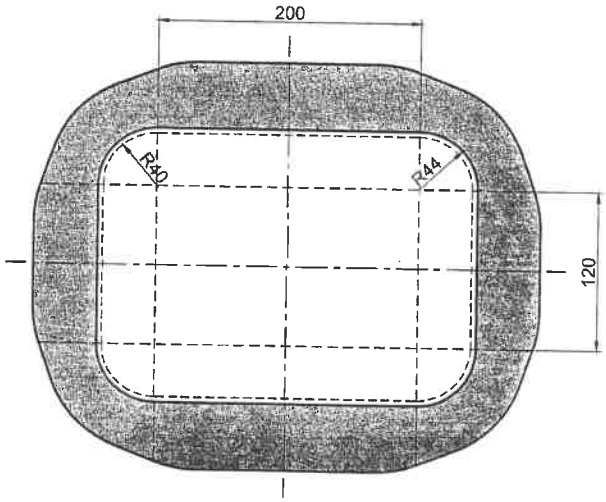
Em face dos valores obtidos anteriormente adopta-se para pressão de encosto $p_{enc} = 2$ MPa.

Torna-se agora necessário conhecer a área da estampa plana onde o encostador actua. Para tal considere-se a figura seguinte, na qual se apresenta a sombreado a área de contacto entre o encostador e a estampa plana, a qual é delimitada exteriormente pelo contorno da estampa e interiormente pela área projectada da peça, compensada com o raio do canto da matriz. Uma vez que a área total da estampa plana já foi calculada anteriormente, equação (11.5.5), $A_{ep} = 105493.17\,\text{mm}^2$, a área de contacto A_c virá,

$$\begin{aligned} A_c &= A_{ep} - \left[\pi(R + r_{cm})^2 + ab + 2(R + r_{cm})(a + b)\right] \\ &= 105493.17 - \left[\pi \times (40 + 4)^2 + (120 \times 200) + 2 \times (40 + 4)(200 + 120)\right] \\ &= 47251.0\,\text{mm}^2 \end{aligned} \qquad (11.5.18)$$

Nestas condições, a força a exercer pelo encostador será dada por,

$$F_{enc} = p_{enc} A_c = 2 \times 47251.0 = 94502\,\text{N} \cong 95\,\text{kN} \qquad (11.5.19)$$



e) O valor da força máxima de estampagem pode ser estimado de um modo expedito através da expressão de natureza experimental proposta por R. Martin, na qual considera que a força no cunho depende da deformação das paredes laterais, efectuada fundamentalmente por processos de dobragem com forças de atrito, e da região dos cantos onde o nível das tensões desenvolvidas na chapa é mais elevado. Deste modo, a

expressão proposta para o cálculo da força máxima na estampagem rectangular é a seguinte,

$$F_{est} = \sigma_R h \left(2\,C_1 \pi R + C_2 L\right) \qquad (11.5.20)$$

em que σ_R é a tensão de rotura do material, h a espessura da chapa e R o raio de canto da taça rectangular. A constante C_1 variando entre 0.5 para peças pouco profundas, até 2 para taças em que a profundidade atinja 5 a 6 vezes o raio de canto (R). Por seu lado, a constante C_2 tipicamente deverá ser 0.2 para raios do cunho e da matriz elevados, com folga elevada e sem encostador, 0.3 a 0.6 para condições normais de escoamento, com pressões nominais do encostador e no máximo 1 para os casos em que o escoamento do material é difícil, seja pelos valores da folga, do raio do canto da matriz ou da pressão no encostador.

Aplicando a equação (11.5.20) ao problema em análise, obtém-se para a força máxima de estampagem,

$$(F_{max})_{est} = 505 \times 1 \times (2 \times 0.5 \times \pi \times 40 + 0.4 \times 640) = 192.7\,\text{kN} \qquad (11.5.21)$$

Alternativamente a força máxima de estampagem pode ser estimada adoptando uma metodologia teórica similar à que foi usada na determinação da geometria da estampa plana teórica. Deste modo, a força de estampagem será obtida somando a força necessária para formar os lados com a força de estampagem dos cantos.

A força máxima para estampar os cantos, considerando a estampagem cilíndrica equivalente, será dada por,

$$(F_{max})_{cil} = 2\pi h R\,\sigma_R \qquad (11.5.22)$$

Por seu lado, a determinação da força necessária à formação dos lados é composta pela força das dobragens em U que surgem no canto do cunho e pela força das dobragens e desdobragens que se desenvolvem de um modo contínuo no canto da matriz e nas caneluras, na eventualidade destas existirem.

A força máxima necessária para realizar as dobragens em U dos dois lados é, como se sabe, dada por,

$$(F_{max})_{2U} = \sigma_R (a + b) \frac{h^2}{r_{cm} + j + r_{cc}} \qquad (11.5.23)$$

em que σ_R é a tensão de rotura do material, a e b respectivamente o comprimento do lado maior e menor, h a espessura da chapa, j a folga entre o cunho e a matriz e r_{cm} e r_{cc} respectivamente o raio do canto da matriz e do cunho.

No que se refere à força de dobragem/desdobragem no canto da matriz/caneluras o valor de força necessário à realização de cada uma delas pode ser calculado através de,

$$\Delta F_d = \sigma_R \frac{\ell h^2}{4}\left[1-\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_e}\right)^2\right]\frac{1}{r_{cm}} \qquad (11.5.24)$$

em que σ_R é a tensão de rotura do material, ℓ o comprimento da zona dobrada, h a espessura da chapa, (σ_r/σ_e) a relação entre a tensão radial aplicada antes da dobragem e a tensão limite de elasticidade do material e r_{cm} o raio do canto da matriz.

Admitindo-se que $(\sigma_r/\sigma_e)\cong 0.5$ e notando que na região do canto da matriz existe uma dobragem e uma desdobragem, a força total necessária às dobragens contínuas vem dada por,

$$F_d = \frac{3(a+b)h^2}{4}\frac{\sigma_R}{r_{cm}} \qquad (11.5.25)$$

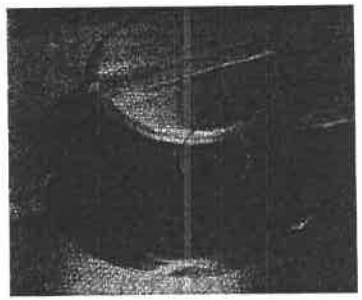
Nestas condições, admitindo que a folga entre o cunho e a matriz é $j = 1.2h$, a força máxima para a estampagem rectangular, será dada por,

$$\begin{aligned}(F_{max})_{est} &= \sigma_R\left[2\pi hR + (a+b)\frac{h^2}{r_{cm}+j+r_{cc}} + \frac{3(a+b)h^2}{4}\frac{1}{r_{cm}}\right] \\ &= 505\times\left[2\times\pi\times 1\times 40 + \frac{(200+120)\times 1^2}{(4+1.2+10)} + \frac{3\times(200+120)\times 1^2}{4\times 4}\right] \\ &= 167.9\,\text{kN}\end{aligned} \qquad (11.5.26)$$

Valor que difere apenas em cerca de 12.9% do obtido através da expressão de natureza experimental proposta por R. Martin, equação (11.5.21).

Problema 11.6

Considere a operação de estampagem incremental de uma chapa metálica de alumínio AA1050-H111, com 1.5 mm de espessura, que se encontra representada na figura. O comportamento mecânico do material da chapa pode ser aproximado por intermédio da seguinte equação tensão-extensão $\overline{\sigma} = 140\overline{\varepsilon}^{0.04}$ MPa. Antes de proceder à deformação plástica a superfície da chapa foi marcada com uma grelha de círculos com 2 mm de diâmetro.



No final da deformação plástica da chapa verificou-se a ocorrência da fissura que se encontra assinalada na figura tendo, nessa região, os círculos transformaram-se em elipses com os eixos maior e menor respectivamente iguais 6.1 mm e 2.0 mm.

Nestas condições, para a região da peça onde surge a fissura,

a) Determine as extensões principais ε_1 e ε_2 na superfície da chapa e represente a respectiva trajectória de deformação no plano das extensões principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

b) Determine o valor da espessura final da chapa.

c) Sabendo que o limite das operações de estampagem incremental é determinado pelo valor de redução de espessura máxima, quantifique este limite e represente-o no plano das extensões principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

d) Determine a extensão efectiva e a tensão efectiva. Utilize o critério de plasticidade de von Mises.

e) Determine o valor do quociente σ_2/σ_1 entre as tensões principais, considerando que o estado de tensão é plano $\sigma_3 = 0$.

f) Represente graficamente o vector incremento de extensão plástica $d\varepsilon_{ij}^p$ no plano das tensões principais e caracterize o tipo de deformação nesta região da peça.

g) Determine o valor das tensões σ_1 e σ_2.

Resolução

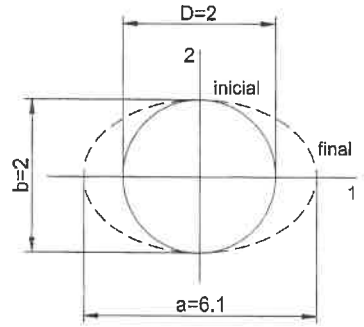
a) A determinação experimental dos valores das extensões principais locais efectua-se através dos valores das dimensões da elipse na direcção do eixo maior, a, e menor, b, relativamente ao valor do diâmetro do correspondente círculo antes da deformação plástica, D. Nestas condições, de acordo com os dados do problema, os valores das extensões principais máxima, ε_1, e mínima, ε_2, são,

$$\varepsilon_1 = \ln\frac{a}{D} = \ln\frac{6.1}{2} = 1.115$$
$$\varepsilon_2 = \ln\frac{b}{D} = \ln\frac{2}{2} = 0 \qquad (11.6.1)$$

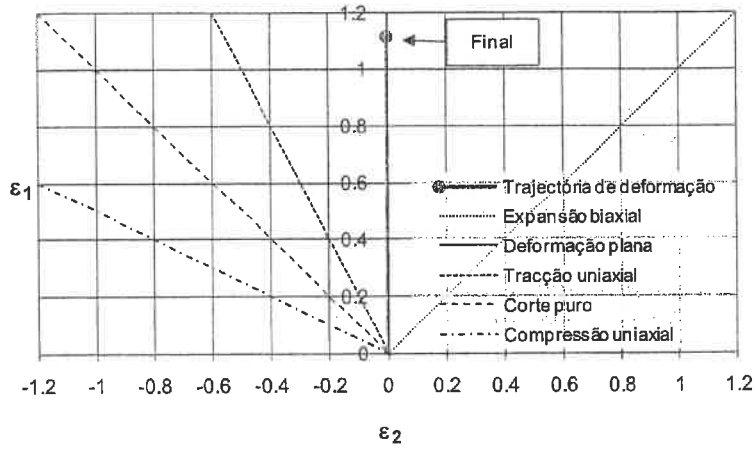
De onde se conclui que a fissura se desenvolve em condições de deformação plana, $\varepsilon_2 = 0$. Admitindo que a trajectória de deformação da elipses foi linear, o inverso do declive da trajectória de deformação no plano das extensões principais é,

$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{0}{1.115} = 0 \qquad (11.6.2)$$

Na figura seguinte representa-se esquematicamente a deformação da grelha circular inicial em elipse no local em que se verificou a ocorrência da fissura na peça.



A trajectória de deformação da elipse no plano das extensões principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ encontra-se representada na figura seguinte, bem como estão assinaladas algumas trajectórias de deformação características dos processos de deformação de chapa.



b) O valor final da espessura da chapa na região da peça onde surge a fissura determina-se a partir do valor da extensão principal na direcção da espessura, ε_3. Aplicando a condição de incompressibilidade característica da deformação plástica dos materiais metálicos, o valor da extensão principal segundo a direcção da espessura vem,

$$\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -(1.115 + 0) = -1.115 \qquad (11.6.3)$$

a que corresponde a seguinte espessura final,

$$h = h_0 \exp(-\varepsilon_3) = 1.5 \exp(-1.115) = 0.49 \text{ mm} \qquad (11.6.4)$$

c) Os limites de redução de espessura podem ser representados no plano das extensões principais. Considerando que o valor máximo de redução de espessura se quantifica em função da espessura final, h, e inicial, h_0, do seguinte modo,

$$r = \frac{h_0 - h}{h_0} = 1 - \frac{h}{h_0} \qquad (11.6.5)$$

ou,

$$\frac{h}{h_0} = 1 - r \tag{11.6.6}$$

A extensão verdadeira máxima segundo a direcção da espessura pode ser calculada em função da redução de espessura do seguinte modo,

$$\varepsilon_3 = \ln \frac{h}{h_0} = \ln(1-r) \tag{11.6.7}$$

Assim, o limite de redução de espessura da chapa no plano das extensões principais pode ser quantificado, considerando a condição de incompressibilidade escrita em função das extensões principais, do seguinte modo,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1 = -(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \Leftrightarrow \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 - \ln(1-r) \tag{11.6.8}$$

De onde se conclui que se o limite da operação de estampagem incremental é determinado por se atingir um valor crítico de redução de espessura, então, no plano das extensões principais o limite de fractura é estabelecido por uma recta de declive -1 que intersecta os eixos em $\ln(1-r)$. Sabendo que, na operação de estampagem incremental descrita, a fissura surgiu quando a espessura atingiu 0.49 mm, ou seja, quando a espessura sofreu uma redução que pode ser quantificada pela equação (11.6.5), de,

$$r = \frac{1.5 - 0.49}{1.5} = 0.673 = 67.3\% \tag{11.6.9}$$

a equação da recta limite de fractura desta operação, estabelecida pela equação (11.6.8), vem,

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 + 1.115 \tag{11.6.10}$$

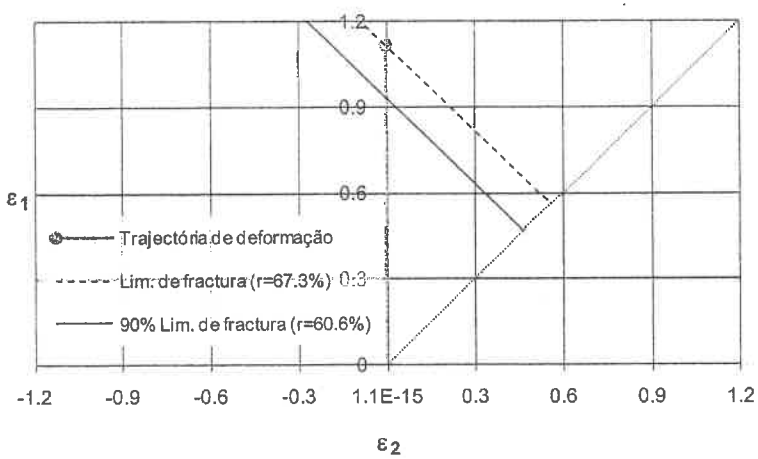
cuja representação no plano das extensões principais se encontra na figura seguinte.

Importa salientar que nas operações de estampagem incremental o limite de enformabilidade não é determinado pelo aparecimento de fenómenos de estricção localizada, tal como acontece nas operações de estampagem convencional, mas sim por se atingir valores de espessura críticos. Esta situação leva a que as curvas limites de estampagem não possam ser utilizadas para analisar os limites de enformabilidade da estampagem incremental e que, em sua substituição, se tenham que utilizar as rectas limites de fractura.

Se adicionalmente fosse considerada uma margem de segurança para o limite de fractura da operação de estampagem incremental de 10%, sobre a redução de espessura máxima (11.6.9), a que corresponde uma redução de espessura de 60.6%, o limite de fractura admissível para esta operação passaria a ser dado por,

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 + 0.93 \tag{11.6.11}$$

cuja recta se encontra igualmente representada no plano das extensões principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ na figura seguinte.



d) Conhecidos os valores das extensões principais na região onde surgiu a fissura, o valor da extensão efectiva, $\bar{\varepsilon}$, considerando o critério de von Mises, calcula-se sabendo que se trata de um estado de deformação plana ($\varepsilon_2 = 0$ e $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1$), do seguinte modo,

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_1-0)^2 + (0+\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_1+\varepsilon_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[6\varepsilon_1^{\,2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 1.115 = 1.29\end{aligned} \tag{11.6.12}$$

A tensão efectiva determina-se através da lei de comportamento mecânico do material da chapa (alumínio AA1050-H111) em função da extensão efectiva,

$$\overline{\sigma} = 140 \times 1.29^{0,04} = 141.4 \text{ MPa} \qquad (11.6.13)$$

e) O valor do quociente σ_2/σ_1 entre as tensões principais na região da peça onde surge a fissura determina-se, considerando que a trajectória de deformação foi linear, a partir das equações constitutivas de Levy-Mises. A partir destas equações constitutivas é igualmente possível estabelecer uma relação entre o quociente das tensões principais, α, que quantifica a trajectória de carregamento e o quociente das extensões principais, β, no plano da chapa, conforme se deduziu no problema 11.4 (11.4.20), considerando que o estado de tensão é plano $\sigma_3 = 0$,

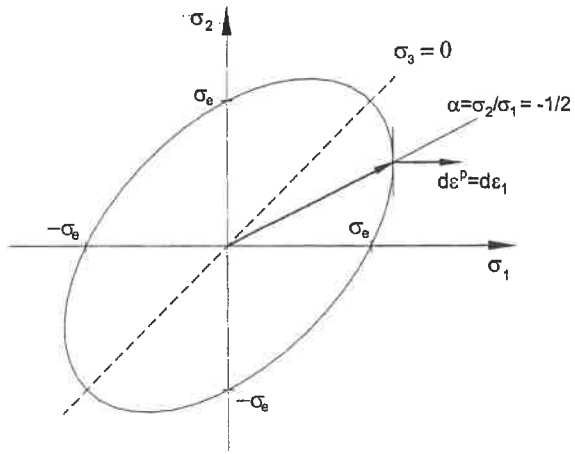
$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2\beta + 1}{2 + \beta} \qquad (11.6.14)$$

Sabendo que a trajectória de deformação do ponto material onde apareceu a fissura na peça é caracterizada por $\beta = 0$, o quociente entre as tensões principais vem,

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \qquad (11.6.15)$$

f) O vector incremento de extensão plástica $d\varepsilon_{ij}^{p}$ no local onde surgiu a fissura na peça encontra-se representado na figura seguinte.

O vector normal à superfície limite de elasticidade do critério de plasticidade de von Mises, para a trajectória de carregamento imposta no local da fissura, determina que a deformação no plano da chapa se verifique em condições deformação plana, com $d\varepsilon_2 = 0$.



g) O valor das tensões σ_1 e σ_2 na região da peça onde surge a fissura determina-se a partir do respectivo valor de tensão efectiva e da trajectória de carregamento durante a deformação plástica. Nestas condições, considerando a definição de tensão efectiva de von Mises, em condições de tensão plana, com $\sigma_3 = 0$, tem-se,

$$\overline{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 141.4 \text{ MPa} \qquad (11.6.16)$$

Aplicando agora a condição da trajectória de carregamento (equação (11.6.15)), determina-se o valor da maior tensão principal no plano da chapa,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2 + (\sigma_1)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 141.4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_1 = 141.4 \qquad (11.6.17)$$

$$\sigma_1 = 163.3 \text{ MPa}$$

e o valor da menor tensão principal no plano da chapa, será,

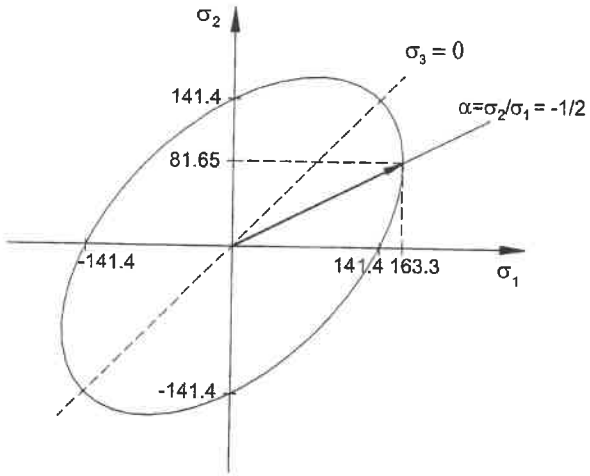
$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2} \times 163.3 = 81.65 \text{ MPa} \qquad (11.6.18)$$

Os valores das tensões principais no plano da chapa podiam igualmente ter sido obtidos em função do quociente entre as tensões principais, α, que quantifica a trajectória de carregamento (equação (11.4.23) do problema 11.4),

$$\sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}}{\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{1/2}} = \frac{141.4}{\left(1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{1/2}} = 163.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\alpha\bar{\sigma}}{\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{1/2}} = \frac{\frac{1}{2}\times 141.4}{\left(1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{1/2}} = 81.65 \text{ MPa} \qquad (11.6.19)$$

Estes resultados, e o seu significado físico, encontram-se ilustrados na figura seguinte.

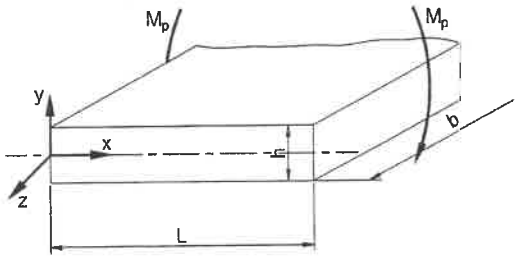


12. FLEXÃO EM DOMÍNIO PLÁSTICO

Neste capítulo apresenta-se um conjunto de problemas que abordam os processos tecnológicos que se enquadram na flexão em domínio plástico.

Problema 12.1

Considere a operação de flexão plástica de uma chapa de aço AISI 1008 sujeita a um momento flector plástico M_p que se encontra representada na figura.



Características da operação:

Espessura da chapa: $h = 2$ mm
Comprimento da peça: $L = 200$ mm
Largura da peça: $b = 100$ mm

Características mecânicas do aço AISI 1008:

$E = 207$ GPa
$\sigma_e = 180$ MPa
$e_f = 0.42$ $(l_0 = 50\,\text{mm})$

Admita que se pode desprezar a curvatura e que a deformação se processa em condições de deformação plana. Considere ainda que o comportamento mecânico do material da chapa pode ser aproximado por um modelo rígido-perfeitamente plástico. Nestas condições,

a) Represente graficamente a distribuição das tensões que actuam na chapa, indicando o respectivo valor nas fibras extremas.

b) Deduza uma expressão para calcular o valor do momento flector plástico M_p. Determine o valor do momento flector para o caso enunciado no problema.

c) Represente graficamente a distribuição de tensões residuais que permanecem na chapa no final da operação, indicando o seu valor nas fibras exteriores.

d) Apresente uma estimativa da variação angular, $\Delta\alpha$, que surge com a recuperação elástica.

Resolução

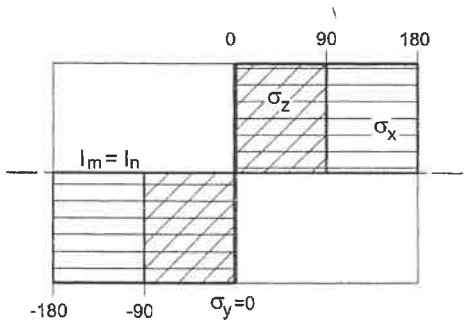
a) Considerando que se trata de uma operação de flexão em que a curvatura pode ser desprezada (por exemplo, por o raio de curvatura da peça ser muito superior à espessura da chapa), as tensões que se desenvolvem segundo a espessura são praticamente nulas, $\sigma_y = 0$. Adicionalmente, como a largura da peça é muito superior à espessura a deformação plástica processa-se em condições de deformação plana segundo a largura, $\varepsilon_z = 0$, e o valor da tensão σ_z obtém-se aplicando as equações constitutivas de Levy-Mises para esta direcção,

$$d\varepsilon_z = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\left[d\varepsilon_z - \frac{1}{2}\left(d\varepsilon_x + d\varepsilon_y\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x}{2} \tag{12.1.1}$$

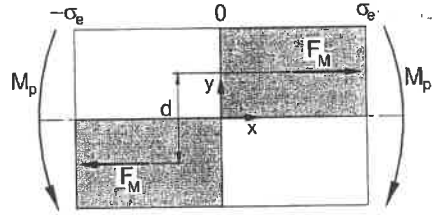
Para se conhecer a distribuição da tensão σ_x, sabe-se que ao longo da espessura uma das tensões é nula (σ_y) e a outra toma o valor médio da tensão de flexão (σ_z), então aplicando o critério de plasticidade de Tresca, conclui-se que,

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm\sigma_e \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_x = \sigma_e & y \geq 0 \\ \sigma_x = -\sigma_e & y \leq 0 \end{cases} \tag{12.1.2}$$

Em face do exposto a distribuição das tensões σ_x, σ_y e σ_z que actuam na chapa durante a fase de carga desta operação de flexão é a que se encontra representada na figura seguinte.



b) Notando que a distribuição de tensões na direcção x, representada na figura seguinte, corresponde a uma posição de equilíbrio, o valor do momento plástico aplicado, M_p, pode ser obtido através do equilíbrio de momentos, já que em termos de forças a distribuição de tensões está auto equilibrada.



Deste modo, o valor do momento plástico, M_p, vem dado por,

$$M_p = F_M\, d = \sigma_e \frac{h}{2} b \frac{h}{2} = \frac{\sigma_e\, b\, h^2}{4} \tag{12.1.3}$$

Para conhecer o valor do momento flector necessário à operação resta apenas substituir valores na equação (12.1.3), obtendo-se,

$$M_p = \sigma_e \frac{b\, h^2}{4} = 180 \times \frac{100 \times 2^2}{4} = 18000 \text{ N.mm} = 18 \text{ N.m} \tag{12.1.4}$$

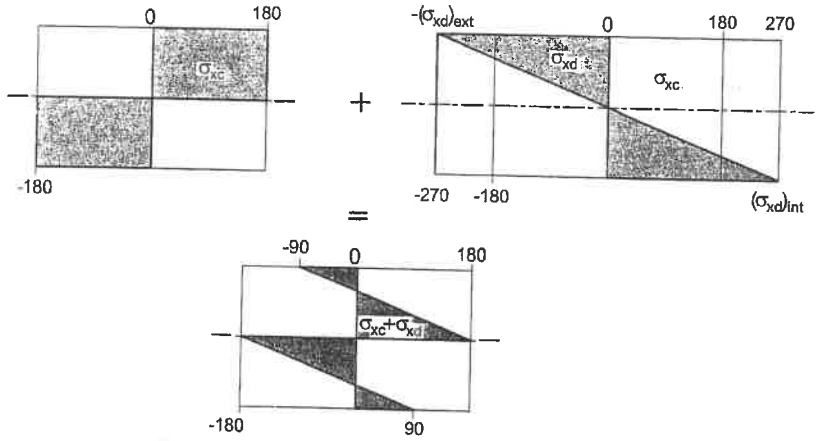
c) Durante a fase de carga a peça vai adquirindo curvatura enquanto as tensões de flexão vão variando em conformidade com a solicitação aplicada. Em cada instante a peça vai adquirindo uma posição de equilíbrio em que as forças e os momentos internos associados às tensões equilibram as forças e os momentos aplicados externamente. No final da operação, quando as solicitações exteriores cessam, a peça fica numa condição de desequilíbrio, a qual é restabelecida de imediato através do fenómeno de recuperação elástica que entretanto surge.

O estudo do mecanismo de descarga (que se inicia quando as solicitações exteriores deixam de ser aplicadas) pode fazer-se de um modo expedito recorrendo ao princípio da sobreposição, aplicando no final do carregamento um momento flector de igual intensidade ao da carga, mas com sentido contrário, de modo a que a condição de equilíbrio seja restabelecida.

As tensões residuais surgem na nova posição de equilíbrio em resultado da descarga e podem ser obtidas sobrepondo as tensões da carga com as da descarga. Este procedimento é ilustrado na figura seguinte, na qual se adiciona às tensões de carga as tensões de descarga, $(\sigma_{xd})_M$, cuja distribuição pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio da flexão elástica, pois o material reentra em domínio elástico logo que se inicia a fase de descarga,

$$(\sigma_{xd})_M = \mp \frac{M_p\, y}{I_z} \qquad (12.1.5)$$

em que M_p é o momento flector de descarga, de igual intensidade ao do da carga, y é a distância da fibra em análise à linha média e I_z é o momento de inércia relativamente à linha média. O sinal $\mp$ deve-se ao facto das tensões σ_x de descarga serem de compressão no lado exterior da peça e de tracção no lado interior.



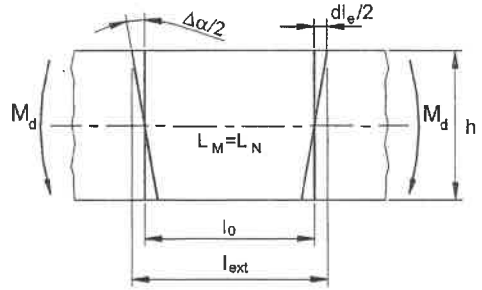
A distribuição das tensões residuais pode ser determinada a partir da distribuição das tensões de carga e de descarga, ou seja,

$$(\sigma_x)_{res} = (\sigma_x)_M + (\sigma_{xd})_M = \pm\sigma_e \mp 3\sigma_e \frac{y}{h} = \left(\pm 1 \mp \frac{y}{h}\right)\sigma_e \qquad (12.1.6)$$

Sendo os valores nas fibras extremas dados por,

$$(\sigma_x)_{res} = \left(\pm 1 \mp \frac{y}{h}\right)\sigma_e = \begin{cases} ((\sigma_x)_{res})_{ext} = -90\,\text{MPa} \\ ((\sigma_x)_{res})_{int} = +90\,\text{MPa} \end{cases} \qquad (12.1.7)$$

d) Para estimar a variação angular que a peça sofre durante a fase de descarga, de modo a corrigir as dimensões da ferramenta na fase de projecto é necessário conhecer o ângulo de recuperação elástica associada à operação. Considere-se a figura seguinte na qual se esquematiza o movimento que as secções irão sofrer durante a recuperação elástica. Por questões de simplicidade desprezou-se a curvatura e admitiu-se que durante o movimento de recuperação elástica as secções rodam de um ângulo $\Delta\alpha/2$, até atingir a posição de equilíbrio.



Uma vez que na recuperação elástica a rotação das secções se vai dar em torno da linha média, o ângulo de rotação da secção será dado por,

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{dl_e}{h} \qquad (12.1.8)$$

em que dl_e é o comprimento recuperado pela fibra exterior e h a espessura da peça.

Considerando a definição de extensão, notando que a recuperação se processa em domínio elástico (onde se aplicam as equações constitutivas linear elásticas) e que o ângulo de recuperação elástica é pequeno, pode reescrever-se a expressão anterior para,

$$\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{l_0\,(\varepsilon_x)_{ext}}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\alpha}{l_0} = \frac{2}{h}\frac{(\sigma_{xd})_{ext}}{E} \qquad (12.1.9)$$

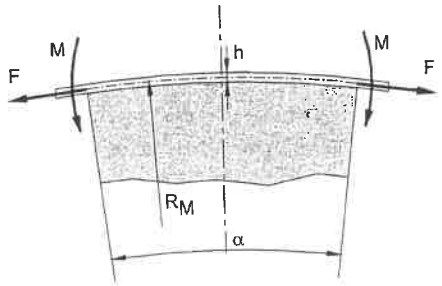
em que l_0 é o comprimento da fibra neutra, $(\sigma_{xd})_{ext}$ é a tensão de recuperação elástica na fibra exterior e E é o módulo de elasticidade do material.

Considerando os dados do problema e o valor da tensão de descarga na fibra exterior, a variação angular $\Delta\alpha$ durante a recuperação elástica da operação de flexão vem dada por,

$$\Delta\alpha = \frac{2}{h}\frac{(\sigma_{xd})_{ext}}{E} l_0 = \frac{2}{h}\frac{(-3)}{2E}\sigma_e l_0 = -3\frac{\sigma_e}{E}\frac{l_0}{h}$$
$$= -3\frac{180}{207000}\frac{200}{2} = 0.261\text{rad} \cong 15^\circ \qquad (12.1.10)$$

Problema 12.2

Considere a operação de flexão em domínio plástico com um momento (M) e uma força de tracção (F) de uma chapa em aço que se representa na figura.



Características da operação:

Força de tracção: $F = 160$ kN ;
Raio da linha média na zona deformada: $R_M = 30$ mm ;
Ângulo da zona deformada: $\alpha = 60°$;
Largura da chapa: $b = 400$ mm ;
Espessura da chapa: $h = 6$ mm ;

Características do material da chapa:

$E = 2.0 \times 10^5$ MPa
$\sigma_e = 200$ MPa ;
$\sigma_R = 300$ MPa ;
$e_R = 0.25\%$;

Admitindo que a deformação se processa em condições de deformação plana e que a curvatura pode ser desprezada, bem como o atrito entre a chapa e a matriz, determine:

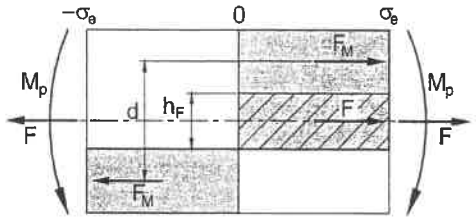
a) A distribuição das tensões tangenciais que actuam durante a deformação, considerando que toda a secção se encontra em domínio plástico. Calcule o valor do momento necessário e determine a posição da linha neutra.

b) A distribuição das extensões tangenciais, indicando as parcelas correspondentes à flexão e à força de tracção. Estime o valor da espessura da chapa no final da operação.

c) A geometria da matriz (raio de curvatura) que permite compensar a recuperação elástica, de modo a que no final o raio da linha média da chapa seja de 30 mm. Faça, ainda, uma previsão da distribuição das tensões residuais que permanecem na chapa depois de terminada a operação, indicando o respectivo valor nas fibras externas.

Resolução

a) Neste caso a enformação da chapa é feita aplicando um momento e uma força de tracção, sendo este processo muito usado nos casos em que as peças a enformar possuem curvaturas relativamente baixas. Na figura seguinte apresenta-se a distribuição de tensões σ_x (equivalentes às tensões tangenciais, quando se considera a curvatura), na qual é possível distinguir as áreas associadas ao momento flector e à força de tracção, sendo a da força de tracção a área centrada na linha média e com a espessura igual a h_f.



Deste modo, o valor do momento plástico, M_p, pode ser determinado fazendo o equilíbrio de momentos que, de acordo com a figura, se pode escrever do seguinte modo,

$$M_p = F_M\, d = \sigma_e\, b \frac{(h-h_F)}{2}\frac{(h+h_F)}{2} = \sigma_e\, b \frac{h^2-h_F^2}{4} \qquad (12.2.1)$$

Tendo em consideração que a força axial, F, pode ser expressa por,

$$F = h_F\, b\, \sigma_e \quad \Rightarrow \quad h_F = \frac{F}{b\,\sigma_e} \qquad (12.2.2)$$

A equação (10.2.1) do momento plástico máximo, M_p, pode ser rescrita do seguinte modo,

$$M_p = \sigma_e\, b \frac{h^2-h_F^2}{4} = \sigma_e \frac{b\,h^2}{4} - \frac{F^2}{4\,b\,\sigma_e} \qquad (12.2.3)$$

Pode então concluir-se que o momento que se tem que aplicar para que todas as fibras da peça estejam em domínio plástico sofre uma redução quando se aplicam forças axiais, pois, como se sabe, no caso de não se aplicarem forças axiais, o valor do

momento é dado por $M_p = \sigma_e b\, h^2/4$, expressão que pode ser obtida da equação (12.2.3) fazendo $F = 0$.

Para conhecer o valor do momento flector necessário à operação resta apenas substituir valores na equação (12.2.3), obtendo-se,

$$M_p = \sigma_e \frac{b\,h^2}{4} - \frac{F^2}{4\,b\,\sigma_e} \quad M_p = 200\frac{400\times 6^2}{4} - \frac{160000^2}{4\times 400\times 200} = 640 \text{ N.m} \qquad (12.2.4)$$

Para se determinar a posição da linha neutra, sabe-se que:

$$F = \sigma_e\, h_f\, b \quad \Rightarrow \quad h_f = \frac{F}{\sigma_e\, b} = \frac{160000}{200\times 400} = 2 \text{ mm} \qquad (12.2.5)$$

Levando a que a posição da linha neutra seja,

$$R_N = R_M - \frac{h_f}{2} = 30 - 1 = 29 \text{ mm} \qquad (12.2.6)$$

ou seja, a linha neutra encontra-se abaixo da linha média, como ilustra a figura anterior, a uma distância de,

$$e = \frac{h_f}{2} = 1 \text{ mm} \qquad (12.2.7)$$

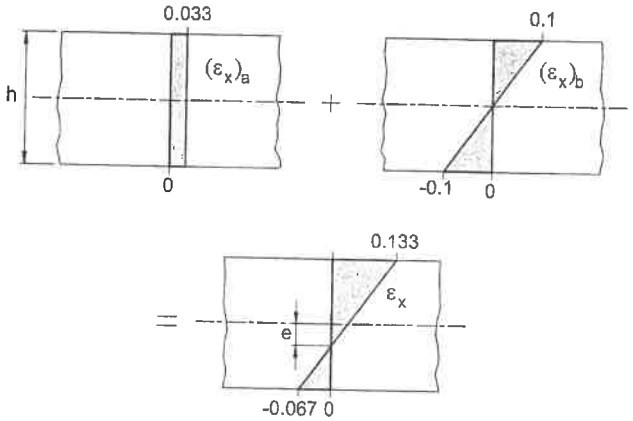
b) Para determinar a distribuição da extensão tangencial ao longo da espessura da chapa numa peça com pequena curvatura, sabe-se que as extensões tangenciais resultam da soma de duas parcelas (ver figura seguinte); uma associada à extensão uniforme com origem na força aplicada, ε_a e outra devido à flexão, ε_b, ou seja,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a + \varepsilon_b \qquad (12.2.8)$$

Como se sabe a extensão tangencial numa linha genérica (AB) com um comprimento inicial l_0, e cujo comprimento após dobragem é l_1, pode ser calculada em função da distância da fibra à linha média, v, através de,

$$(\varepsilon_x)_{AB} = ln\frac{l_1}{l_0} = ln\left[\frac{l_M}{l_0}\left(1+\frac{v}{R_M}\right)\right] = ln\left(\frac{l_M}{l_0}\right) + ln\left(1+\frac{v}{R_M}\right) \qquad (12.2.9)$$

em que l_0 e l_M são, respectivamente, o comprimento da linha média antes e depois da deformação, R_M é o raio de curvatura da linha média e v a distância da fibra à linha média.



A análise desta equação permite concluir que o valor da extensão tangencial é dado pela soma de duas parcelas, a primeira corresponde à extensão tangencial da linha média, enquanto que a segunda é muitas vezes designada pela extensão da flexão. Aplicando esta noção à linha neutra $(v = -e)$, onde a extensão tangencial é nula, $(\varepsilon_x)_N = 0$, a extensão uniforme devido à força, ε_a, pode ser calculada a partir do valor da extensão de flexão do seguinte modo,

$$(\varepsilon_x)_N = (\varepsilon_a)_N + (\varepsilon_b)_N = 0 \Rightarrow (\varepsilon_a)_N = -(\varepsilon_b)_N = -ln\left(1+\frac{v}{R_M}\right) \cong -\frac{v}{R_M} = \frac{e}{R_M} \qquad (12.2.10)$$

Nestas condições, a distribuição da extensão tangencial ao longo da espessura, em função da distância à linha média, v, será dada por,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a + \varepsilon_b = \frac{e+v}{R_M} \qquad (12.2.11)$$

conforme representação da figura anterior.

Para se estimar o valor da espessura no final da operação é necessário conhecer o valor da extensão nesta direcção, ε_y. Para tal, considere-se a conservação de volume expressa pelo somatório das extensões, e introduza-se a condição de deformação plana $(\varepsilon_z = 0)$, obtendo-se,

$$\varepsilon_y = -\varepsilon_x \qquad (12.2.12)$$

em que ε_x corresponde à extensão na direcção tangencial e ε_y à extensão radial.

Da discussão efectuada anteriormente para a distribuição das extensões, conclui-se que apenas a extensão uniforme associada à força de tracção irá provocar redução de espessura. Deste modo, de acordo com a equação (12.2.11), a extensão na direcção da espessura associada à força de tracção é,

$$\varepsilon_y = -\frac{e}{R_M} = -\frac{1}{30} = -0.033 \qquad (12.2.13)$$

Tendo em consideração a definição de extensão verdadeira segundo a espessura, obtém-se para a espessura da chapa no final da operação,

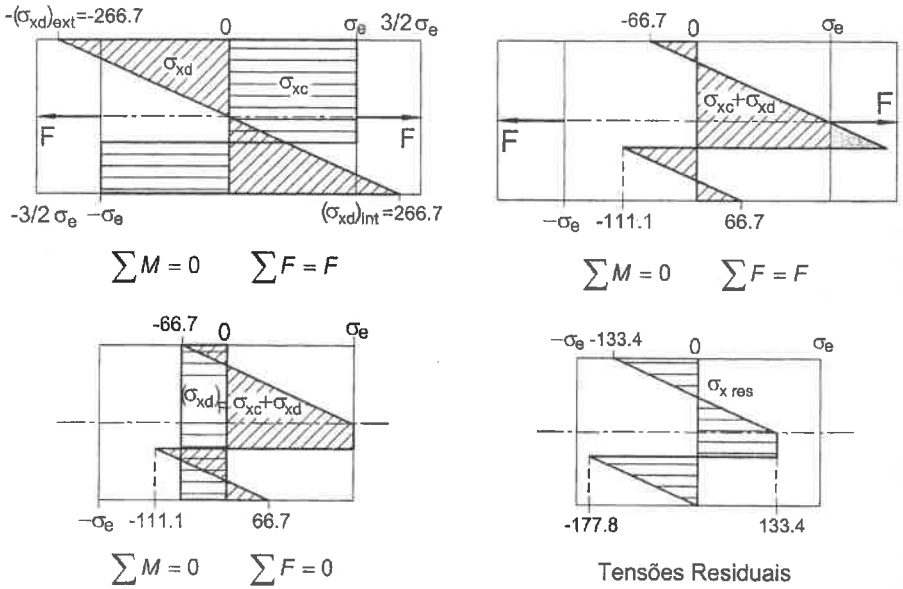
$$\varepsilon_y = ln\frac{h}{h_0} \Rightarrow h = h_0\, e^{-0.033} = 6 \times e^{-0.033} = 5.8\,\text{mm} \qquad (12.2.14)$$

ou seja, uma perda de espessura da ordem dos 3.3%.

c) Também no caso do carregamento se efectuar com um momento e uma força, a perda de curvatura associada à recuperação elástica depende apenas da anulação do momento, já que a recuperação da força não envolve rotação das secções. Porém, para a determinação das tensões residuais ambas as solicitações têm que ser descarregadas. Esse procedimento é ilustrado na figura seguinte, começando por se retirar em primeiro lugar o momento e depois a força axial.

A soma das tensões de carga com as de descarga (situação que corresponde à posição de equilíbrio) permite determinar a distribuição das tensões residuais que permanecem na peça no final do processo de deformação, cuja distribuição se apresenta

também na figura seguinte. É de assinalar que o cálculo realizado na determinação das tensões residuais da direcção tangencial é aproximado, uma vez que a zona triangular da figura superior direita não foi compensada por questões de simplicidade de cálculo, para além do facto da utilização do método da sobreposição ser um processo expedito, e não exacto, para estudar a descarga da peça.



Para estimar a variação angular que a peça sofre durante a fase de descarga, de modo a corrigir as dimensões da ferramenta na fase de projecto é necessário conhecer o ângulo de recuperação elástica associada à operação. No problema 10.1 já se mostrou que esta recuperação angular pode ser estimada através da seguinte expressão,

$$\frac{\Delta\alpha}{l_0} = \frac{2}{h}\frac{(\sigma_{xd})_{ext}}{E} \qquad (12.2.15)$$

em que l_0 é o comprimento da fibra neutra, $(\sigma_{xd})_{ext}$ é a tensão de recuperação elástica na fibra exterior e E é o módulo de elasticidade do material.

No entanto, a equação (12.2.15) que estabelece a variação angular que se dá durante a recuperação elástica pode ser escrita em função dos raios de curvatura da linha média no final da fase de carga, R_i, (antes da recuperação elástica) e no final da operação, R_f (depois de terminada a recuperação elástica). Assim, notando que genericamente o comprimento de uma fibra se pode calcular por, $l = \alpha R$, em que α é o ângulo da zona deformada e R o raio de curvatura da fibra, admitindo que o comprimento da linha média antes e após recuperação elástica não varia pode escrever-se,

$$l_0 = R_i\alpha_i = R_f\alpha_f \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{l_0} = \dfrac{1}{R_i} \\ \dfrac{\alpha_f}{l_0} = \dfrac{1}{R_f} \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta\alpha}{l_0} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i} \qquad (12.2.16)$$

Igualando agora as equação (12.2.15) e (12.2.16) obtém-se,

$$\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i} = \frac{2(\sigma_{xd})_{ext}}{E\,h} \Rightarrow R_i = \frac{R_f}{1 - \dfrac{2(\sigma_{xd})_{ext}}{E\,h}R_f} \qquad (12.2.17)$$

Então, para estimar o valor do raio de curvatura da matriz que permite compensar a recuperação elástica apenas falta determinar a tensão de descarga na fibra exterior associada ao momento, sendo o respectivo módulo dado por,

$$(\sigma_{xd})_{ext} = \frac{M_c}{I_z}\frac{h}{2} = \left(\sigma_e\frac{b\,h^2}{4} - \frac{F^2}{4\,b\,\sigma_e}\right)\frac{12\,h}{2\,bh^3} = \frac{3}{2}\sigma_e\left[1 - \left(\frac{h_f}{h}\right)^2\right] \qquad (12.2.18)$$

em que $(h_f/h)^2$ define o factor de redução da tensão de recuperação na fibra exterior em função da intensidade da força axial aplicada.

Substituindo valores nesta equação, obtém-se para o problema em estudo,

$$(\sigma_{xd})_{ext} = \frac{3}{2}\sigma_e\left[1 - \left(\frac{h_f}{h}\right)^2\right] = \frac{3}{2}\times 200\left[1 - \left(\frac{2}{6}\right)^2\right] = 266.7\ \text{MPa} \qquad (12.2.19)$$

Sendo finalmente o raio da matriz, R_{mat}, dado por,

$$R_{mat} = R_i - \frac{h}{2} = \frac{R_f}{1 - \frac{2(\sigma_{xd})_{ext}}{E\,h} R_f} - \frac{h}{2} = \frac{30}{1 - \frac{2 \times (-266.7)}{2 \times 10^5 \times 6} 30} - \frac{6}{2} = 26.6 \text{ mm} \qquad (12.2.20)$$

Resta calcular o valor das tensões residuais nas fibras extremas. Notando que a tensão de descarga devida à força pode ser calculada através de,

$$(\sigma_{xd})_F = -\frac{F}{bh} = -\frac{160 \times 10^3}{0.4 \times 6 \times 10^{-3}} = -66.7 \text{ MPa} \qquad (12.2.21)$$

a tensão residual na fibra exterior vem dada por,

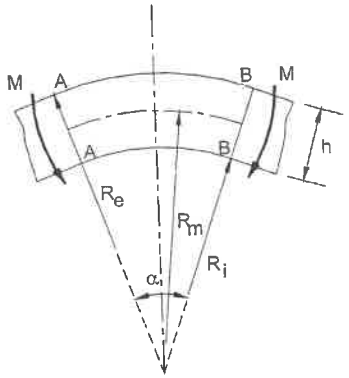
$$\begin{aligned}(\sigma_{xres})_{ext} &= (\sigma_c)_{ext} + \left|(\sigma_{xd_M})_{ext} + (\sigma_{xd_F})_{ext}\right| \\ &= 200 + (-266.7 - 66.7) = -133.4 \text{ MPa}\end{aligned} \qquad (12.2.22)$$

e para a fibra interior,

$$\begin{aligned}(\sigma_{xres})_{int} &= (\sigma_c)_{int} + \left|(\sigma_{xd_M})_{int} + (\sigma_{xd_F})_{int}\right| \\ &= -200 + (266.7 - 66.7) = 0\end{aligned} \qquad (12.2.23)$$

Problema 12.3

Considere a operação de flexão em domínio plástico de uma chapa de aço AISI 1006 realizada com um momento puro (M) representada na figura seguinte. Admita que para um dado instante t a geometria da peça é a que se indica igualmente na figura.



Geometria peça no instante t:

Raio exterior: $R_e = 16$ mm
Raio interior: $R_i = 12$ mm
Ângulo da zona deformada: $\alpha = 40°$
Largura da peça: $b = 300$ mm

Características mecânicas AISI 1006:

$\sigma_e = 285$ MPa
$\sigma_R = 330$ MPa
$e_R = 0.20\%$ $(l = 50\,\text{mm})$
$E = 205$ GPa
$\nu = 0.290$

Admitindo que a flexão se processa em condições de deformação plana e que a curvatura não pode ser desprezada, determine:

a) A distribuição das tensões que actuam durante a fase de carga desta operação. O raio da linha neutra. O valor do momento plástico.

b) A geometria da zona deformada para um instante posterior $(t + \Delta t)$, no qual o valor do ângulo da zona deformada é de $\alpha = 50°$, em consequência do acréscimo da deformação.

c) Para a geometria definida na alínea anterior estime o valor do ângulo de recuperação elástica. Faça, ainda, uma previsão da distribuição das tensões residuais que permanecem na chapa depois de terminada a operação.

Resolução

a) As condições definidas neste caso estabelecem que se trata de um processo de flexão efectuado com um momento puro em condições de deformação plana, para o qual a curvatura não pode ser desprezada $(R_i/h = 3)$. Nestas condições, surgem tensões segundo as direcções tangencial (θ), radial (r) e largura (z).

As tensões radiais que se desenvolvem segundo a espessura são dadas por,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_e \, ln\frac{r}{R_e} \qquad r \geq R_N \\ \sigma_r &= \sigma_e \, ln\frac{R_i}{r} \qquad r \leq R_N \end{aligned} \tag{12.3.1}$$

em que R_N é o raio da linha neutra.

Aplicando o critério de plasticidade de Tresca à zona superior e inferior à linha neutra, e notando que as tensões segundo a largura (z) são intermédias, as tensões tangenciais que actuam nas respectivas zonas serão dadas por,

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_e \quad &\Rightarrow \quad . \, \sigma_\theta = \sigma_e \left(ln\frac{r}{R_e} + 1 \right) \qquad r \geq R_N \\ \sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_e \quad &\Rightarrow \quad \sigma_\theta = \sigma_e \left(ln\frac{R_i}{r} - 1 \right) \qquad r \leq R_N \end{aligned} \tag{12.3.2}$$

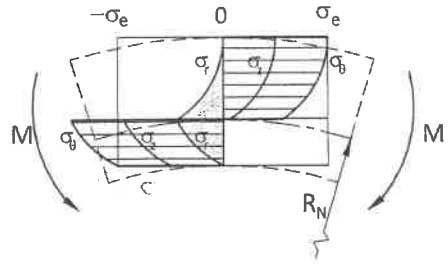
Enquanto que as tensões que actuam segundo a direcção do comprimento (z), podem ser obtidas aplicando às equações de Levy-Mises a condição de deformação plana segundo esta direcção $(d\varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = (\sigma_\theta + \sigma_r)/2)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_e \left(ln\frac{r}{R_e} + \frac{1}{2} \right) \qquad r \geq R_N \\ \sigma_z &= \sigma_e \left(ln\frac{R_i}{r} - \frac{1}{2} \right) \qquad r \leq R_N \end{aligned} \tag{12.3.3}$$

A posição da linha neutra, R_N, determina-se a partir da continuidade da tensão radial, σ_r, na linha neutra, ou seja, igualando a expressão da zona em tracção à da zona em compressão,

$$\sigma_e \, ln\frac{R_N}{R_e} = \sigma_e \, ln\frac{R_i}{R_N} \quad \Rightarrow \quad R_N^2 = R_i \, R_e \tag{12.3.4}$$

Na figura seguinte apresenta-se a distribuição das tensões σ_r, σ_θ e σ_z para a flexão pura plástica, em condições de deformação plana ($d\varepsilon_z = 0$), referida ao instante inicial de deformação (t).



Então, para o instante t a posição da linha neutra, $(R_N)_t$, será,

$$(R_N)_t = \sqrt{R_i \, R_e} = \sqrt{12x16} = 13.9\,\text{mm} \tag{12.3.5}$$

No que se refere ao momento plástico, M_p, necessário à flexão de uma peça curva de eixo circular pode determinar-se fazendo o equilíbrio de momentos no centro de curvatura da peça, ou seja,

$$\begin{aligned} M_p &= \int_{R_i}^{R_e} \sigma_\theta \, r \, b \, dr \\ &= \sigma_e \, b \left\{ \int_{R_i}^{\sqrt{R_i R_e}} (ln\frac{R_i}{r} - 1) \, r \, dr + \int_{\sqrt{R_i R_e}}^{R_e} (ln\frac{r}{R_e} + 1) \, r \, dr \right\} \\ &= \sigma_e \, b \, \frac{(R_e - R_i)^2}{4} = \sigma_e \frac{b h^2}{4} = 285 \times 10^6 \times \frac{300 \times 10^{-3} \times \left(4 \times 10^{-3}\right)^2}{4} \\ &= 342 \text{ N.m} \end{aligned} \tag{12.3.6}$$

b) Para se determinar a geometria da peça no instante $(t+\Delta t)$, em que o ângulo da zona deformada é $\alpha = 50°$, sabe-se que entre este instante e o anterior não há variação de volume, por a deformação se verificar em regime plástico. Então, sendo o volume da zona em deformação dado por,

$$V = \alpha\left(R_e^2 - R_i^2\right)b = \alpha\frac{(R_e + R_i)}{2}h\,b = \alpha R_M\,h\,b = l_m\,h\,b \qquad (12.3.7)$$

em que l_M é o comprimento da linha média.

Então, entre os dois instantes de deformação a variação de volume será nula, ou seja,

$$dV = dl_M\,h\,b + l_M\,dh\,b + l_M\,h\,db = 0 \qquad (12.3.8)$$

Notando agora que a deformação é plana $(db = 0)$ e que a espessura não varia $(dh = 0)$, por se tratar de uma flexão com momento puro, da equação (12.3.8), resulta que,

$$dl_M = 0 \qquad (12.3.9)$$

ou seja, o comprimento da linha média entre os dois instantes não varia, o que permite determinar o raio da fibra média no instante $(t+\Delta t)$,o qual é dado por,

$$(R_M)_{(t+\Delta t)} = \frac{\alpha_t}{\alpha_{(t+\Delta t)}}(R_M)_t \qquad (12.3.10)$$

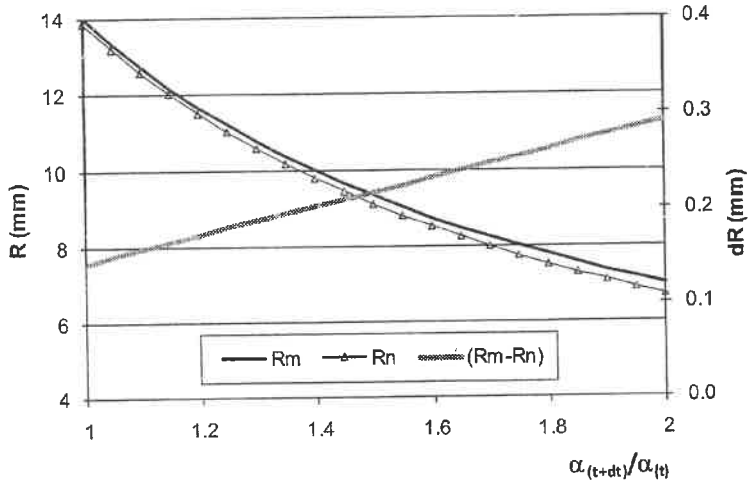
Conhecida a posição da linha média do instante $(t+\Delta t)$ a geometria desta configuração é facilmente obtida, uma vez que,

$$\begin{aligned}(R_e)_{(t+\Delta t)} &= (R_M)_{(t+\Delta t)} + \frac{h}{2}\\ (R_i)_{(t+\Delta t)} &= (R_e)_{(t+\Delta t)} - h\\ (R_N)^2_{(t+\Delta t)} &= (R_i)_{(t+\Delta t)}(R_e)_{(t+\Delta t)}\end{aligned} \qquad (12.3.11)$$

Introduzindo a equação (12.3.10) nas equações (12.3.11) e substituindo valores obtém-se para a configuração no instante $(t+\Delta t)$,

$$\begin{aligned}(R_M)_{(t+\Delta t)} &= \frac{\alpha_t}{\alpha_{(t+\Delta t)}}(R_M)_t = \frac{40}{50}\times 14 = 11.2\text{mm}\\ (R_e)_{(t+\Delta t)} &= (R_M)_{(t+\Delta t)} + \frac{h}{2} = 11.2 + 2 = 13.2\text{mm}\\ (R_i)_{(t+\Delta t)} &= (R_e)_{(t+\Delta t)} - h = 13.2 - 4 = 9.2\text{mm}\\ (R_N)_{(t+\Delta t)} &= \sqrt{(R_i)_{(t+\Delta t)}(R_e)_{(t+\Delta t)}} = \sqrt{13.2\text{x}9.2} = 11.0\text{mm}\end{aligned} \qquad (12.3.12)$$

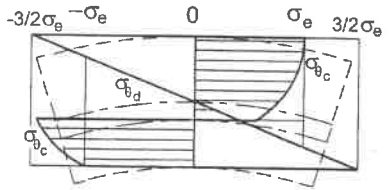
Algumas conclusões importantes podem ser tiradas fazendo a representação gráfica destes resultados. Assim, na figura seguinte apresenta-se a variação do raio da linha média (R_M), do raio da linha neutra (R_N) e da respectiva diferença (dR) em função da variação do ângulo de dobragem adimensionalizado com o ângulo do instante inicial $(\alpha_{(t+dt)}/\alpha_t)$.



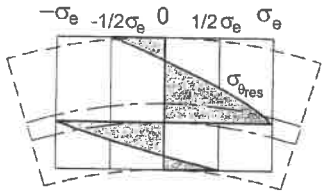
Da análise do gráfico pode concluir-se que o aumento da deformação, ou seja, do ângulo de dobragem conduz a que tanto a linha média, como a linha neutra se desloquem na direcção do centro de curvatura. Porém, à medida que a deformação aumenta o deslocamento da linha neutra é superior ao da linha média, levando a que estas se

afastem, conforme se pode inferir no gráfico da figura anterior avaliando a variação da diferença de raios $(dR = R_M - R_N)$.

Para estudar a recuperação elástica sabe-se que a anulação do momento exterior de carga será obtida sobrepondo um momento exterior igual, mas de sinal contrário. Em consequência, a peça entra imediatamente em domínio elástico, uma vez que as tensões associadas ao momento de descarga têm sinal contrário ao do da carga. Supondo agora que as secções radiais planas se mantêm planas durante a recuperação elástica, as tensões de descarga terão o andamento linear, regido pela lei de Hooke, conforme se mostra na figura seguinte (lado esquerdo). A soma das tensões de carga com as de descarga resulta na posição de equilíbrio, dando origem às tensões residuais, cuja distribuição se mostra na figura seguinte (lado direito).



Tensões de carga e de descarga



Tensões residuais

Para estimar o ângulo de recuperação elástica, sabe-se que a extensão tangencial elástica, ε_θ, está relacionada com a variação angular, $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, por,

$$\varepsilon_\theta = \frac{v}{(R_{N0} + v)} \frac{(\alpha - \alpha_0)}{\alpha_0} \qquad (12.3.13)$$

em que v é a distância de uma fibra genérica à linha neutra e R_{N0} é o raio da fibra neutra na posição inicial.

Aplicando esta equação ao fenómeno da descarga, em particular à fibra exterior, admitindo que a linha neutra da recuperação elástica coincide com a linha média, obtém-se para a variação angular durante a descarga, $\Delta\alpha/\alpha_0$,

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} = (\varepsilon_{\theta d})_{ext} \frac{R_e}{h/2} \qquad (12.3.14)$$

em que $(\varepsilon_{\theta d})_{ext}$ é a extensão da descarga na fibra exterior, R_e o raio da fibra exterior e h a espessura.

Como durante a recuperação elástica se tem para a fibra exterior $(\varepsilon_{\theta d})_{ext} = (\sigma_{\theta d})_{ext}/E$, a equação (12.3.14) pode reescrever-se do seguinte modo,

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} = (\sigma_{\theta d})_{ext} \frac{2R_e}{E\,h} \qquad (12.3.15)$$

em que $(\sigma_{\theta d})_{ext}$ é a tensão tangencial de descarga na fibra exterior.

Para calcular a variação angular devida à recuperação elástica apenas falta determinar o valor da tensão de descarga na fibra exterior $(\sigma_{\theta d})_{ext}$. Em face das hipóteses simplificativas consideradas e notando que o momento de carga que se pretende equilibrar vale $M_c = (\sigma_e\, b h^2)/4$, a tensão de descarga na fibra exterior (ver figura anterior) será dada por,

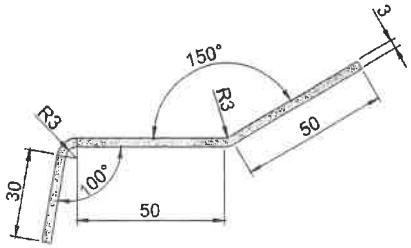
$$(\sigma_{\theta d})_{ext} = -\frac{M_c}{I_z}\frac{h}{2} = \frac{\sigma_e b h^2}{4}\frac{12\,h}{2\,bh^3} = \frac{3}{2}\sigma_e \qquad (12.3.16)$$

Substituindo este resultado na equação (12.3.15) obtém-se finalmente,

$$\Delta\alpha = 3\frac{\sigma_e}{E}\frac{R_e}{h}\alpha_0 = 3\times\frac{285}{2.05\times10^5}\frac{13.2}{4}\times 50 = 0.69° \qquad (12.3.17)$$

Problema 12.4

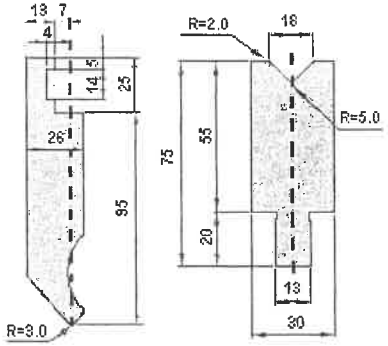
Pretende-se produzir peças em aço, com a geometria e as dimensões representadas na figura seguinte. Na mesma figura apresentam-se ainda as características mecânicas da quinadora e da ferramenta disponível para o fabrico da peça.



Comprimento da peça: $b = 200\,\text{mm}$

Características do aço:

Tensão limite de elasticidade: $\sigma_e = 330\,\text{MPa}$
Tensão de rotura: $\sigma_R = 450\,\text{MPa}$
Módulo de Young: $E = 210\,\text{GPa}$



Características da quinadora/ferramenta:

Força máxima: $F_{max} = 950\,\text{kN}$
Velocidade de trabalho: $v = 7\,\text{mm/s}$
Potência: $P = 5\,\text{kW}$

Ângulo punção: 88°
Ângulo matriz: 88°

Capacidade máxima ferramentas: 100 ton/m

Nestas condições,

a) Determine a geometria e as dimensões da estampa plana. Discuta se as ferramentas disponíveis para o fabrico da peça são adequadas.

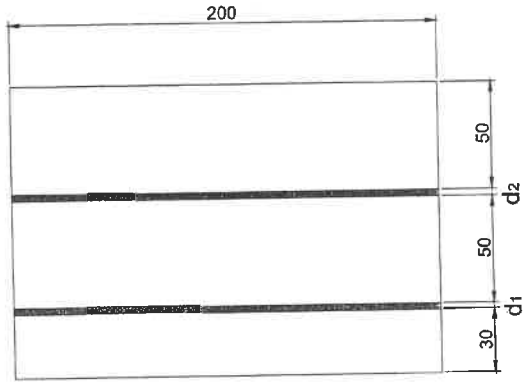
b) Calcule a recuperação elástica associada a cada uma das quinagens.

c) Elabore uma sequência de fabrico para a peça. Para cada uma das quinagens indique o posicionamento da peça na quinadora, a profundidade, a força e a potência máxima de quinagem.

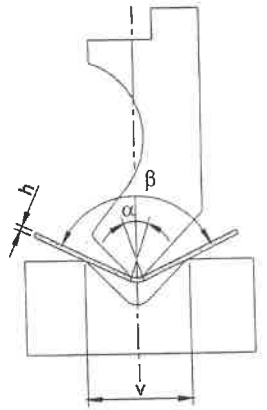
d) Verifique se existe o perigo das ferramentas serem danificadas na realização de alguma das operações.

Resolução

a) Em face da geometria da peça o planificado terá uma forma rectangular com as características representadas na figura seguinte.



Assim, para se ter a estampa plana completamente definida falta conhecer os dimensões d_1 e d_2, correspondentes às zonas que irão sofrer deformação plástica. Para se compreender como estes valores devem ser calculados considere-se a operação genérica de quinagem que se representa na figura seguinte.



Para calcular as dimensões d_1 e d_2 tem que se conhecer para cada uma das dobragens a posição da linha que não varia de comprimento durante a deformação que, como se sabe, pode ser obtida a partir da seguinte relação,

$$r_N = r_i + k\frac{h}{2} \quad com \quad k = 0.65 + \frac{1}{2}\log\frac{r_i}{h} \tag{12.4.1}$$

em que r_N é o raio da linha que não varia de comprimento, r_i é o raio interior da dobragem, h a espessura da chapa.

Por outro lado, o ângulo que interessa para determinar estes comprimentos não é o que define a abertura entre as abas (β), mas o que determina a extensão da zona deformada (α),conforme se mostra na figura anterior. Assim, os comprimentos necessários às dobragens serão dados por,

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha_1 r_{N_1} = 80° \times \frac{\pi}{180°} \times \left[3 + \left(0.65 + \frac{1}{2}\log\frac{3}{3}\right) \times \frac{3}{2}\right] = 5.6\,\text{mm} \\ d_2 &= \alpha_2 r_{N_2} = 30° \times \frac{\pi}{180°} \times \left[3 + \left(0.65 + \frac{1}{2}\log\frac{3}{3}\right) \times \frac{3}{2}\right] = 2.1\,\text{mm} \end{aligned} \tag{12.4.2}$$

Sendo então as dimensões da estampa plana, $L \times b = 137.7 \times 200\,\text{mm}$.

No que se refere às ferramentas disponíveis para realizar as dobragens convém verificar se a abertura da matriz é a adequada, bem como se o raio mínimo de quinagem é respeitado. Relativamente à abertura da matriz a dimensão deve cumprir a seguinte relação,

$$v = 6 \text{ a } 8h \quad para \quad h \le 3\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad v = 18 \text{ a } 24\,\text{mm} \tag{12.4.3}$$

Sendo a abertura da matriz de 18 mm, da relação empírica anterior verifica-se que o valor é relativamente baixo, contudo, como está dentro do intervalo aconselhado, ir-se-á adoptar a matriz. Deste modo, o raio mínimo de quinagem, para evitar problemas de fissuração na peça, será,

$$r_{min} \ge \frac{5}{32}v \quad \Rightarrow \quad r_{min} \ge 2.8\,\text{mm} \tag{12.4.4}$$

Condição que é verificada, uma vez que o raio do cunho é de 3 mm. Concluindo-se que as ferramentas disponibilizadas permitem o fabrico da peça.

b) Para determinar o ângulo de recuperação elástica usa-se a expressão deduzida no problema 10.1 que se apresenta de seguida,

$$\frac{\Delta\alpha}{l_0} = \frac{2}{h}\frac{(\sigma_{xd})_{ext}}{E} \tag{12.4.5}$$

em que l_0 é o comprimento da fibra neutra, $(\sigma_{xd})_{ext}$ é a tensão de recuperação elástica na fibra exterior e E é o módulo de elasticidade do material. No entanto, para aplicar esta equação falta conhecer o valor da tensão de recuperação elástica na fibra exterior. Então, admitindo que a quinagem é uma operação de flexão em que a deformação plástica tem origem na aplicação de um momento plástico puro, com o valor de $M_p = \sigma_e b h^2/4$, a tensão de recuperação elástica na fibra exterior valerá,

$$(\sigma_{xd})_{ext} = \frac{3}{2}\sigma_R \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{xd})_{ext} = \frac{3}{2} \times 450 = 675\,\text{MPa} \tag{12.4.6}$$

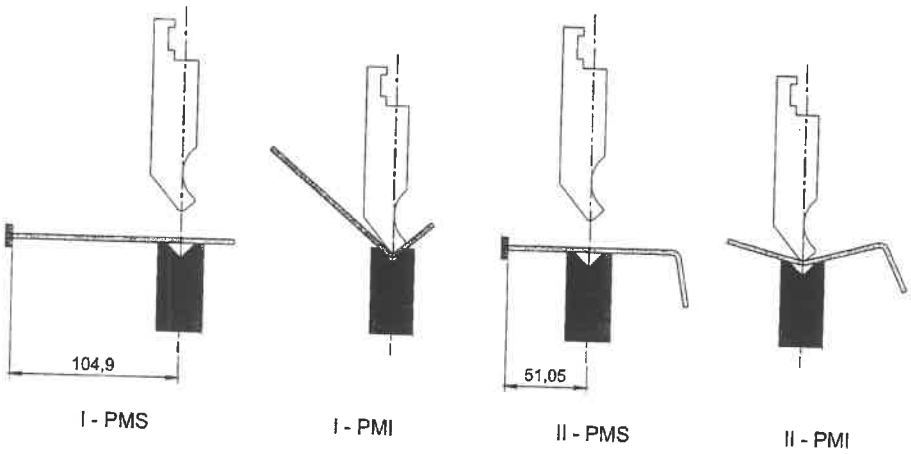
Neste cálculo considerou-se a tensão de rotura, em vez da tensão limite de elasticidade, de modo a se contabilizar o encruamento que o material sofre durante a operação (de facto, esta é a situação mais desfavorável que não entra em linha de conta com a intensidade da deformação associada a cada uma das dobragens).

Então, uma estimativa do ângulo de recuperação elástica para cada uma das quinagens será dado por,

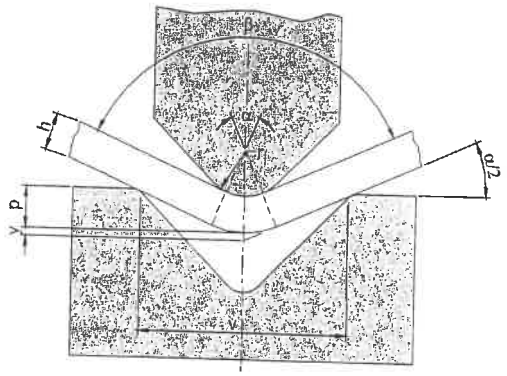
$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= \frac{2}{h}\frac{(\sigma_{xd})_{ext}}{E} l_{01} = \frac{2}{3} \times \frac{675}{210000} \times \left(\frac{80 \times \pi}{180} \times 6\right) = 0.018 \quad \Rightarrow \quad \Delta\alpha_1 = 1.03° \\ \Delta\alpha_2 &= \frac{2}{h}\frac{(\sigma_{xd})_{ext}}{E} l_{02} = \frac{2}{3} \times \frac{675}{210000} \times \left(\frac{30 \times \pi}{180} \times 6\right) = 0.013 \quad \Rightarrow \quad \Delta\alpha_1 = 0.74° \end{aligned} \tag{12.4.7}$$

c) Uma sequência de fabrico possível para a peça é a que se apresenta na figura seguinte, na qual se mostra, para cada uma das quinagens, o início e o final da operação (respectivamente, ferramenta no PMS e PMI). Assim, para executar a quinagem I a estampa plana é posicionada na quinadora de modo a que a linha da dobragem I diste do esbarro 104.9 mm. Terminada esta operação, a peça é voltada e posicionada de novo na quinadora usando agora a outra extremidade da peça para encostar ao esbarro, o qual

deverá ser colocado a uma distância de 51.05 mm da linha de quinagem para efectuar a quinagem II.



Para definir o valor da profundidade sabe-se que esta pode ser obtida a partir da seguinte expressão, em conformidade com a figura seguinte,



$$p = \frac{v}{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - y \quad com \quad y = (r_i + h)\left[\frac{1-\cos(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}\right] \tag{12.4.8}$$

em que v é a abertura da matriz, α o ângulo de dobragem, y a compensação da curvatura da chapa e r_i é o raio do cunho.

Porém, a equação (12.4.8) não considera a recuperação elástica, a qual pode ser compensada considerando o ângulo de recuperação elástica $(\Delta\alpha)$, calculado na alínea anterior, através de,

$$p = \frac{v}{2}\tan\left(\frac{(\alpha-\Delta\alpha)}{2}\right) - (r_i + h)\left[\frac{1-\cos[(\alpha-\Delta\alpha)/2]}{\cos[(\alpha-\Delta\alpha)/2]}\right] \tag{12.4.9}$$

Substituindo valores, obtém-se para cada uma das quinagens,

$$p_1 = \frac{18}{2}\tan\left(\frac{(80-1.03)}{2}\right) - (3+3)\left[\frac{1-\cos[(80-1.03)/2]}{\cos[(80-1.03)/2]}\right] = 5.64 \text{ mm}$$
$$p_2 = \frac{18}{2}\tan\left(\frac{(30-0.74)}{2}\right) - (3+3)\left[\frac{1-\cos[(30-0.74)/2]}{\cos[(30-0.74)/2]}\right] = 2.15 \text{ mm} \tag{12.4.10}$$

Para se calcular a força necessária à quinagem é habitual considerar que a operação se processa com um momento puro e que a inclinação das reacções na matriz pode ser desprezada. Contudo, para minimizar as consequências deste cálculo aproximado a expressão da força de quinagem é afectada de um factor correctivo, k, levando a que o sua determinação seja efectuada através da seguinte expressão,

$$F_q = k\,\sigma_R\,\frac{b\,h^2}{v} \quad com \quad k = 1 + 4\frac{h}{v} \tag{12.4.11}$$

em que σ_R é a tensão de rotura para que o encruamento seja também considerado.

Substituindo valores na equação (!2.4.11), obtém-se,

$$F_{q1} = F_{q2} = \left(1 + 4\times\frac{3}{18}\right)\times 450 \times \frac{200\times 3^2}{18} = 75000\,\text{N} = 75\,\text{kN} \tag{12.4.12}$$

Embora a quinadora tenha capacidade para realizar as operações, o facto do valor da força de quinagem ser elevado é consequência de se ter adoptado uma matriz com uma abertura relativamente pequena, conforme discutido na alínea anterior. De referir, ainda, que o valor calculado para a força aplica-se a ambas as quinagens, uma vez que a expressão utilizada não contempla nenhuma variável indicadora da intensidade da

dobragem. Assim, também a potência máxima de quinagem será igual para ambas as operações e dada por,

$$P_{q1} = P_{q2} = F_q\, v = 75000 \times 7 \times 10^{-3} = 525\,\text{W} = 0.5\,\text{kW} \qquad (12.4.13)$$

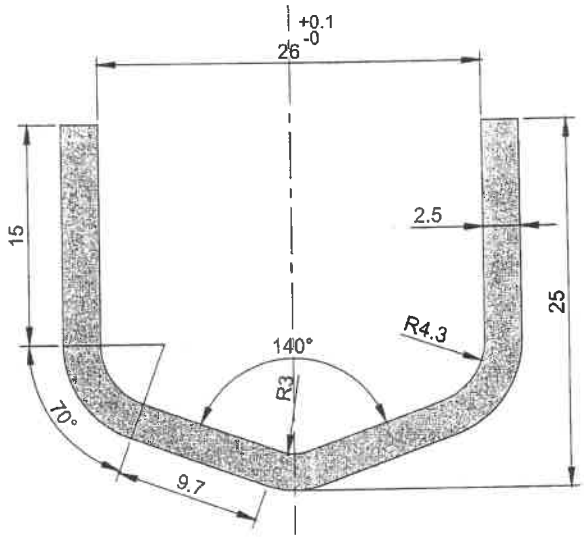
d) Embora a quinadora tenha capacidade para realizar qualquer das quinagens, muitas vezes as limitações surgem das características mecânicas das ferramentas de que se dispõe. Em particular, as tensões desenvolvidas entre a peça e as ferramentas não devem ultrapassar o valor admissível do material das ferramentas para evitar que o cunho/matriz se danifique com eventuais deformações localizadas. Neste contexto, é então necessário verificar se o valor admissível para as ferramentas, fornecido pelo fabricante, não é excedido, ou seja,

$$T_q = \frac{F_q}{b} = \frac{75000 \times 10^{-3}}{9.8 \times 200 \times 10^{-3}} = 38.2\,\text{ton/m} < (T_f)_{adm} = 100\,\text{ton/m} \qquad (12.4.14)$$

Concluindo-se, assim, que as quinagens podem ser efectuadas sem risco de avaria das ferramentas.

Problema 12.5

Para a peça em alumínio representada na figura seguinte pretende-se estudar a última operação de quinagem (quinagem com um ângulo entre abas de 140°), uma vez que da sua precisão dependem as dimensões globais da peça.



A peça com um comprimento de b=300 mm é produzida numa liga de alumínio 3003 com as características mecânicas que se apresentam na tabela seguinte,

E (MPa)	ν	σ_e (MPa)	σ_R (MPa)	e_R	e_f
76700	0.463	56.3	101.0	0.271	0.398

Nestas condições, admitindo que a quinagem central da peça (ângulo entre abas de 140°) é a última a ser efectuada, responda às seguintes questões:

a) Verifique para a quinagem no ar sem compensação da recuperação elástica se a distância entre as abas verticais é respeitada. Determine a profundidade de quinagem.

b) Determine o valor da profundidade de quinagem de modo a que a distância entre as abas verticais seja assegurada.

c) Discuta a possibilidade desta quinagem ser efectuada a fundo, indicando o valor de força mais aconselhado para esta operação. Compare o valor obtido com o correspondente ao da quinagem no ar da mesma operação.

Resolução

a) Com este problema pretende-se analisar a recuperação elástica em diferentes condições de solicitação para um caso de flexão em domínio plástico em que a curvatura não pode ser desprezada. Nestas condições, interessa estabelecer o procedimento de análise, começando por definir o modo como a variação angular associada à recuperação elástica irá ser determinada.

Para tal, sabe-se que a extensão tangencial elástica, ε_θ, está relacionada com a variação angular da região em flexão, $(\alpha - \alpha_0)$, por,

$$\varepsilon_\theta = \frac{v}{(r_{N0} + v)} \frac{(\alpha - \alpha_0)}{\alpha_0} \tag{12.5.1}$$

em que v é a distância da fibra à linha neutra e r_{N0} o raio da linha neutra.

Então, a variação angular relativa, $\Delta\alpha/\alpha_0$, devida à recuperação elástica, quando referida à fibra exterior, será dada por,

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} = (\varepsilon_{\theta d})_{ext} \frac{r_e}{(r_e - r_N)} \tag{12.5.2}$$

em que $(\varepsilon_{\theta d})_{ext}$ é a extensão da descarga na fibra exterior, r_e o raio da fibra exterior e r_N o raio da fibra neutra.

Admitindo que a recuperação elástica se faz em torno da linha média e notando que para a fibra exterior se tem $(\varepsilon_{\theta d})_{ext} = (\sigma_{\theta d})_{ext}/E$, a equação (12.5.2) pode escrever-se do seguinte modo,

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{2(\sigma_{\theta d})_{ext}}{E}\left(\frac{r_i}{h} + 1\right) \tag{12.5.3}$$

em que $(\sigma_{\theta d})_{ext}$ é a tensão tangencial de descarga na fibra exterior, E o módulo de Young do matéria, r_i o raio interior e h a espessura.

A análise da equação (12.5.3) permite concluir que a recuperação elástica relativa $(\Delta\alpha/\alpha)$ aumenta com o incremento do valor de (r_i/h) o que, numa perspectiva de

precisão da peça enformada, aconselha à selecção de raios mais pequenos para as ferramentas.

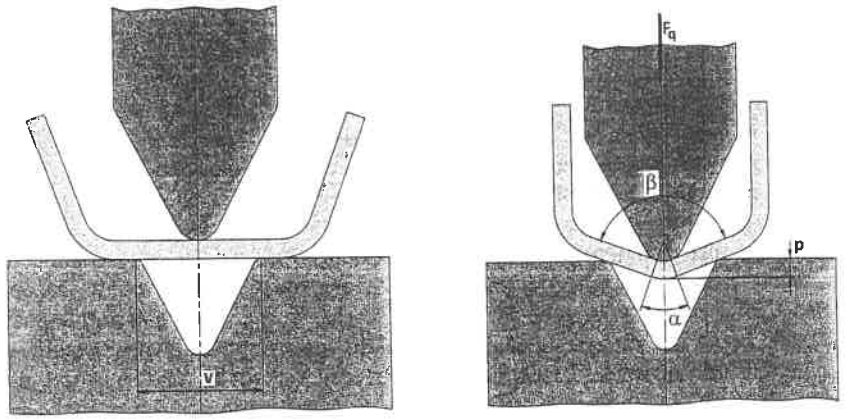
Voltando agora ao problema, nas figuras seguintes a) e b) apresenta-se, respectivamente, a operação de quinagem em análise nos instantes inicial, quando o cunho toca a chapa, e final, imediatamente antes do cunho inverter o seu movimento. Assim, para se determinar a profundidade de quinagem, sabe-se que esta pode ser obtida através da seguinte expressão,

$$p = \frac{v}{2\,\mathrm{tg}(\beta/2)} - (r_i - h)\left[\frac{1 - \mathrm{sen}(\beta/2)}{\mathrm{sen}(\beta/2)}\right] \tag{12.5.4}$$

em que β é o ângulo da quinagem entre abas e v a abertura da matriz.

Adoptando uma abertura da matriz igual a 6 vezes a espessura da chapa, ou seja, de 15 mm e substituindo valores, vem,

$$p = \frac{15}{2\,\mathrm{tg}(70°)} - (3 - 2.5)\left[\frac{1 - \mathrm{sen}(70°)}{\mathrm{sen}(70°)}\right] = 2.70 \text{ mm} \tag{12.5.5}$$



(a) (b)

Para determinar a variação angular associada à recuperação elástica desta quinagem no ar, convém notar que, em primeira aproximação, esta operação processa-se com um

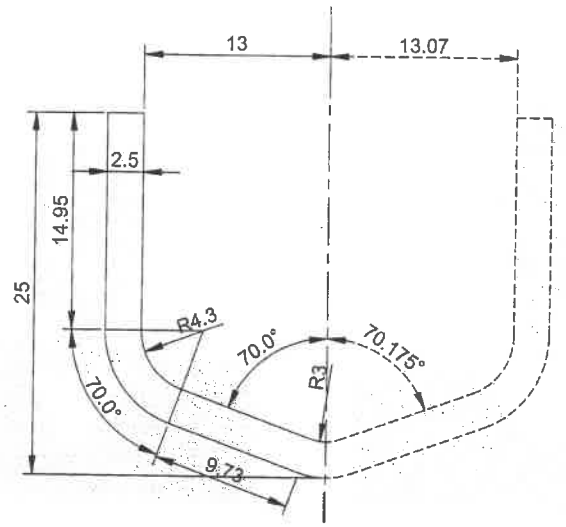
momento puro, de valor $M_f = \sigma_R\, b h^2/4$ (considerando o encruamento do material), e que por isso a tensão de descarga na fibra exterior vale,

$$(\sigma_{\theta d})_{ext} = \frac{M_f}{I} y = -\frac{\sigma_R\, b h^2}{4}\frac{12}{b h^3}\frac{h}{2} = -\frac{3}{2}\sigma_R \qquad (12.5.6)$$

Então, usando agora a equação (12.5.3) para estimar a recuperação elástica, obtém-se,

$$\Delta\alpha = 40 \times \frac{3\times 101}{76700}\left(\frac{3}{2.5}+1\right) = 0.35° \qquad (12.5.7)$$

Na figura seguinte do lado direito apresenta-se a variação dimensional que a peça sofre após recuperar elasticamente (sugere-se como exercício complementar o cálculo analítico desta variação dimensional).



Constata-se assim que a variação não é aceitável pois a dimensão estimada após recuperação elástica é de 26.14 mm e a dimensão admissível é de 26.1 mm. Daqui ainda se pode concluir que o ângulo máximo de recuperação elástica que permite assegurar a tolerância será de $\Delta\alpha_{max} = (0.35x0.1)/0.4 = 0.25°$.

b) Um processo que pode ser usado para compensar a recuperação elástica consiste em efectuar a operação com uma profundidade de quinagem superior, de modo a que a diferença equivalha exactamente ao ângulo de recuperação elástica. Esta solução, embora seja expedita, pode originar produções pouco precisas porque as peças produzidas passam a depender da máquina ferramenta, em particular da sua precisão e repetitibilidade, bem como das variações dimensionais da matéria-prima.

Em termos práticos o cálculo da profundidade de quinagem irá ser feito admitindo que se pretende efectuar uma dobragem com um ângulo entre abas de $\beta = 139.7°$. Substituindo este valor na equação (12.5.4), obtém-se,

$$p = \frac{15}{2\,\mathrm{tg}(69.8°)} - (3-2.5)\left[\frac{1-\mathrm{sen}\,(69.8°)}{\mathrm{sen}\,(69.8°)}\right] = 2.73 \text{ mm} \qquad (12.5.8)$$

Os comentários feitos anteriormente sobre a precisão dimensional das peças obtidas podem ser melhor compreendidos com o resultado obtido para o novo valor da profundidade de quinagem, o qual difere apenas de 0.03 mm relativamente ao calculado para a operação de quinagem sem compensação da recuperação elástica. Neste contexto, sempre que seja exigida precisão e repetitibilidade para o fabrico, uma solução mais fiável poderá ser a realização da operação através de uma quinagem a fundo, porém existem algumas limitações associadas às dimensões das peças que podem vir a tornar esta solução inviável e cuja discussão será feita na alínea seguinte.

c) Para analisar as condições inerentes à realização da quinagem a fundo, interessa conhecer as principais variáveis que influenciam esta operação. Assim, da equação (12.5.3) constata-se que, para além das relações dimensionais da peça, o valor da tensão tangencial de descarga na fibra exterior influencia a recuperação elástica relativa. Como este valor depende do valor do momento aplicado na carga, o qual, por sua vez, depende das condições de solicitação, conclui-se que para conhecer o valor da tensão de descarga na fibra exterior é necessário conhecer a posição da linha neutra durante a fase de carga.

A metodologia de cálculo a seguir para a resolução deste problema passa, em primeiro lugar, por apresentar o modo como se pode determinar a posição da linha neutra em função das condições específicas do carregamento, seguindo-se a discussão sobre o procedimento seguir para calcular o momento de carga envolvido em cada caso.

Posição da linha neutra:

Analisando as condições de quinagem a fundo, conclui-se que esta se distingue por existir pressão radial (direcção da espessura) aplicada nas superfícies exteriores na zona de dobragem. Considerando o caso mais geral, ou seja, admitindo que no raio interior, r_i, está aplicada uma pressão $-p_i$ e que no raio exterior a pressão aplicada é $-p_e$, vai começar por se determinar a distribuição das tensões que existem durante a dobragem.

Partindo das equações de equilíbrio nas direcções radial e tangencial, dadas respectivamente por,

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \qquad (12.5.9)$$

Depois de introduzidas as simplificações geométricas e considerada a condição de plasticidade definida pelo critério de plasticidade de Tresca, a equação de equilíbrio para a direcção radial fica,

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \mp \frac{\sigma_e}{r} = 0 \qquad (12.5.10)$$

em que o sinal $\mp$ distingue as zonas da peça situadas acima ($\sigma_r - \sigma_\theta = -\sigma_e$) e abaixo ($\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_e$) da linha neutra, onde a tensão tangencial é de tracção e de compressão, respectivamente. Integrando esta equação diferencial obtém-se,

$$\sigma_r \mp \sigma_e \ln r = C \qquad (12.5.11)$$

em que a constante de integração C é determinada através das condições de fronteira, que neste caso estabelecem que,

$$r = r_e \Rightarrow \sigma_{re} = -p_e$$
$$r = r_i \Rightarrow \sigma_{ri} = -p_i \qquad (12.5.12)$$

Sendo a distribuição das tensões radiais dada por,

$$\sigma_r = \sigma_e \ln \frac{r}{r_e} - p_e \qquad r \geq r_N$$
$$\sigma_r = \sigma_e \ln \frac{r_i}{r} - p_i \qquad r \leq r_N \qquad (12.5.13)$$

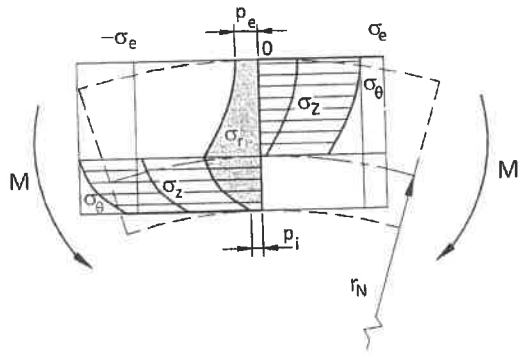
A posição da linha neutra, r_N, determina-se através da continuidade da tensão radial, σ_r, entre as zonas de tracção e de compressão, ou seja,

$$\sigma_e \ln \frac{r_N}{r_e} - p_e = \sigma_e \ln \frac{r_i}{r_N} - p_i \qquad (12.5.14)$$

obtendo-se,

$$r_N^2 = k\, r_i\, r_e \quad \text{com} \quad k = e^{(p_e - p_i)/\sigma_e} \qquad (12.5.15)$$

Na figura seguinte apresenta-se a distribuição das tensões σ_θ, σ_r e σ_z obtidas anteriormente.



Valor do Momento Flector:

Um outro aspecto fundamental para analisar a influência das condições de solicitação na recuperação elástica da peça está relacionado com a variação que o momento flector sofre quando se aplica pressão nas fibras exteriores da peça, pois a intensidade da recuperação elástica depende do valor deste momento, uma vez que o fenómeno se caracteriza pela anulação do momento até se alcançar a posição final de equilíbrio.

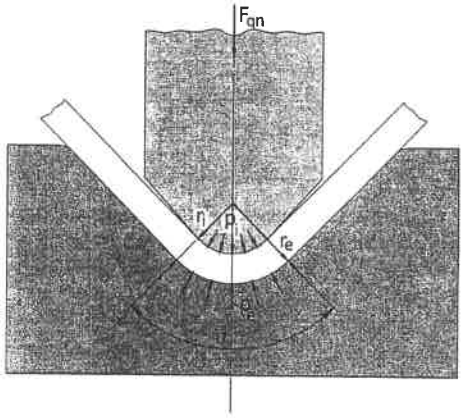
O momento flector, M_p, necessário à flexão plástica de uma peça curva de eixo circular pode ser determinado a partir da distribuição das tensões tangenciais σ_θ,

$$M_p = \int_{r_i}^{r_e} \sigma_\theta\, r\, b\, dr \qquad (12.5.16)$$

As tensões tangenciais obtêm-se a partir do critério de plasticidade de Tresca, já que as tensões radiais são conhecidas, ou seja,

$$M_p = \int_{r_i}^{r_N} (\sigma_r - \sigma_e) r \; b \; dr + \int_{r_N}^{r_e} (\sigma_r + \sigma_e) r \; b \; dr \qquad (12.5.17)$$

Analisando, agora, a figura anterior verifica-se que a tensão radial que actua quando existe pressão nas faces externas da quinagem provém de duas origens distintas; uma está associada à flexão propriamente dita (σ_r) e a outra tem origem na força radial que se exerce no final da operação (σ'_r). Sendo a tensão com origem na flexão conhecida, interessa agora determinar a distribuição da tensão radial associada à compressão radial. Para tal, considere-se a figura seguinte, na qual se apresenta isoladamente esta última fase do processo.



Através do equilíbrio de forças é possível concluir que a distribuição de tensão radial (σ'_r) associada apenas à pressão radial exercida pelo cunho tem seguinte distribuição,

$$\sigma'_r = p_i \frac{r_i}{r} = p_e \frac{r_e}{r} \qquad (12.5.18)$$

em que p_i é a pressão aplicada na fibra interior e p_e a pressão que actua na fibra exterior.

Nestas condições, a equação (12.5.17) passa a ser escrita do seguinte modo,

$$M_p = \int_{r_i}^{r_N} (\sigma_r - \sigma'_r - \sigma_e) r \; b \; dr + \int_{r_N}^{r_e} (\sigma_r - \sigma'_r + \sigma_e) r \; b \; dr \qquad (12.5.19)$$

ou

$$\begin{aligned} M_p = {} & \sigma_e b \left\{ \int_{r_i}^{r_N} \ln \frac{r_i}{r} r \, dr - \int_{r_i}^{r_N} \frac{p_i r_i}{\sigma_e} r \, dr - \int_{r_i}^{r_N} r \, dr \right\} \\ & + \sigma_e b \left\{ \int_{r_N}^{r_e} \ln \frac{r}{r_e} r \, dr - \int_{r_N}^{r_e} \frac{p_e r_e}{\sigma_e} r \, dr + \int_{r_N}^{r_e} r \, dr \right\} \end{aligned} \qquad (12.5.20)$$

Procedendo à integração, obtém-se,

$$\begin{aligned} M_p = {} & \sigma_e b \left\{ \frac{r_N^2}{2} \ln \frac{r_i}{r_N} + \frac{\left(r_i^2 - r_N^2\right)}{4} + \frac{p_i r_i}{\sigma_e} \left(r_i - r_N\right) \right. \\ & \left. - \frac{r_N^2}{2} \ln \frac{r_N}{r_e} + \frac{\left(r_e^2 - r_N^2\right)}{4} + \frac{p_e r_e}{\sigma_e} \left(r_N - r_e\right) \right\} \end{aligned} \qquad (12.5.21)$$

Notando, agora, que,

$$r_N^2 = k \, r_e \, r_i \qquad \text{com} \qquad k = e^{(p_e - p_i)/\sigma_e} = e^{-(p_i h)/(\sigma_e r_e)} \cong 1 - \frac{h \, p_i}{\sigma_e r_e} \qquad (12.5.22)$$

Introduzindo este resultado e simplificando a equação (12.5.21), obtém-se para o momento flector,

$$M_p = \left\{ \frac{\sigma_e b h^2}{4} - \frac{p_i^2 b h^2}{2\sigma_e} \frac{r_i}{r_e} \right\} \qquad (12.5.23)$$

O resultado expresso pela equação (12.5.23) indica que o valor do momento necessário à deformação plástica reduz-se quando se aplica conjuntamente pressão radial, sendo essa redução dada pelo segundo termo desta expressão. De facto, quanto maior for a pressão aplicada menor é a parcela do momento, reduzindo-se igualmente

para materiais com menor resistência. Os outros parâmetros que provocam a redução do momento de flexão estão relacionados com a geometria da peça em deformação, não sendo a respectiva influência muito simples de avaliar a partir da equação (12.5.23). Para se conseguir avaliar estes parâmetros com maior facilidade ir-se-ão introduzir os seguintes conceitos:

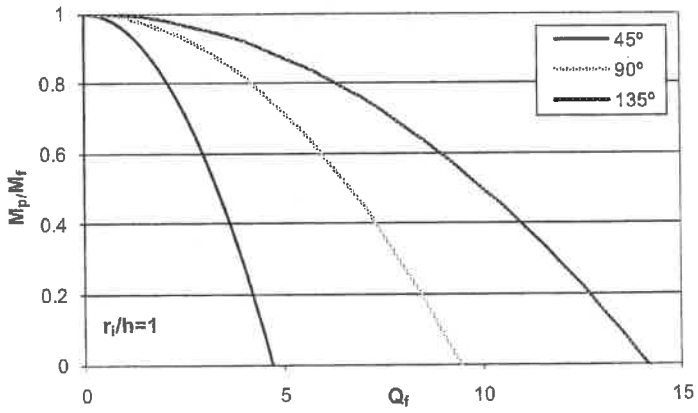
- A pressão interna p_i relaciona-se com a força aplicada através da relação, $p_i = F_{qn}/(\alpha r_i b)$, em que α é a dimensão angular da zona dobrada.
- A força aplicada na fase final da operação (F_{qn}) pode relacionar-se com a força necessária à realização da quinagem no ar da mesma peça (F_q) através de $F_{qn} = Q_f F_q = Q_f \left(\sigma_e b h^2\right)/v$, em que Q_f é o factor de ampliação da força e v a abertura da matriz usada na quinagem no ar que, para esta análise, irá considerar-se $v = C_v h = 6h$.
- Despreza-se a variação de espessura, logo $r_e = r_i + h$.
- A equação do momento M_p será adimensionalizada com o valor do momento puro de flexão, $\left(M_f = \sigma_e b h^2/4\right)$.

Introduzindo estas simplificações na equação (12.5.23) e simplificando, obtém-se,

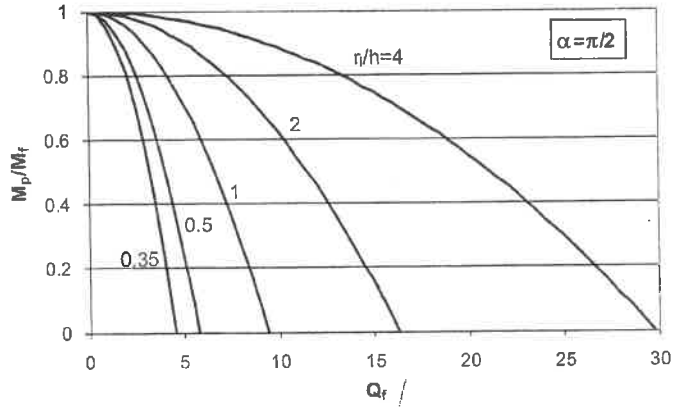
$$\frac{M_p}{M_f} = \left\{1 - Q_f^2 \frac{2}{C_v^2 \alpha^2} \frac{1}{\frac{r_i}{h}\left(\frac{r_i}{h}+1\right)}\right\} \qquad (12.5.24)$$

Verifica-se assim que o momento necessário à flexão M_p depende dos seguintes parâmetros geométricos: dimensão angular da zona deformada, α, e da relação entre o raio interior e a espessura da chapa, r_i/h. A influência do primeiro pode ser analisada na figura seguinte, na qual se mostra a variação da relação (M_p/M_f) com o factor de ampliação da força de quinagem no ar, Q_f, para três ângulos de dobragem (45°, 90° e 135°), admitindo uma relação entre o raio interior e a espessura unitária $(r_i/h = 1)$.

Notando que a anulação do momento flector M_p corresponde à situação em que a recuperação elástica é praticamente nula, verifica-se que para as operações com ângulos de dobragem maiores as forças exigidas para a "quebra do nervo" são mais elevadas (cerca de 15 vezes a força de quinagem no ar para ângulos de 135°), facto que desaconselha a realização da operação de quinagem a fundo para estes casos. Este mesmo motivo justifica o facto de as operações de quinagem a fundo deverem ser efectuadas com raios do cunho (raio interior de quinagem) inferiores à espessura da chapa.



Na verdade a anulação do momento M_p depende significativamente da relação (r_i/h) da operação, conforme se pode ver na figura seguinte, na qual se apresenta a variação da relação (M_p/M_f) com o factor de ampliação da força de quinagem no ar, Q_f, para diferentes relações de (r_i/h), tomando um ângulo de dobragem de $\alpha = 90°$.



Analisando esta figura constata-se que de facto, para relações $r_i/h \geq 1$ a força necessária à anulação da recuperação elástica alcança valores muito elevados desaconselhando a realização da quinagem a fundo para essas condições.

Para determinar a força a aplicar na quinagem a fundo à operação do problema em análise, vai começar por se determinar o valor da força de quinagem no ar desta operação, considerando o encruamento do material da chapa, conforme tem vindo a ser feito, ou seja,

$$F_q = \frac{\sigma_R b h^2}{v} = \frac{101 \times 300 \times 2.5^2}{6 \times 2.5} = 12625\,\text{N} \cong 12.6\,\text{kN} \qquad (12.5.25)$$

Como se viu anteriormente, para que a tolerância dimensional da peça seja respeitada é necessário que o ângulo de recuperação elástica seja inferior a $0.25°$. Então, aplicando a equação (12.5.3), obtém-se,

$$\Delta\alpha = \frac{2\alpha(\sigma_{\theta d})_{ext}}{E}\left(\frac{r_i}{h}+1\right) = \frac{2\times 40(\sigma_{\theta d})_{ext}}{76700}\left(\frac{3}{2.5}+1\right) = 2.295x10^{-3}(\sigma_{\theta d})_{ext} \le 0.25° \qquad (12.5.26)$$

Nestas condições, é necessário determinar o valor da tensão tangencial de recuperação na fibra exterior, o qual, por sua vez, depende do valor do momento de descarga. Aplicando a equação (12.5.24) pode calcular-se o momento (M_p), ou seja,

$$M_p = \left\{1 - \frac{2Q_f^2}{6^2 \times \left(\frac{40\pi}{180}\right)^2} \frac{1}{\frac{3}{2.5}\left(\frac{3}{2.5}+1\right)}\right\} \times M_f = \left\{1 - 0.043 \times Q_f^2\right\} \times M_f \qquad (12.5.27)$$

sendo M_f o valor de referência do momento puro da quinagem no ar.

Então, o valor da tensão tangencial de descarga na fibra exterior será dada por,

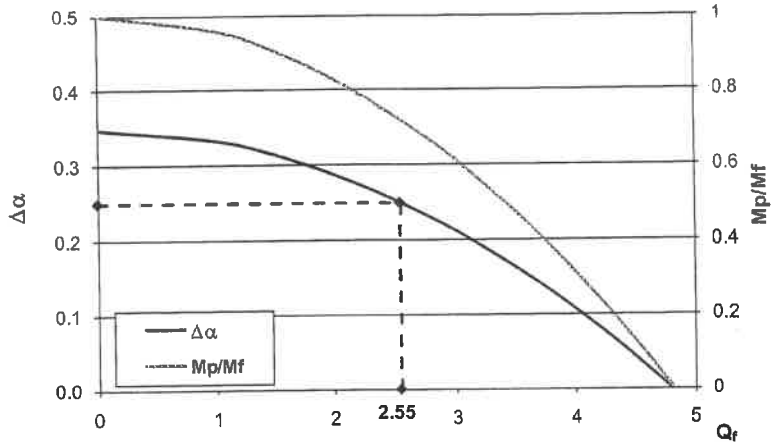
$$(\sigma_{\theta d})_{ext} = \frac{M_p}{I} y = \left\{1 - 0.043\,Q_f^2\right\} \frac{\sigma_R b h^2}{4} \frac{12}{b h^3} \frac{h}{2} = \left\{\frac{3}{2} - 0.065\,Q_f^2\right\} \sigma_R \qquad (12.5.28)$$

em que σ_R é a tensão de rotura do material.

Substituindo este resultado na equação (12.5.26) determina-se o valor da força mínima a aplicar na quinagem a fundo para garantir a tolerância dimensional da peça,

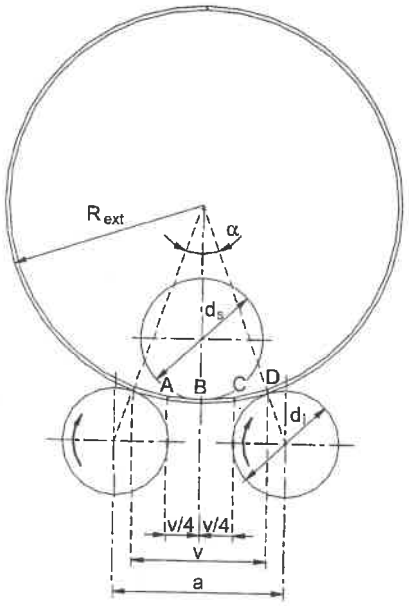
$$Q_f \ge 2.55 \;\Rightarrow\; (F_{qn})_{min} = Q_f F_q = 2.55x12.7 = 32.4\,\text{kN} \qquad (12.5.29)$$

Este mesmo resultado pode ser analisado graficamente na figura seguinte, na qual se apresenta para a quinagem em estudo a evolução do momento de descarga adimensionalizado com o momento puro (M_p/M_f) e a variação do ângulo de recuperação $(\Delta\alpha)$ com o factor de ampliação da força de quinagem no ar (Q_f).



Problema 12.6

Pretende-se fabricar-se uma virola cilíndrica numa calandra de 3 rolos do tipo piramidal. As características da operação de calandragem e do material da virola encontram-se especificadas na figura seguinte.



Virola Cilíndrica

$h = 6\,mm$

$b = 1500\,mm$

$R_{ext} = 800\,mm$

Material da virola

$\sigma_e = 300\,MPa$

$\sigma_R = 405\,MPa$

$e_R = 30\%$

$E = 2.0 \times 10^5\,MPa$

Calandra

$d_l = 250\,mm$

$d_s = 300\,mm$

$a = 500\,mm$

$v_r = 3\,m/min$

$\mu = 0.15$

$L = 2000\,mm$

$P = 5\,kW$ (Potência do motor)

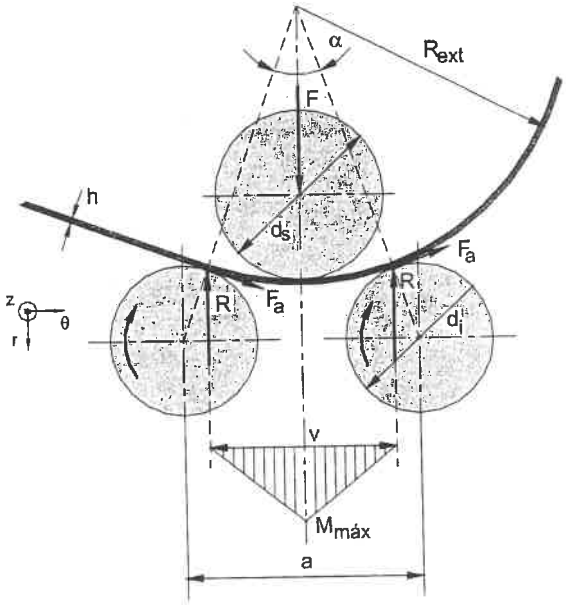
Considerando que se trata de uma operação de flexão em domínio plástico em que o raio de curvatura é muito maior do que a espessura da chapa $(R_{ext} >> h)$ e que a força de posicionamento do rolo superior (força de calandragem) é de 37465 N determine:

a) A distribuição do momento na zona do entre-eixo da virola, considerando que as reacções nos rolos inferiores são verticais e estão aplicadas no pontos de contacto com a virola (entre-eixo de contacto definido pela distância v).

b) A distribuição das tensões tangenciais nas secções A, B, C e D, identificadas na figura. Os gráficos das tensões tangenciais devem ser construídos de um modo quantitativo, ou seja, com os pontos particulares definidos.

Resolução

a) Considerando que as reacções nos rolos inferiores da calandra (R) são verticais, a distribuição do momento flector na zona do entre-eixo da virola (v) é triangular, conforme se ilustra na figura seguinte.



O valor máximo do momento flector surge na zona média do entre eixo e é dado por,

$$M_{max} = \frac{F}{2} \times \frac{v}{2} = \frac{F\,v}{4} \qquad (12.6.1)$$

Então, para calcular o valor máximo do momento flector é necessário determinar a distância de contacto entre a chapa e os rolos inferiores, (v). Notando que o raio de curvatura requerido para a virola é R_{ext}, que o diâmetro dos rolos inferiores é d_i, e que o entre eixo da calandra é a, da figura anterior tira-se que,

$$R_{ext}\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{v}{2} \tag{12.6.2}$$

e que,

$$\left(R_{ext}+\frac{d_l}{2}\right)\text{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2} \tag{12.6.3}$$

Dividindo termo a termo as anteriores expressões obtém-se a equação que permite determinar o entre-eixo de contacto (v) para as condições de calandragem, ou seja,

$$v=\frac{R_{ext}}{R_{ext}+d_l/2}a=\frac{800}{800+250/2}\times 500=432.3\,\text{mm} \tag{12.6.4}$$

O ângulo entre os pontos de contacto da chapa com os rolos inferiores pode ser determinado a partir da equação (12.6.2), obtendo-se,

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{v}{2R_{ext}}\quad\Rightarrow\quad\alpha=31.4^\circ \tag{12.6.5}$$

Substituindo valores na equação (12.6.1) obtém-se então o valor máximo do momento flector que actua na chapa da zona média do entre eixo,

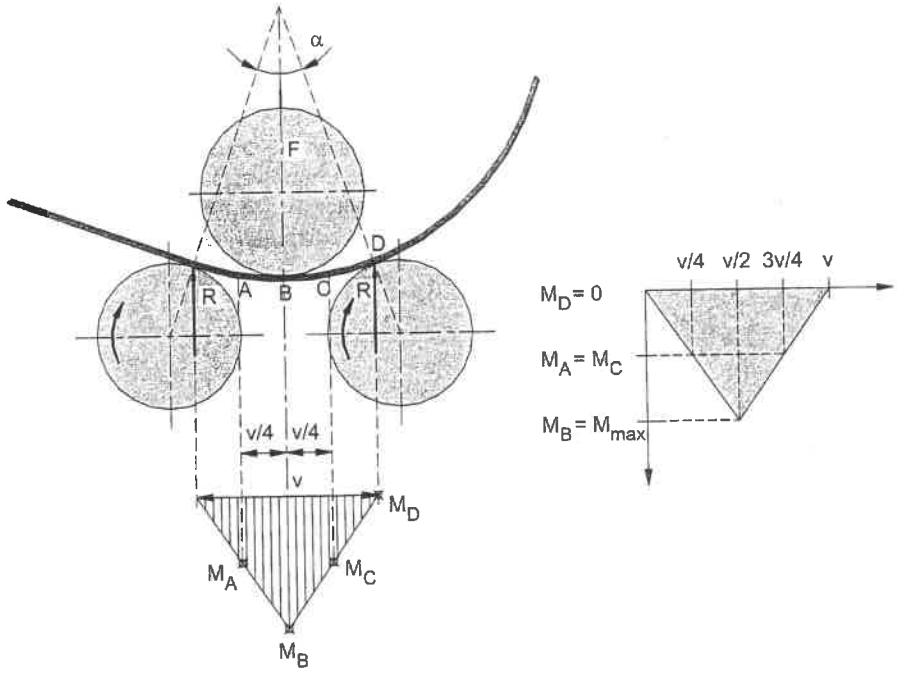
$$M_{max}=\frac{37465\times 432.4\times 10^{-3}}{4}=4050\ \text{N.m} \tag{12.6.6}$$

b) A análise do diagrama de momento flector da figura seguinte mostra que a fase de carga da chapa é progressiva, iniciando-se no ponto de contacto da chapa com o rolo esquerdo e terminando na secção B, uma vez que o momento flector varia desde zero até alcançar o valor máximo, M_{max}. A partir da secção B o momento flector aplicado começa a diminuir até se anular no ponto D, dando lugar, portanto, à descarga progressiva do material da virola.

Para representar a distribuição das tensões tangenciais na fase de carga nas secções A e B, é necessário conhecer a natureza do carregamento (elástico, elasto-plástico ou plástico) em cada uma das secções. Da teoria da flexão de peças direitas sabe-se que o valor máximo do momento que a chapa suporta no domínio elástico (M_e), isto é, enquanto

todas as fibras se encontrarem em domínio elástico (considera-se que as fibras exteriores estão na eminência de entrar no domínio plástico) é dado por,

$$M_e=\frac{\sigma_e b h^2}{6}=\frac{300\times 10^6\times 1.5\times\left(6\times 10^{-3}\right)^2}{6}=2700\,\text{N.m} \tag{12.6.7}$$



Enquanto que o valor do momento plástico (M_p), para que todas as fibras da secção da chapa estejam em domínio plástico, dando origem a uma distribuição de tensão tangencial constante em toda a secção transversal e igual à tensão limite de elasticidade, (σ_e), é dado por,

$$M_p=\frac{\sigma_e b h^2}{4}=\frac{300\times 10^6\times 1.5\times\left(6\times 10^{-3}\right)^2}{4}=4050\,\text{N.m} \tag{12.6.8}$$

Determinados os momentos que balizam a natureza da solicitação vai passar-se à análise detalhada das solicitações que actuam nas secções A e B da chapa.

Secção A

No instante em análise a secção A encontra-se numa fase de carga, conforme foi referido, sendo o momento flector aplicado, igual ao que se encontra aplicado na secção C, e cujo valor é,

$$M_A = M_C = \frac{F}{2} \times \frac{v}{4} = \frac{37465 \times 432.4 \times 10^{-3}}{8} = 2025\,\text{N.m} \qquad (12.6.9)$$

Sendo este valor inferior ao valor máximo do momento que a chapa suporta no domínio elástico, M_e, (equação (12.6.7)) conclui-se que na secção A todas as fibras da chapa se encontram em domínio elástico. Nestas condições, a distribuição de tensões tangenciais é linear e o valor de tensão na fibra exterior pode-se determinar a partir da equação da flexão elástica, do seguinte modo,

$$(\sigma_{ext})_A = \frac{M_A \times h/2}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{6M_A}{bh^2} = \frac{6 \times 2025}{1.5 \times \left(6 \times 10^{-3}\right)^2} = 225\,\text{MPa} \qquad (12.6.10)$$

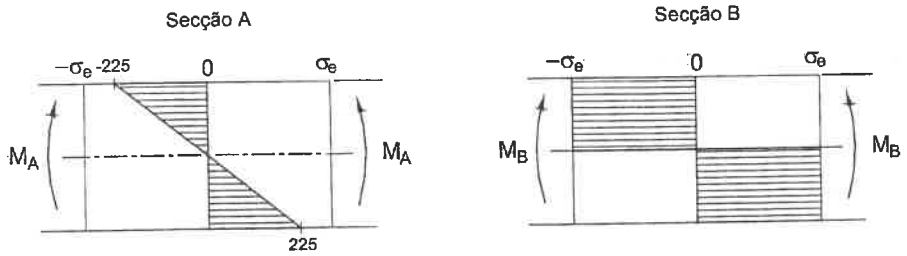
Este resultado permite representar a distribuição de tensões tangenciais na secção A, conforme se encontra ilustrado na figura seguinte (lado esquerdo).

Secção B

A secção B encontra-se ainda na fase de carga, encontrando-se solicitada pelo valor máximo do momento flector, cujo valor, de acordo com as equações (12.6.1) e (12.6.6), é,

$$M_B = M_{max} = \frac{F}{2} \times \frac{v}{2} = 4050\,\text{N.m} \qquad (12.6.11)$$

O que significa, face ao valor do momento plástico, que nesta secção a solicitação é do tipo totalmente plástico, e que consequentemente as fibras da secção da chapa estão em domínio plástico, sendo a distribuição da tensão tangencial constante em toda a secção transversal e igual à tensão limite de elasticidade, σ_e, conforme ilustra na figura seguinte (lado direito).

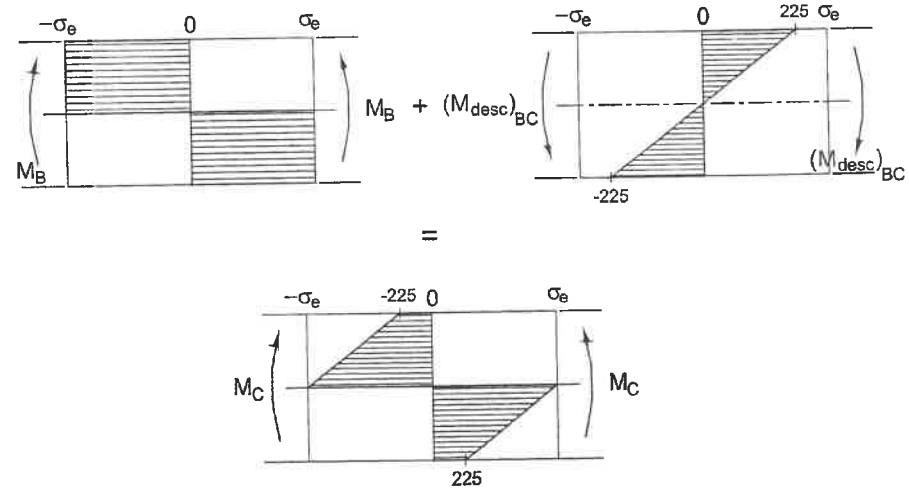


Secção C

A secção C já se encontra na fase de descarga do momento, sendo o momento flector actuante igual ao que se encontra aplicado na secção A e cujo valor já foi determinado anteriormente (equação (12.6.9)). Ou seja, entre a secção B e a secção C, o momento flector descarregou da seguinte quantidade,

$$(M_{desc})_{BC} = M_B - M_C = 4050 - 2025 = 2025\,\text{N.m} \qquad (12.6.12)$$

Deste modo, as tensões tangenciais que actuam neste instante na secção C são obtidas somando às tensões correspondentes ao momento de carga máximo, M_B, as tensões de natureza elástica que resultam do momento entretanto descarregado, $(M_{desc})_{BC}$, conforme ilustra a figura seguinte.



A distribuição de tensões tangenciais que resultam do momento entretanto descarregado, $(M_{desc})_{BC}$, é linear e o valor de tensão nas fibras exteriores determina-se a partir da equação da flexão elástica, do seguinte modo,

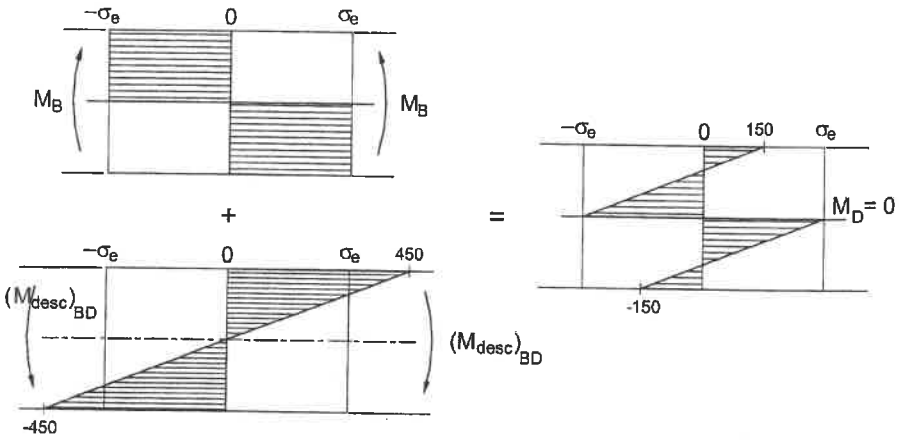
$$(\sigma_{ext})_{desc_{BC}} = \frac{(M_{desc})_{BC} \times h/2}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{6(M_{desc})_{BC}}{bh^2} = \frac{6 \times 2025}{1.5 \times \left(6 \times 10^{-3}\right)^2} = 225\,\text{MPa} \qquad (12.6.13)$$

Secção D

Quando a chapa atinge a secção D o momento aplicado é nulo, $M_D = 0$, ou seja, todo o momento aplicado na secção B já foi descarregado. Nestas condições, o momento descarregado entre as secções B e D, é dado por,

$$(M_{desc})_{BD} = M_B - M_D = 4050 - 0 = 4050\,\text{N.m} \qquad (12.6.14)$$

A partir do instante em que a chapa atinge a secção D, a virola encontra-se em situação de equilíbrio sem momento flector exterior aplicado, o que significa que as tensões tangenciais resultantes da adição entre o momento de carga e o de descarga serão as tensões residuais, as quais ficarão a actuar na virola após a operação de calandragem (ver figura seguinte).



Estas tensões residuais são determinadas seguindo a metodologia descrita quando se tratou da secção C. Considerando que as tensões que resultam do momento que foi progressivamente descarregado, entre B e D, são de natureza elástica, a sua distribuição é linear e o respectivo valor nas fibras exteriores determina-se a partir da equação da flexão elástica,

$$(\sigma_{ext})_{desc_{BD}} = \frac{(M_{desc})_{BD} \times h/2}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{6(M_{desc})_{BC}}{bh^2} = \frac{6 \times 4050}{1.5 \times \left(6 \times 10^{-3}\right)^2} = 450\,\text{MPa} \qquad (12.6.15)$$